

卫生管理技术基础

——实用运筹学与系统工程

任延荣 刘庆欧 主编

北京医科大学 联合出版社
中国协和医科大学

卫生管理技术基础

——实用运筹学与系统工程

主 编 任延荣 刘庆欣

副主编 (以姓氏笔画为序)

马 燕 马文正 王玉升 方前胜 毛慧娜 孙旷舞

主 审 任惠民 程鸿璧

参加编写单位及人员

上海职工医学院	王 冬	
广西卫生干部管理学院	蒋 翔	
山西医学院	刘庆欧	
山西职工医学院	张玉芬	
北京中医学院	毛慧娜	
吉林卫生管理干部学院	沈 勇	
西安医科大学	任延荣	陈西蓉
华西医科大学	毛正中	
同济医科大学	程渝生	
安徽医科大学	方前胜	
河北职工医学院	孙旷舞	
河南医科大学	李颖琰	
河南卫生职工医学院	王 黎	
武汉职工医学院	许 虹	
哈尔滨医科大学	马 燕	
黑龙江卫生管理干部学院	王玉升	
湖南医科大学	李亚琼	张惠安
潍坊医学院	马文正	王在翔 李珍萍

序

当代科学技术突飞猛进，推动了管理事业的发展，不论在管理的质量与数量上都出现了前所未有的变化，管理行业呈树枝状分化，管理项目和管理业务分得愈来愈细，内容愈来愈丰富，涉及面愈来愈广阔。如人力调度与安排、物资数量与利用、资金投放与效果、设备使用与维修、指标确定与量化、信息收集与处理等问题，均与卫生管理、社会保健、社会效益、经济效益等有着密切的联系。

近四五十年发展的“运筹学”与“系统工程”，不但可以使我们按照预定的目标对企业 and 单位实现有效的、最优的宏观控制，而且可以对企业和单位内部每一件事物的运动、发展与变化实现微观控制。50年代中期以后，我国陆续引进了这两门学科，80年代初开始应用于医疗卫生管理。随着四化建设的发展，这两门学科对卫生管理事业就更为需要。但是，目前流行的“运筹学”和“系统工程”有的偏重于数学方法的论证，有的理论与实际并重，但又偏重于工矿企业，这种情况既不适应医疗卫生管理事业的发展，也不适应医药卫生院校的教学需要。本书是专门为医药卫生系统的管理干部以及从事卫生管理专业的教师与学生编写的，其内容深入浅出，方法简明，几何直观性强，反映了“运筹学”、“系统工程”的最新发展水平，是一本具有医疗卫生管理特色的好教材。适用于卫生管理专业的成人教育专科班、本科班、研究生班学生，也可供其它管理专业的同志参考。

本书的出版无疑将对卫生系统的“运筹学”及“系统工程”的教学、科研以及卫生管理事业的发展起促进作用，对各行各业的管理现代化亦具有指导意义。

中华医学会常务副会长兼秘书长

曹泽毅
一九九一年十二月

前 言

本书是根据1990年7月全国医药卫生院校运筹学及系统工程教学教材研讨会的精神和基本要求,并在编者多年使用的内部教材的基础上统一编写而成的。凡卫生管理的函授、成人教育、大专班、本科班以研究生班均可根据实际课时选学。

本书由任延荣副教授(西安医科大学)、刘庆欧副教授(山西医学院)担任主编,统编全部文稿;任惠民教授(西安医科大学)、程鸿壁副研究员担任主审。

在内容选材方面,本书考虑到卫生与经济管理专业等方面的实际需要,不但强调了运筹学和系统工程的基本原理和方法的阐述,而且注重培养学生处理和解决实际问题的能力。通过大量应用举例,使理论与实际有机的结合起来。在文字上,本书力求简洁准确,通俗易懂。为方便自学,每章均有一定数量的习题,部分习题还给出了参考答案。

本书要求读者注意掌握以下几个要点,努力做到学以致用。

1. 系统的观点,如全局和系统的观点、目标和准则观点、优化和可行观点等等;
2. 定性或定量地描述实际问题 and 建立数学模型;
3. 各种决策手段、评价技术、优化方法与解题技巧;
4. 基本概念和数学参数的经济与事理意义。

本书希望能对卫生管理战线的理论、实际工作者有所帮助,对卫生管理决策科学化有所推动。

本书在编写过程中,我们参考了大量其他学者的论著,借鉴了他们的成果,在此向他们致意。西安医科大学和山西医学院领导对编写工作给予支持和鼓励,卫生部有关领导给予关怀,出版社同志付出了辛勤的劳动,我们表示衷心的感谢!

此外,西安医科大学薛秦香、杨晓慧老师为本书做出了大量的抄写工作,凡对本书做出贡献的同志,在此我们一并表示感谢!

由于时间仓促,作者水平有限,书中定有疏漏、不当乃至错误之处,敬请读者批评指正。

编 者

1991年10月

绪 论

一、运筹学与系统工程

运筹学是运用数学手段以寻求解决问题的最优方案的学问。它是一门量化决策科学，也是一门应用性、实践性很强的最优化技术。它产生于20世纪30年代末，形成于20世纪50年代初。

系统工程是一种组织管理系统的规划、设计、制造、试验和使用的科学方法。它是在运筹学基础上发展起来的一门组织管理技术。近代系统工程产生于20世纪40年代初，形成于50年代末。

1950年我国开始引进运筹学这一学科，由于我国史书《史记》里有“夫运筹策帷幄之中，决胜于千里之外”，所以我国学者就把“Operations Research”翻译成“运筹学”。

目前，运筹学与系统工程不仅是我国各大学管理专业的必修课程，而且在国民经济的各个部门也有相当的推广和使用，它涉及到能源、人口、农业、环境、生态、国民经济计划、军事、企业管理、大型科研项目、教育、医疗卫生等各个方面。

二、运筹学及系统工程的研究对象、内容及在教学与管理中的地位

（一）研究对象及内容

运筹学研究的对象是系统或系统中的要素或问题。它的内容是寻求和探讨与要素或问题有关的资金、设备、能源、物资、人力、时间、信息等整体的、量化的各类最优化方法。

系统工程研究的对象是“系统”。它的内容是研究系统的组成原理、结构特征、性质和功能、系统的设计与开发、系统的制造与试验、系统的组织与管理、系统的规划与控制等。

（二）在教学中的地位

由于管理系统的类型很多，因此在教学计划中，按各类管理专业设置了相应的专业课程，讲述有关专业的基本问题。至于各管理专业的共同的技术问题，则放在运筹学和系统工程中来讨论。

运筹学和系统工程是多学科知识的综合应用，它们是以高等数学、概率与数理统计、线性代数、计算机语言、管理学概论等先修课程为基础的，而它本身又为以后学习其它专业课程提供必要的理论方法和技术手段。因此它们对各类管理专业来说，都是很重要的技术基础课，起着承上起下的桥梁作用。此外本课程的有些方法、内容还可以直接用于管理实践，因此运筹学和系统工程在教学计划中占有十分重要的地位。

（三）在管理中的地位

运筹学是现代管理中最主要和最重要的定量决策科学，它的目的是为行政管理人员和工程技术人员在做决策时提供科学依据和有效方法，因此它是现代科学管理的重要手段和工具。

系统工程是一门组织管理技术。它把组织和管理的对象作为系统来考虑，应用系统论、控制论、信息论、运筹学、计算机技术和现代系统科学的方法来分析、推理、综合和评价，用定量和定性的方法来描述系统的特征、状态，进而用最优化技术使系统在技术上先进、时间上最省、经济上合算、整体上有益于人类健康。

现代化的管理包括二层意思，一是组织领导，即指导下属人员，调动一切积极因素，使之发挥最大的主观能动性去最好地完成任任务；二是决策，即为了使企业或单位不断适应周围变化着的环境，必须制定有关企业或单位生存和发展规划、计划和大政方针等各种方案，并从中选择出最有利于企业或单位生存和发展的方案。

如果我们用↑表示效益好，↓表示效益差，那么管理的两层意思就有下述四种关系（附表），从附表中我们清楚地看到：组织领导的好坏，决策的正确与否，关系到企业、单位甚至个人的命运与发展，而且管理的层次越高，组织领导的好坏，决策的正确与否越重要。而系统工程和运筹学正是为组织领导和决策提供方法和科学依据的，可见它们在管理中占有多么重要的位置。

附表

		领 导	
		有 方	无 方
决 策	正 确	↑ ↑	↑
	错 误	↓ ↓	↓

三、运筹学与系统工程的现状与未来

运筹学和系统工程自40年代兴起后，发展十分迅速，到目前为止形成了许多独立的分支和行之有效的数学模型，人们利用它们的原理、模型编制规划和计划、组织指挥生产、控制企业和政府各个部门的运行、开发和探索大自然的奥妙，从中收到了巨大的经济效益与社会效益。

目前比较成熟的运筹学模型有：盈亏、库存、顺序、分配、指派、规划、排队、竞争、模拟、搜索、决策、对策等模型。上述模型已经成为管理者进行定量决策的有力工具，而正在推广和应用的整数规划、非线性规划、目标规划等模型，将在更大范围内引起人们的兴趣。

比较成熟的系统工程方法和技术有：预测技术（定性和定量）、决策分析技术、最优化技术、系统结构辨识技术、管理及计划评审技术、系统模拟技术、计算机技术、情报信息技术、模型化技术、系统的可靠性及可行性技术、系统的评价技术、诊断技术等。这些技术不仅广泛地用于系统的组织管理、系统的控制与生产，而且被农业、林业系统、医疗卫生系统广泛用于国土资源的规划、文化教育、人体系统的探讨等。

近年来随着工商业、军事科学和空间技术的发展，随着系统理论（新老三论和超循环理论等）的发展，运筹学和系统工程的研究与应用愈来愈广，而且开始探索新的发展方向，它们是：

（一）试探规划

它是使用经验、直觉、指导方针，并通过计算机来求问题的解，探索最有可能的途径，以便作出合理的猜想。

（二）行为模型

它是把行为科学的内容也加到运筹学中加以研究，它考虑了对模型运行有直接影响的人的因素，从而把人与环境融为一体，使企业能够有节奏地运行。

（三）组合运筹学技术

它是把两个以上的运筹学模型组合起来，用以解决更大范围内的，更复杂的问题。

而系统开发的新动向是：

（一）在功能方面

从节省人的体力(提高效率)→向节省人的脑力(解决问题的方法)转化，出现了知识工程、专家系统、决策支持系统和软件包等，为人类创造更多的知识财富。

（二）在研究对象方面

从研究企业系统(物质系统)→向社会系统转化，开始对教育、医疗、卫生保健、社会福利、第三产业系统的研究，为人类提供更多的服务。

（三）在规模方面

从单一的系统→向综合系统→向网络化、国际化、超大型化巨系统方向发展，出现了跨学科、跨行业、跨国界的巨型系统，诸如城市环境保护、地球资源问题、生态系统、人口问题、世界经济模型等。把地球当作一个大系统来讨论，为全人类的安全与健康来考虑。

（四）在技术方面

从应用与管理技术→向计划技术的方向发展。开始探讨分析复杂问题和制定决策时的方法、概念和理论，为人类建立更为完整、更加严密的系统工程的科学结构。我国学者郑聚龙教授创立的“灰色系统理论”就是其中一例。下表是近十多年来系统工程研究和开发动向。

附表 最近的系统变化动向

动 向	内 容	例
(1) 大规模化	从零件方面看也是增加的	阿波罗10 ⁷ ，城市系统10 ⁸
(2) 复杂化	从静态转向动态的探讨	经营计划，需要预测
(3) 向非技术系统发展	只有技术是解决不了问题的	社会系统
(4) 不定化	参数增加	社会系统
(5) 开发的冒险性增大	开发能否成功的影响较大	社会系统
(6) 从量向质的系统发展	由大众能量向信息控制方面发展	生产管理综合系统
(7) 价值的变迁	低成长化，人性恢复，省资源化	生产合理化，环境保护，省能量化
(8) 从硬系统向软系统发展	系统化，多样化	社会系统（例如新交通系统）
(9) 从改良系统向创造性系统发展	不能利用过去的经验	社会系统（例如新交通系统）
(10) 人机化	重视人的性格	联机系统
(11) 战略方面的系统化	从一般操作到战略控制	经营系统，城市系统
(12) 开发系统需要时间	也有需要10年以上的	社会系统，城市系统
(13) 可靠性增大	广阔领域的直接控制	新干线，在线系统

（任延荣）

目 录

第一章 线性规划	(1)
第一节 基本概念.....	(1)
第二节 图解法.....	(3)
第三节 线性规划数学模型的标准形式.....	(4)
第四节 单纯形法.....	(6)
第五节 对偶线性规划.....	(11)
第六节 对偶单纯形法.....	(15)
第七节 灵敏度分析.....	(17)
第八节 运输问题及表上作业法.....	(23)
第二章 整数规划	(33)
第一节 概述.....	(33)
第二节 分枝定界法.....	(36)
第三节 割平面法.....	(41)
第四节 0—1规划.....	(49)
第五节 指派问题.....	(51)
第三章 动态规划	(60)
第一节 最优化原理和动态规划的递推关系.....	(60)
第二节 定期确定性问题及其解法.....	(66)
第三节 某些“静态”规划问题的动态规划解法.....	(75)
第四章 图论与统筹方法	(80)
第一节 图论简介.....	(80)
第二节 统筹方法.....	(87)
第五章 存贮分析	(103)
第一节 存贮论的基本概念.....	(103)
第二节 确定性存贮模型.....	(104)
第三节 随机性存贮模型.....	(116)
第六章 排队论	(128)
第一节 基本概念.....	(128)
第二节 常用事件流的概率分布.....	(129)
第三节 常用的排队模型.....	(130)
第四节 系统的优化.....	(141)
第五节 经验分布与理论分布的拟合检验.....	(144)
第七章 决策分析	(147)
第一节 概述.....	(147)

第二节	主观概率的估计	(149)
第三节	风险型决策	(151)
第四节	不确定型决策	(154)
第五节	决策分析中的效用度量	(157)
第八章	对策论	(161)
第一节	基本概念	(161)
第二节	最优纯策略	(162)
第三节	具有混合策略的对策	(165)
第四节	矩阵对策的基本定理和解的性质	(168)
第五节	矩阵对策的常用解法	(170)
第九章	多目标决策	(177)
第一节	多目标评价问题概述	(177)
第二节	权重系数的确定方法	(179)
第三节	方案的筛选和理想方案的逼近	(184)
第四节	综合评价的基本方法——简单加权法和层次分析法	(187)
第五节	线性目标规划的一般概念	(190)
第六节	目标规划的图解法	(192)
第七节	修正单纯形法	(194)
第十章	模型论	(203)
第一节	模型的概念	(203)
第二节	模型的建立	(206)
第三节	模型举例	(210)
第十一章	系统分析	(213)
第一节	系统及系统工程	(213)
第二节	系统分析	(216)
第三节	系统分析的主要作业	(221)
第四节	模糊综合评判方法	(224)
第十二章	预测分析	(229)
第一节	预测学的概念	(229)
第二节	定性预测法	(230)
第三节	定量预测法	(232)
第四节	定时预测法	(244)
第五节	灰色系统模型预测法	(248)
第十三章	决策系统	(252)
第一节	科学决策	(252)
第二节	决策系统	(257)
第三节	决策对象	(261)
第四节	决策技术	(266)
第十四章	可行性研究	(270)

第一节	可行性研究的任务	(270)
第二节	可行性研究的方法步骤	(274)
第三节	项目评价研究	(281)
第四节	可行性研究案例	(287)
第十五章 价值工程		(291)
第一节	价值工程的基本要求	(291)
第二节	对象选择和情报收集	(295)
第三节	功能分析	(297)
第四节	功能评价	(300)
第五节	方案的创造与制定	(305)
第十六章 系统模拟		(312)
第一节	概述	(312)
第二节	模拟技术	(312)
第三节	蒙特·卡罗法	(314)
第十七章 质量管理		(324)
第一节	基本概念	(324)
第二节	排列图	(325)
第三节	因果图	(326)
第四节	控制图	(327)
第五节	控制图应用举例	(329)
第六节	容许限控制图和可信限控制图	(333)
第七节	选控图	(335)
第十八章 案例		(338)
第一节	模糊综合评价模型在冠心病先兆预测中的应用——专家系统应用实例	(338)
第二节	医院管理中的随机仿真模型——北医大口腔医院 Q—GERT 仿真模型	(342)
第三节	人口系统工程——从第三次人口普查数据中提取按年龄死亡率算法	(346)
第四节	高等医科院校效益分析的方法论研究	(351)

第一章 线性规划

线性规划是运筹学的一个分支,其理论日渐完善,应用非常广泛,受到人们普遍的重视。本章着重介绍线性规划的基本概念和主要解法。

第一节 基本概念

实际问题的数学表达式称为该问题的数学模型。建立实际问题的数学模型,是运用数学方法解决该问题的前提。

现在,我们着手建立两个实际问题的数学模型。

例1 某制药厂生产甲、乙两种药品,它们均须在A、B、C三种设备上加工。每种设备的使用时间,每吨药品的加工时间以及所获利润见表1-1。甲、乙药品各生产多少吨,可使该厂所获利润最大?

表1-1

	A	B	C	利润(百元/吨)
	加工时间(小时/吨)			
甲	3	5	9	70
乙	9	5	3	30
设备使用时间(小时)	540	450	720	

解: 设甲、乙分别生产 x_1 、 x_2 吨,该厂所获利润为 y 百元。

根据题意,例1可以利用数学语言描述为:在条件

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leq 540 \\ 5x_1 + 5x_2 \leq 450 \\ 9x_1 + 3x_2 \leq 720 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

约束下,求出 x_1 和 x_2 值,使得

$$y = 70x_1 + 30x_2$$

达到最大值。我们把上述含义简单地记作:

$$\max y = 70x_1 + 30x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leq 540 \\ 5x_1 + 5x_2 \leq 450 \\ 9x_1 + 3x_2 \leq 720 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

这就是例1的数学模型。

例2 设每人每月至少需要60单位的糖、40单位的蛋白质和35单位的脂肪。食品A每公斤含糖、蛋白质和脂肪各为5、3和3单位,而食品B为2、2和1单位。每公斤售价:A为1.5

元, B为0.7元。在保证一个人最低营养要求的前提下, 每月两种食品各买多少, 其花费方能最少?

解: 为便于建立例2的数学模型, 我们根据其中的数据, 列表1-2。

表1-2

	糖	蛋白质	脂肪	售价 (元/公斤)
	含量 (单位/公斤)			
A	5	3	3	1.5
B	2	2	1	0.7
每人每月最低需要量(单位)	60	40	35	

设一个人每月A和B各买 x_1 和 x_2 公斤, 共计花费 y 元。

从表1-2出发, 例2可用数学语言刻划为: 在条件

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 60 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 40 \\ 3x_1 + x_2 \geq 35 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

约束下, 求出 x_1 和 x_2 值, 使得

$$y = 1.5x_1 + 0.7x_2$$

达到最小值。与例1相类似, 我们简单地记作:

$$\min y = 1.5x_1 + 0.7x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 60 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 40 \\ 3x_1 + x_2 \geq 35 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

这便是例2的数学模型。

应当指出, 记号 $\max y$ 表示求出 y 的最大值, $\min y$ 表示求出 y 的最小值。

我们看到, 例1和例2的实际内容各不相同, 然而它们的数学模型却具有三个共同点: y 是线性的, y 的条件都是线性的, 求 y 的最小值或最大值。于是, 例1和例2的数学模型可以归结为:

$$\min (\max) y = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq (=, \geq) b_i \quad (i=1, 2, \dots, m) \\ x_j \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

其中 c_j , a_{ij} 和 b_i 都是常量, 而且 $b_i \geq 0$ 。

一个实际问题的数学模型具备上述形式, 则该问题称为线性规划。

在线性规划数学模型中, y 称为目标函数, x_j 称为决策变量, c_j 称为价值系数, b_i 称为

限定数, $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq (=, \geq) b_i$ 称为限定条件, $x_j \geq 0$ 称为非负条件, 限定条件和非负条件统称为约束条件。

线性规划数学模型的矩阵形式为:

$$\min (\max) y = cx$$

$$Ax \leq (=, \geq) b$$

$$x \geq 0$$

其中:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$$

T 表示转置。

满足约束条件的 x , 称为线性规划的可行解, 可行解的集合, 称为可行域。

使目标函数达到最大(小)值的可行解 x , 称为线性规划的最优解, 记作 x^* 。最优解下的目标函数值, 称为线性规划的最优值。找出线性规划的最优解和最优值, 称为求解线性规划。

线性规划数学模型含有 $\min y$, 称为最小化线性规划, 其最优值记作 $y_{\min}$; 含有 $\max y$, 称为最大化线性规划, 其最优值记作 $y_{\max}$ 。

通常, 把研究线性规划的性质和解法的学科, 也称为线性规划。它产生在本世纪四十年代初期, 如今业已成为运筹学的重要分支。

“线性规划”一词, 既指一类实际问题, 又指一个运筹学分支, 因而兼有两种不同的含义, 但阅读有关文献, 两者是很容易分辨的。

第二节 图解法

线性规划的图解法, 直观而简便, 易于掌握, 仅适用于含有两个决策变量的线性规划, 所以具有很大的局限性。

图解法的步骤为:

- (一) 以两个决策变量 x_1 和 x_2 作为坐标轴, 建立平面直角坐标系;
- (二) 利用约束条件画出可行域的图形;
- (三) 作一条横穿可行域图形的直线 $y=c$, 其中: y 为目标函数, c 为一个常量;
- (四) 确定最优解: 对于最小化线性规划, 位于 $y=c$ 下方且距其最远的可行解就是最优解; 对于最大化线性规划, 位于 $y=c$ 上方且距其最远的可行解就是最优解;
- (五) 计算最优值。

说明: 就步骤(四)而言, 如果不存在“最远的可行解”, 那么该线性规划无解。

例3 利用图解法求解例1。

解: 遵循图解法步骤, 我们画出图1-1, 其中 $y=3000$ 为横穿可行域图形的直线。在图中, 点 $P(75, 15)$ 是在 $y=3000$ 上方且距其最远的可行解, 所以最优解为: $(x_1, x_2)^* =$

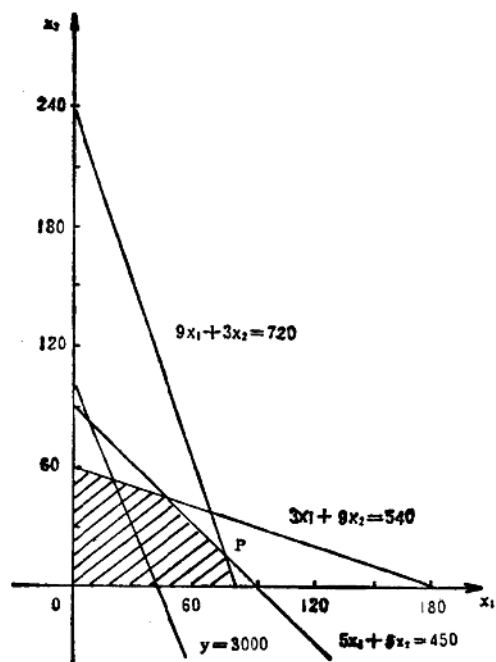


图 1-1

第三节 线性规划数学模型的标准形式

利用单纯形法求解线性规划，其数学模型必须化成标准形式。为此，我们给出线性规划数学模型标准形式的定义。

如果按照下述规定对线性规划数学模型予以变形：

(一) 若为 $\max y = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ ，则通过 $y' = -y$ 将其易为 $\min y' = -\sum_{j=1}^n c_j x_j$ 。

(二) 若限定条件中的表达式，属于“ $\leq$ ”的情况，则在左边加上一个非负的松弛变量，使之变为等式；属于“ $=$ ”的情况，则在左边加上一个非负的人工变量，使之仍为等式；属于“ $\geq$ ”的情况，则在左边减去一个非负的松弛变量，使之变为等式，随后加上一个非负的人工变量，使之仍为等式。

(三) 将松弛变量和人工变量引入目标函数表达式，并且让松弛变量的系数为零，人工变量的系数为一个相当大的正数 M 。

(四) 把松弛变量和人工变量引入非负条件。

(五) 若决策变量 x_j 无非负限制，则引入两个非负的决策变量 x_j' 和 x_j'' ，并把 $x_j = x_j' - x_j''$ 代入目标函数和限定条件表达式，以使全部决策变量都有非负限制。那么变形后的线性规划数学模型：

(75, 15)。

将以上最优解代入目标函数表达式，算得最优值为 $y_{\max} = 5700$ 。

例 1 的最优解和最优值表明，该制药厂甲、乙药品各生产 75、15 吨，所获利润最大，可达 570 000 元。

根据例 3 和习题一第 2 题的情况，可以得到下列结论：

(一) 线性规划的可行域是凸多边形或凸集。

(二) 线性规划的最优解一定在可行域的顶点上达到。

(三) 若线性规划可行域的两个顶点均为最优解，则它们连线上的任意一点也是最优解。

(四) 若线性规划可行域是无界的，则其最优解存在与否，视线性规划的具体情况而定。

(五) 若线性规划可行域是空集，则线性规划无解。

$$\begin{aligned} \min y' &= \sum_{j=1}^{n'} c_j' x_j' \\ \begin{cases} \sum_{j=1}^{n'} a_{ij}' x_j' = b_i & (i=1, 2, \dots, m) \\ x_j' \geq 0 & (j=1, 2, \dots, n') \end{cases} \end{aligned}$$

称为标准形式。

为了加以区别，变形前的线性规划数学模型：

$$\begin{aligned} \min(\max) y &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq (=, \geq) b_i & (i=1, 2, \dots, m) \\ x_j \text{ 有或非负限制} & (j=1, 2, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

称为一般形式。

例4 化线性规划数学模型一般形式

$$\begin{aligned} \max y &= x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1, x_2 \geq 0, x_3 \text{ 无非负限制} \end{cases} \end{aligned}$$

为标准形式。

解：我们采取以下具体步骤：

(1) 令 $y' = -y$ ，把 $\max y = x_1 - 2x_2 + 3x_3$ 化为 $\min y' = -x_1 + 2x_2 - 3x_3$ 。

(2) 在第一个限定条件的左边加上一个非负的松弛变量 x_4 ，使其变为：

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

(3) 在第二个限定条件的左边减去一个非负的松弛变量 x_5 ，再加上一个非负的人工变量 x_6 ，使其变为：

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_5 + x_6 = 2$$

(4) 在第三个限定条件的左边加上一个非负的人工变量 x_7 ，使其变为：

$$-3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_7 = 5$$

(5) 将松弛变量 x_4 和 x_5 、人工变量 x_6 和 x_7 引入目标函数表达式和非负条件。

(6) 引入非负的决策变量 x_8 和 x_9 ，并且将 $x_3 = x_8 - x_9$ 代入目标函数和限定条件表达式，

从而让 x_8 和 x_9 取代 x_3 ，以使全部决策变量均有非负限制。

即可将该线性规划数学模型的一般形式，化成如下标准形式：

$$\begin{aligned} \min y' &= -x_1 + 2x_2 - 3x_8 + 3x_9 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7 \\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_8 - x_9 + x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_8 - x_9 - x_5 + x_6 = 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_8 - 2x_9 + x_7 = 5 \\ x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

线性规划数学模型的标准形式具有下述特点:

- (一) 属于求目标函数的最小值。
- (二) 每个限定条件都是等式。
- (三) 所有决策变量、松弛变量和人工变量均有非负限制。

线性规划数学模型的一般形式已经具备以上特点, 就径直把它视为标准形式, 而无须墨守成规, 画蛇添足。

现在继续介绍线性规划的基本概念。这些概念都与线性规划数学模型的标准形式密切相关, 并且是领会以下各节内容所不可缺的。

设线性规划数学模型标准形式及其矩阵形式为:

$$\begin{aligned} \min y &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i & (i=1, 2, \dots, m) \\ x_j \geq 0 & (j=1, 2, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \min y &= cx \\ \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

若B是A的m阶子矩阵, 且 $|B| \neq 0$, 则B称为基。

若基B不失一般性, 可以表示为:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (P_1, P_2, \dots, P_m)$$

则 P_j 称为基向量; P_j 对应的变量 x_j 称为基变量 ($j=1, 2, \dots, m$), 记作 x_B , 其价值系数记作 c_B ; 非基变量及其价值系数分别记作 x_N 和 c_N ; $x=(x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ 称为基本解; 满足非负条件的基本解称为基本可行解; 与基本可行解对应的基称为可行基。

一般地, 基本可行解个数 $\leq$ 基本解个数 $\leq c_n^m$ 。基本可行解是基本解与可行解的交集。

第四节 单纯形法

单纯形法由G. B. Dantzig所提出, 可用来求解任何线性规划。阐述单纯形法的理论依据, 需占很大篇幅, 故从略。

现在介绍单纯形法的步骤:

- (一) 写出线性规划数学模型的标准形式。
- (二) 确定基本可行解和基变量 x_B , 计算相应的目标函数值, 列出第一个单纯形表。
- (三) 求出变量 x_j 的检验数。