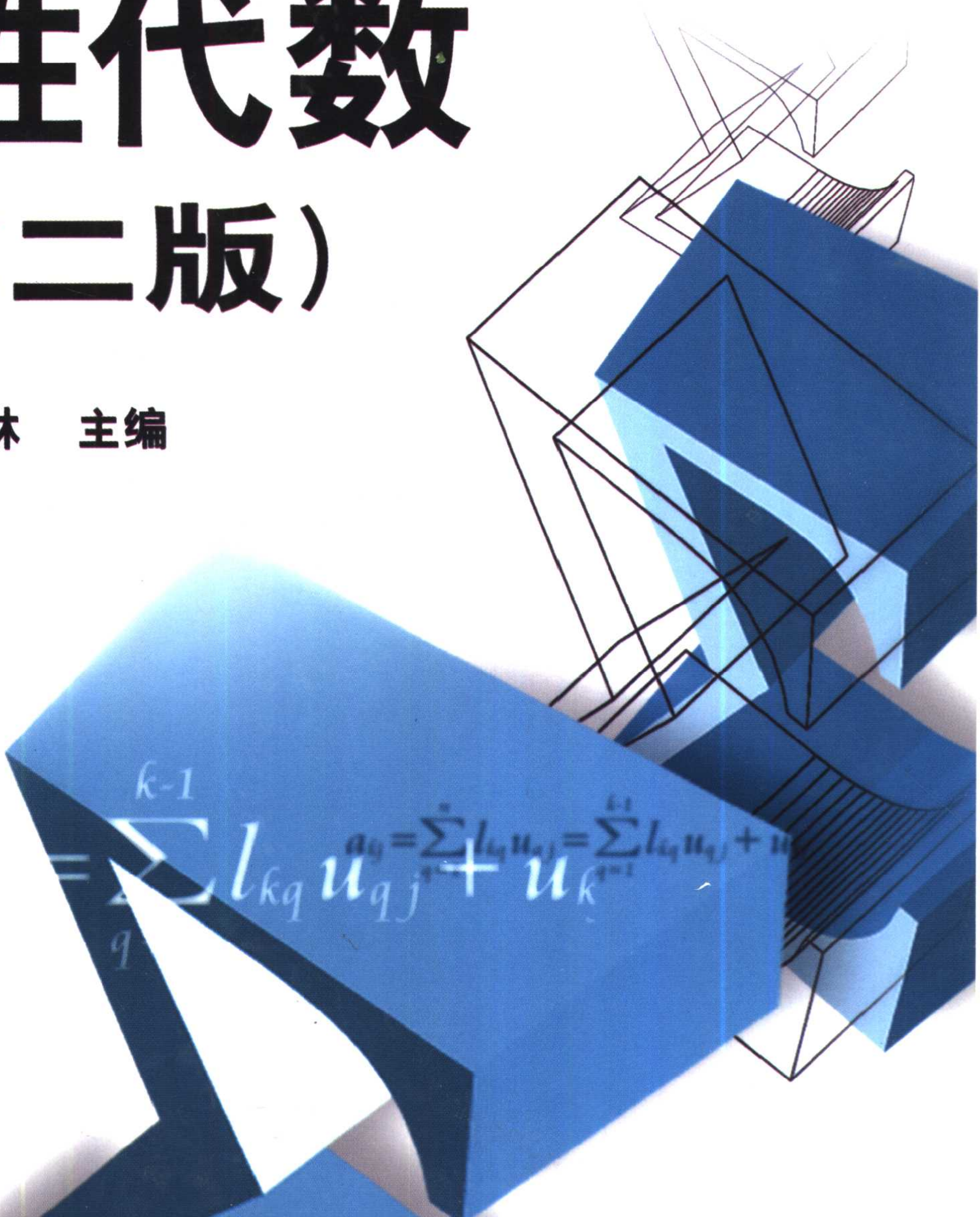
高等专科计算机系列教材

中国计算机学会大专教育学会推荐出版

线性代数

（第二版）

钱椿林　主编



電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
URL: http://www.phei.com.cn

高等专科计算机系列教材

线性代数(第二版)

钱椿林　主编

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内容简介

本书是为高职高专学生编写的线性代数课程教材，它是根据教育部颁发的关于高职高专线性代数课程的基本要求而编写的。本书共分四章，详细讲述了线性代数的基本内容，包括行列式的定义及运算、矩阵及其运算、线性方程组的有关知识、相似矩阵与二次型等。

本书的特点是通过例题介绍解题思路，每章都安排了本章小结与练习，以使读者能巩固所学知识，提高分析问题和解决问题的能力。

本书深入浅出，便于自学，适合高职高专计算机专业及相关专业作为教材使用，也可供技术人员自学或教师教学参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/钱椿林主编.(2版).-北京：电子工业出版社，2001.3
高等专科计算机系列教材
ISBN 7-5053-6550-9

Ⅰ.线…　Ⅱ.钱…　Ⅲ.线性代数—高等学校—教材　Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 10425 号

丛 书 名：高等专科计算机系列教材
书　　名：线性代数(第二版)
主　　编：钱椿林
责任编辑：张孟玮
特约编辑：胡国清
排版制作：电子工业出版社计算机排版室
印 刷 者：北京大中印刷厂
装 订 者：三河市万和装订厂
出版发行：电子工业出版社　URL：http://www.phei.com.cn
北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
经　　销：各地新华书店
开　　本：787×1092　1/16　印张：13　字数：333 千字
版　　次：2001 年 3 月第 2 版　2001 年 3 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-5053-6550-9 / G·544
印　　数：5000 册　　定价：16.00 元

出 版 说 明

高专层次的计算机专业面临着两方面的巨大变化，一是计算机技术的飞速发展，另一方面是高专层次教育本身的改革和重组。

当前，计算机技术正经历着高速度、多媒体网络化的发展，计算机教育特别是计算机专业的教材建设必须适应这种日新月异的形势，才能培养出不同层次的合格的计算机技术专业人才。为了适应这种变化，国内外都在对计算机教育进行深入的研究和改革。美国 IEEE 和 ACM 在推出了《Computing Curricula 2000》之后，立即又推出了《Computing Curricula 2001》。全国高校计算机专业教学指导委员会和中国计算机学会教育委员会在 1999 年 9 月也提出了高等院校《计算机学科教学计划 2000》(征求意见稿)。目前，国内许多院校老师、专家正在研究《Computing Curricula 2001》，着手 21 世纪的中国计算机教育的改革。

高专层次和本科层次的计算机教育既有联系又有区别，高专层次的计算机教育旨在培养应用型人才。自 20 世纪 70 年代末高等专科学校计算机专业相继成立以来，高等专科学校积极探索具有自己特色的教学计划和配套教材。1985 年，在原电子工业部的支持下，由全国数十所高等专科学校参加成立了中国计算机学会教育委员会大专教育学会，之后又成立了大专计算机教材编委会。从 1986 年到 1999 年，在各校老师的共同努力下，已相继完成了三轮大专计算机教材的规划与出版工作，共出版了 78 种必修课、选修课、实验课教材，较好地解决了高专层次计算机专业的教材需求。

为了适应计算机技术的飞速发展以及高专层次计算机教育形势发展的需要，中国计算机学会教育委员会大专教育学会和大专计算机教材编委会于 2000 年 7 月开始，又组织了一批本科高校、高等专科学校、高等职业技术院校和成人高等院校的有教学经验的老师，学习研究参考了高等院校《计算机学科教学计划 2000》(征求意见稿)，提出了按照新的计算机教育计划和教学改革的要求，编写高专、高职、成教三教统筹的第四轮教材。

第四轮教材的编写工作采取了以招标的方式征求每门课程的编写大纲和主编，要求投标老师详细说明课程改革的思路、本课程和相关课程的联系、重点和难点的处理等。在第四轮教材的编写过程中，编委会强调加强实践环节、强调三教统筹、强调理论够用为度的原则，要求教学计划、教学内容适应高等教育发展的新形势。本套教材的编者均为各院校具有丰富教学实践经验的教师。因此，第四轮教材的特点是体系结构比较合理、内容新颖、概念清晰、通俗易懂、理论联系实际、实用性强。

竭诚希望广大师生对本套教材提出批评建议。

中国计算机学会教育委员会大专教育学会

2001 年 1 月

先后参加中国计算机学会教育委员会大专教育学会和大专计算机教材编委会学术活动的部分学校名单

上海理工大学
上海第二工业大学
上海机械高等专科学校
上海化工高等专科学校
复旦大学
上海交通大学
上海冶金高等专科学校
上海轻工高等专科学校
南京师范大学
南京大学
扬州大学工学院
南京航空航天大学
南京动力高等专科学校
南京机械高等专科学校
金陵职业大学
南京理工大学
河海大学
南京工程学院
南京电力高等专科学校
南京建筑工程学院
江苏无锡江南大学
常州工业技术学院
苏州市职工大学
连云港化工高等专科学校
太原大学
兰州师范高等专科学校
沈阳电力高等专科学校
武钢职工大学
鄂州职业大学
江汉大学
山东大学
济南交通高等专科学校
烟台大学
潍坊高等专科学校
天津商学院
天津职业技术师范学院
贵阳建筑大学
西北工业大学
西安电子科技大学
成都电子机械高等专科学校
电子科技大学
北京广播电视大学
北京理工大学
河南新乡机械专科学校
郑州纺织机电专科学校
洛阳大学
河南新乡市平原大学
安阳大学
开封大学
中南工业大学
国防科技大学
湖南大学
湖南计算机高等专科学校
中国保险管理干部学院
湖南税务高等专科学校
邵阳师范高等专科学校
零陵师范高等专科学校
长沙大学
湖南怀化师范高等专科学校
湖南纺织高等专科学校
邵阳高等专科学校
湘潭机电高等专科学校
宁波高等专科学校
杭州电子工业学院
哈尔滨工业大学
长春大学
韶关大学
佛山科学技术学院

前　言

本书是中国计算机学会大专教育学会、大专计算机专业教材编审委员会编写计划系列教材之一，由大专计算机专业教材编审委员会负责征稿、审定、推荐出版。

线性代数这门学科，在19世纪就已经获得了光辉的成就。线性代数是处理离散对象的有力工具，随着计算机日新月异的发展，许多非线性问题高精度的线性化与大型线性问题的可计算性正在逐步实现，线性代数在数学的其他分支以及物理、生物和经济等许多领域中都有广泛的应用，因此无论从理论上还是应用上看，线性代数在科学技术的许多领域里，都占有重要的地位。它是一门重要的基础课。

根据教育部颁布的高职高专线性代数课程的教学基本要求，结合作者多年从事本课程教学、科研的体会而编写的这本书，为培养学生解决线性问题提供了一种方法，并为学生后继课程的学习打好基础。

本书有较宽的适应面，因而作为基础课教材，对于高职高专各工科专业、管理专业、财经专业等也适用。

编者在编写过程中注意到以下几点：

1. 以线性方程组为主线，以矩阵作为工具，使线性代数的基本概念、基本理论、基本方法围绕着线性方程组而展开，并注意突出重点，分散难点。

2. 在内容深度上考虑到高职高专层次的特点和要求，在讲清基本概念的基础上，突出计算能力的培养。同时，引导学生积极思考并提倡运用归纳、对比等科学方法，以便促进逻辑思维能力和推理能力的提高，由于受到基础知识的限制，有些内容只给出结论，知道会用就可以了。

3. 概念和结论的引入由具体到抽象，由特殊到一般，阐述比较详细，力求通俗易懂，深入浅出。

4. 本书有较多的例题，较详尽地进行了方法、步骤的归纳，着重介绍解题思路。每节末有较多的习题并附有参考答案。每章都有一节本章小结与练习；其内容为小结本章的基本概念、基本定理、基本方法，疑点解析，例题、方法精讲，练习题等等；目的是巩固所学知识，提高读者用线性代数的方法去分析问题和解决问题的能力，便于自学。

本书由钱椿林主编，参编人员为黄振明（第1章及第4章）、吴平（第2章2.1节到2.4节）、蒋麟（第2章的2.5节到2.7节）、钱椿林（第3章）。全书由钱椿林修改并定稿。在编写本书的过程中，俞泳薇副教授、赵一鸣副教授、王平一副教授，田立炎、周良英和张晶讲师作了大量的资料收集和整理工作；电子工业出版社张孟玮老师为本书的编写构思提出了有益的建议和支持，在此一并致谢。

南京建筑工程学院金炳陶教授任本书主审。

由于编者水平有限，书中难免有不足之处，诚恳地希望读者批评指正。

编者

2000年9月于苏州

目　录

第1章 行 列 式

行列式在线性代数中是一个基本工具，研究许多问题都需要用到它，比如线性方程组、矩阵、矩阵的特征值、二次型等。本章在二阶、三阶行列式定义的基础上，归纳出一般的 n 阶行列式的定义，然后讨论行列式的基本性质与计算。为了便于学生能较好地掌握这部分内容，介绍了常用的几种计算 n 阶行列式的方法。还介绍了用行列式这一工具求解一类非齐次线性方程组的一种重要方法——克拉默法则，并由此给出了齐次线性方程组有非零解的必要条件。

1.1 行列式的定义

1.1.1 二阶和三阶行列式

行列式这个概念究竟如何形成的呢？这就得从求解方程个数和未知量个数相等的一次（线性）方程组入手。

在初等代数中，用加、减消元法求解一个二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

的具体步骤是：先从式(1.1)里消去 x_2 而求得 x_1，这只要将式(1.1)的第一、二两个式子分别乘以 a_{22} 与 a_{12}，然后再相加，就得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

同理，也可从式(1.1)里消去 x_1 而求得 x_2，这只要将式(1.1)的第一、二两个式子分别乘以 $-a_{21}$ 与 a_{11}，然后相加，得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

即

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{cases}$$

如果未知量 x_1、x_2 的系数 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，那么，这个线性方程组(1.1)有惟一解：

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

为了便于使用与记忆，我们引进二阶行列式的概念。

如果把线性方程组(1.1)中未知量 x_1、x_2 的系数按原来的位置写成二行二列的数表，并用两根竖线加以标出，那么，便得到一个二阶行列式，对此除引入字母 Δ 作为记号外，还规定：

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.2}$$

(1.2)式最右边的式子称为**二阶行列式 Δ 的展开式**。

于是，线性方程组(1.1)的解可以表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

若记 $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}$， $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2 a_{11} - b_1 a_{21}$

则线性方程组(1.1)的解可以简洁地表示为：

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \tag{1.3}$$

由此可见，二阶行列式的引入与二元一次方程组有关，它表示排成二行、二列的四个数在规定运算下得到的一个数值。

类似地，对于三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.4}$$

为了简单地表达它的解，我们引进三阶行列式的概念。三阶行列式就是排成三行、三列的九个数的一张数表，其展开式规定为

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

例 1.1 计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} -1 & 6 & 7 \\ 4 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -1 & 6 & 7 \\ 4 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1}(-1)\begin{vmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}6\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}7\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)(0\times 5 - 9\times 1) - 6(4\times 5 - 9\times 2) + 7(4\times 1 - 0\times 2) \\ &= 9 - 12 + 28 = 25 \end{aligned}$$

所以，三阶行列式也是在规定运算下的一个数值，它可转化为二阶行列式的计算得到。三阶行列式可以用来表达三元一次方程组(1.4)的解。如果方程组(1.4)系数行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

那么方程组有惟一解，其解同样简洁地表示为

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \tag{1.5}$$

其中

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

在方程组(1.4)的解的表达式(1.5)中，$x_i(i=1,2,3)$分母均是(1.4)的系数行列式Δ x_i的分子是将系数行列式Δ中的第i列换成方程组(1.4)中的常数项，其余列不动所得到的行列式，并简记为$\Delta_i(i=1,2,3)$。

例1.2 解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

解 方程组的系数行列式为

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$$

又计算得

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 5 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2 \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -23$$

所以方程组的解为

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{5}{11}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2}{11}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{23}{11}$$

显然，对于未知数个数等于方程个数的二、三元线性方程组，当它们的系数行列式不等于零时，利用行列式这一工具求解十分简便，结果也容易记忆。我们自然联想到，对于未知数个数等于方程个数的n元$(n>3)$线性方程组，是否也有类似的结果?这就需要引入n阶$(n>3)$行列式的定义。

1.1.2 *n* 阶行列式

在上面的讨论中，是将三阶行列式转化为二阶行列式来计算。下面，循此思路给出n阶行列式的递归法定义。

定义1.1 将n^2个数$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$排列成n行n列(横的称行，竖的称列)，并在左、右两边各加一竖线的算式，即

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n **阶行列式**,它代表一个由确定的运算关系所得到的数值。例如,当 $n=2$ 时

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

当 $n>2$ 时,定义为

$$D_n=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$$

其中数 a_{1j} 为第 1 行第 j 列的元素;

$$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$$

称为 a_{1j} 的**代数余子式**;M_{1j} 为由 D_n 划去第 1 行和第 j 列后余下元素构成的 $n-1$ 阶行列式。

从定义 1.1 可以知道一个 n 阶行列式代表一个数值,并且这个数值由第 1 行所有元素与其相应的代数余子式乘积之和而得到。我们常将此定义简称为 n 阶行列式按第 1 行展开。

对于一般场合下,M_{ij} 为由 D_n 划去第 i 行和第 j 列后余下元素构成的 $n-1$ 阶行列式,即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为元素 a_{ij} 的**余子式**;元素 a_{ij} 的**代数余子式为** $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$。

例如 四阶行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} 5 & -1 & 9 & 3 \\ 2 & 0 & 7 & -6 \\ 1 & -4 & -3 & 7 \\ 8 & 4 & -2 & -9 \end{vmatrix}$$

中,元素 a_{23} 的余子式即为划去第 2 行和第 3 列元素后的 3 阶行列式

$$M_{23}=\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 7 \\ 8 & 4 & -9 \end{vmatrix}$$

元素 a_{23} 的代数余子式为余子式 M_{23} 前再加一符号因子,即

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 7 \\ 8 & 4 & -9 \end{vmatrix}$$

例 1.3 计算三阶行列式

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -2 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

解 由定义

$$D_3 = 1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} + (-6)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + 2\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= 18 + 54 + 36 = 108$$

例 1.4 计算四阶行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 9 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 6 & 1 & 0 \\ 6 & 10 & -2 & -5 \end{vmatrix}$$

解 由定义

$$D_4 = 2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 10 & -2 & -5 \end{vmatrix} + (-4)(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 9 & -1 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= 2\times\left[(-1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} + 1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 10 & -2 \end{vmatrix}\right] +$$
$$4\times\left[9\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 10 & -2 \end{vmatrix} + (-1)\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}\right]$$
$$= 2\times[5-22] + 4[9\times(-22)-2] = -834$$

通过本例的计算,我们可以体会到第一行的零元素越多,则由定义按第一行展开时计算越简便。以后将会看到,一个行列式可以按任一行或任一列展开。

1.1.3 几种特殊的行列式

下面利用行列式的定义来计算几种特殊的 n 阶行列式。

1. 对角行列式

只有在对角线上有非零元素的行列式称为**对角行列式**。

例 1.5 证明对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \tag{1.6}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \tag{1.7}$$

其中第1个行列式主对角线上的元素是 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$,第2个行列式次对角线上的元素是 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$,其他元素都是0。

证 利用 n 阶行列式的定义逐次降阶展开第 1 个行列式得

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_1\lambda_2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} \lambda_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \cdots = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

对第 2 个行列式,注意到降阶展开时,元素 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 依次在第 $n,n-1,\cdots,2,1$ 列,故有

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \lambda_1(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_3 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_1(-1)^{1+n}\lambda_2(-1)^{1+n-1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_4 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = (-1)^{1+n}(-1)^{1+n-1}\cdots(-1)^{1+2}\times(-1)^{1+1}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$= (-1)^{n+\frac{n(n+1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

用同样方法可以将式(1.7)的结果加以类推。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1} \tag{1.8}$$

2.下(上)三角行列式

对角线以上(下)的元素都为 0 的行列式称为**下(上)三角行列式**。

例 1.6 试证下三角行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{1.9}$$

证 利用 n 阶行列式的定义,逐次降阶展开,故有

$$D_n = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = a_{11}(-1)^{1+1} \times a_{22}(-1)^{1+1}\cdots\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

3.一个重要的行列式公式

例 1.7 证明:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & c_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

证 对等式左边行列式按第 1 行展开,得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & c_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ c_{12} & b_{11} & b_{12} \\ c_{22} & c_{21} & b_{22} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & 0 & 0 \\ c_{11} & b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & c_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} - a_{12}a_{21}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

所以原式成立。

一般地,可以用数学归纳法证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1s} & b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{t1} & \cdots & c_{ts} & b_{t1} & \cdots & b_{tt} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{t1} & \cdots & b_{tt} \end{vmatrix} \tag{1.10}$$

公式(1.10)在行列式的计算与证明中经常使用。

习　题　1.1

1. 利用定义计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 9 & 7 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{vmatrix}$　(4) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

2. 利用3阶行列式解三元一次方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -10 \end{cases}$$

3. 写出下面行列式中元素 a_{23} 的余子式及代数余子式

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & -7 & 9 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 8 & -5 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

4. 写出下面行列式中元素 a_{43} 的余子式及代数余子式

$$\begin{vmatrix} c & a & -b & d \\ b & -a & 6 & c \\ a & 2 & -8 & b \\ d & -9 & -3 & 9 \end{vmatrix}$$

5. 利用定义计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{vmatrix}$

6. 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 0 & 0 \\ 7 & -4 & -5 & 6 \\ 6 & 8 & 7 & -8 \end{vmatrix}$

1.2　行列式的性质与计算

1.2.1　行列式的性质

从行列式的定义出发直接计算行列式是比较麻烦的。为了进一步讨论 n 阶行列式，简化 n 阶行列式的计算，下面介绍 n 阶行列式的一些基本性质。

将行列式 D 的行、列互换后，得到新的行列式 D^T，D^T 称为 D 的转置行列式。即，如果