高等学校试用教材

线性代数

蒋尔雄 高坤敏 吴景琨编

人民教育出版社

高等学校试用教材

线性代数

蒋尔雄　高坤敏　吴景琨　编

人民教育出版社

本书是根据在上海召开的高等学校理科教材坐谈会关于重视基础理论，注意系统性的精神为计算专业编写的．内容除线性代数的古典理论外，还有“数值代数”中常用的一些线性代数的基本概念、基本性质和基本理论，此外还有一章介绍多项式理论．

本书可作为计算专业线性代数课程的试用教材．

线性代数

蒋尔雄　高坤敏　吴景琨　编

人民教育出版社出版
新华书店上海发行所发行
上海商务印刷厂印装

开本 787×1092 1/32　印张 15 4/16　字数 367,000
1978年8月第1版　1979年1月第1次印刷
印数 1—180,000
书号 13012·0201　定价 1.10 元

前 言

线性代数在计算数学专业的大多数课程中都有广泛应用，而且是计算方法方面从事科学研究的重要基础，因此线性代数课程在计算数学专业中有重要地位. 为了给计算数学专业学生有比较广泛，深入的线性代数知识和训练，按照重视基础理论，注意系统性的精神，我们编写了这本教材.

本教材的内容，有在现代计算方法中比较有用的线性代数古典理论：如线性方程组，矩阵，线性空间和线性变换，内积空间和正交变换，二次型和对称阵，Jordan 标准形理论等等，也有"数值代数"中常用的一些线性代数的基本概念，基本性质和基本理论：如矩阵的三角分解，QR 分解，奇异值分解，特征值估计，对称矩阵特征值的极大极小原理，摄动理论初步，向量、矩阵范数，广义逆等等. 多项式的理论尽管不属线性代数，但它与线性代数关系十分密切，而且是线性代数必需的预备知识，也是计算数学中常用的工具，因此在教材中也有专门一章介绍，在有限元素法中有用的高维多项式性质也作了些介绍.

在每一章选取那些定理，本书从计算数学的需要考虑较多，有些比较专门的定理，考虑到在计算方法中有基本意义，也写进了教材，如多项式的根连续依赖于系数的定理，不可约矩阵特征值的圆盘定理，Wielandt-Hoffman 定理等. 古典的 Sturm 定理，因为现代求根的 Routh 方法和求对称矩阵特征值的 Givens 方法中都有应用，形式上改成更适用于现代需要，也写进了教材.

教材中有些定理的证明方法是编者给出的，如 Jordan 标准形

的有关定理.

全书共有十二章，其中第一、二、三、七、十、十一等六章是蒋尔雄同志编写的，第八、九等两章是高坤敏同志编写的，第四、五、六、十二等四章是吴景琨同志编写的，蒋尔雄同志对全书作了适当的修改，高坤敏同志誊写了全书并统一了全书的格式.

南京大学、兰州大学、南开大学、上海科技大学的有关同志审阅了本教材，并提供了宝贵的意见，在此表示十分感谢！复旦大学计算数学教研组有关同志也对本教材提供了宝贵意见，在此也表示感谢！

一方面由于时间较紧，另一方面由于编者水平较低，本书的错误、缺点在所难免，欢迎批评指正.

编　者

一九七八年六月十二日

目　　录

第一章　基本概念与和号 Σ

§1. 集　　合

数学中研究的对象，如代数中的数，几何中的点、直线等等统称为元素或简称为元. 若干个元素的集体称为集合或简称为集.

明确一个集合通常有两种办法. 一种是枚举法，即把一个集合的元素都提供出来，如1, 2, 3三个数所成的集，记为$\{1, 2, 3\}$；初等代数中$+$, $-$, $\times$, $\div$四个运算符所成的集$\{+, -, \times, \div\}$；又如自然数的全体所成的集$\{1, 2, 3, \cdots\}$，称为自然数集；所有整数全体$\{0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots\}$称为整数集；所有正偶数的全体$\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$等等. 另一种是概括法，即把这个集合的元素特征表示出来. 具有这种特征的元素在这个集合中，而不具有这种特征的元素就不在这个集合中. 如果这种特征可用一个关于元素x的命题$P(x)$来表示，当x具有这种特征时，命题$P(x)$为真，当x不具有这种特征时，命题$P(x)$为假，这个集合通常就表示为$\{x|P(x)\}$，意为所有使命题$P(x)$为真的元素x全体. 例如有理数全体所成的集，记为$\{x|x=p/q$, p是整数，q是正整数$\}$，这里命题$P(x)$就是"$x=p/q$, p是整数，q是正整数". $x=\frac{-1}{3}$使$P\left(\frac{-1}{3}\right)$为真，故$-\frac{1}{3}$是这个集合中的元素；$x=\sqrt{2}$使$P(\sqrt{2})$为假，故$\sqrt{2}$不是这个集合中的元素. 集$\{x|0\leqslant x\leqslant1\}$表示小于等于1，大于等于零的数的全体①. 实数的全体所成的集为$\{x|x=s.a_1a_2a_3\cdots$表示十进制数，s是整数，a_k是0, 1, 2, …, 9十个数码

① 我们把它记为$[0, 1]$，又记$(0, 1)=\{x|0<x<1\}$.

中的一个}，简称为实数集，记为 R. 复数的全体所成的集为 $\{x|x=a+ib,\ a,\ b$ 是实数，$i=\sqrt{-1}\}$，简称为复数集，记为 C. 又如过空间 A 点的直线全体所成的集为 $\{x|x$ 是一条直线，x 又通过 A 点$\}$.

以上列举的都是集合. 这些集合有如下特点：对于一个元素容易判断它是否在这个集合中. 例如我们可以判断 $\sqrt{2}$ 不在有理数集中，而在 R 中.

但是有些集合，我们不容易判断某一个元素是否属于它，甚至目前还无法判断. 例如所有使方程

$$x^n+y^n=z^n$$

有正整数解 $x,\ y,\ z$ 的自然数 n 所成的集记为 M，显然，1，2 是 M 中的元素，但 3^{10} 是否是 M 中的元素呢？524767 是否是 M 的元素呢？历史上有个名叫 Fermat 的数学家，曾猜测大于 2 的自然数都不是 M 中的元素. 但是这个猜测至今还未得到证明，不过 M 中的元素客观上是确定的.

一个元素 a 在集合 S 中，记为

$$a\in S$$

记号 $\in$ 表示"属于"的意思. $a\in S$ 读作 a 属于 S. 如果一个元素 a 不在集合 S 中，记为

$$a\overline{\in} S$$

记号 $\overline{\in}$ 表示"不属于"的意思. $a\overline{\in} S$ 读作 a 不属于 S. 例如 $\sqrt{2}\in R$，$\sqrt{2}\overline{\in}$ 有理数集.

通常一个集合总有若干个元素组成，为了方便起见，我们称没有元素的集合为空集. 例如，半径为 5 的圆周与半径为 4 的同心圆圆周的交点全体所成的集就是空集.

如果集合 N 中的所有元素都是集合 M 的元素，那么 N 称为 M 的子集. 记为

$$N \subseteq M \quad 或 \quad M \supseteq N$$

$\subseteq$ 表示"包含在"的意思，$\supseteq$ 表示"包含"的意思．如果 N 是 M 的子集，而 M 中确有元素不在 N 中，则 N 称为 M 的真子集，记为 $N \subset M$ 或 $M \supset N$．如图 1.1 所示．显然，

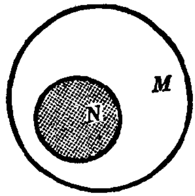

图 1.1

$$自然数集 \subset 整数集 \subset 有理数集 \subset 实数集 \subset 复数集$$

元素完全相同的集合作为同一个集合．例如所有二进制小数的全体与 R 是相同的．两个相同的集合 A 与 B，则记为 $A=B$．如果 $M \subseteq N$，又 $N \subseteq M$，则 $M=N$．

定义 设 A, B 是两个集，那么属于 A 同时又属于 B 的所有元素组成的集合 P，称为 A 与 B 的交集，记为

$$P = A \cap B$$

关于交集的概念，如图 1.2 所示．

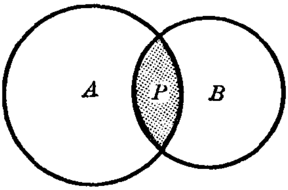

图 1.2

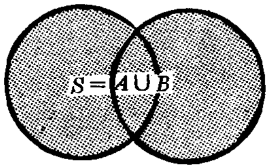

图 1.3

定义 设 A, B 是两个集，那么属于 A 或者属于 B 的所有元素组成的集合 S，称为 A 与 B 的并集，记为

$$S = A \cup B$$

关于并集的概念，如图 1.3 所示．

例 1 如果 $A \subseteq B$，那么 $A \cup B = B$．

证明 若元素 $a \in A \cup B$，则 $a \in A$ 或者 $a \in B$，因为 $A \subseteq B$，故不论那种情况，a 总是属于 B．所以 $A \cup B$ 的元素都是 B 的元素，即 $A \cup B \subseteq B$．反之，显然有 $B \subseteq A \cup B$，因此 $A \cup B = B$．

例 2 设 A, B, C 是三个集，证明

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$$

证明 若元素 $a\in A\cap(B\cap C)$，则 $a\in A$ 且 $a\in B\cap C$. 由后一个关系式知 $a\in B$ 且 $a\in C$，于是 $a\in A\cap B$，同时 $a\in C$，从而 $a\in(A\cap B)\cap C$，这就证明了

$$A\cap(B\cap C)\subseteq(A\cap B)\cap C$$

反之，同样可证

$$(A\cap B)\cap C\subseteq A\cap(B\cap C)$$

因此 $$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$$

例 3 由 a, b, c, d 四个元素构成集合 $\{a, b, c, d\}$，试列出它所有的子集构成的集合.

解 一个元素的子集有 $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$；两个元素的子集有 $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$；三个元素的子集有 $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$；四个元素的子集有 $\{a, b, c, d\}$.

上述 15 个集合构成的集合就是所求的集合. 注意，它的元素是集合.

§2. 映 照

设 M, N 是两个集，对于 M 中的每一个元 a，如果根据某种规则可以使它与 N 中的一个且只有一个元 $\sigma(a)$ 相对应，这种对应关系称为 M 到 N 的映照. $\sigma(a)$ 称为 a 的象，M 称为映照 σ 的定义域，集合 $N=\{x|x=\sigma(a), a\in M\}$ 称为值域，记为 $\sigma(M)$.

例 4 $M=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $N=\{\sqrt{2}, \pi, \lg 2, 3^{\sqrt{3}}\}$，定义 σ 如下：

$$\sigma(1)=3^{\sqrt{3}},\ \sigma(2)=\lg 2,\ \sigma(3)=\sqrt{2}$$
$$\sigma(4)=\pi, \sigma(5)=\sqrt{2}$$

这样的 σ 就是一个映照.

例 5 $M=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $N=\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$$\sigma(1)=2,\ \sigma(2)=3,\ \sigma(3)=1,\ \sigma(4)=5,\ \sigma(5)=4$$

例 6 $M=[0, 1]$, $N=$实数集 R. 对于 $x\in M$, $\sigma(x)=x^2$

以上都是映照的例子.

特别, 当值域在 R(实数集)中时, 映照就称为函数, 当值域在 C(复数集)中时, 就称为复函数.

在映照的定义中, 要求一个元对应一个象, 但并不要求不同的元对应不同的象, 也并不要求值域就是集合 N.

如果一个映照使 M 中不同的元对应 N 中不同的元, 则称为一一对应映照, 或简称为一一映照. 如果 σ 是 M 到 N 的一一映照, 那么值域 $\sigma(M)$ 中的任意一个元素 b, 一定可以在 M 中找到一个且只有一个元素 a, 使 $\sigma(a)=b$. 将 $\sigma(M)$ 中的 b 与这个 a 对应, 这样的映照称为 σ 的逆映照, 记为 σ^{-1}.

例 5 和例 6 都是一一映照, 所以可以建立逆映照, 对于例 6 来说, $\sigma(M)=[0, 1]$, 逆映照 $\sigma^{-1}(x)=\sqrt{x}$, 它将 $[0, 1]$ 映照到 $[0, 1]$. 例 4 中的 $\sigma(3)=\sqrt{2}$, $\sigma(5)=\sqrt{2}$, 所以不是一一映照.

设 σ 是 M 到 N 的映照, 如果它的值域 $\sigma(M)=N$, 则 σ 称为全射映照. 意为 N 中的每一个元素都映照到. 这种情况又称 σ 将 M 映照到 N 上, 因此也称到上映照. 例 4, 例 5 都是到上映照, 例 6 的值域只是 N 的一部分, 故不是到上映照. 如果一个映照既是一一映照, 又是到上映照, 则称为一一到上映照, 或一一全射映照. 如例 5 的映照就是一一到上映照, 例 4 和例 6 的映照都不是一一到上映照. 易知 M 到 N 的一一到上映照 σ 的逆映照 σ^{-1} 是 N 到 M 的一一到上映照.

如果集合中所含的元素个数是有限的, 则称为有限集; 否则, 称

为无限集．一个无限集 M 如果可以与自然数集 $N=\{1, 2, 3, \cdots\}$ 建立起一一到上映照，则称 M 是可列集或可数集．例如，考虑所有偶数所成的集 $M=\{2, 4, 6, \cdots\}$，它与自然数集 N 可以建立起映照：M 中的 $2n$ 与 N 中的 n 对应．显然它是一一到上映照，因此 M 是可列集．偶数集 M 是自然数集的一部分，由此可知，对于无限集来说，一个集可以与它的真子集建立起一一对应的关系，这也是有限与无限的一个差别．

定理 1 正有理数全体的集合 S 是可列的．

证明 S 是所有分数 p/q 的全体，p, q 是正整数．考虑下面阵列：

$$
\begin{tikzcd}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \cdots \\
\frac{1}{2} \arrow[ur] & \frac{2}{2} \arrow[ur] & \frac{3}{2} \arrow[ur] & \frac{4}{2} & \cdots \\
\frac{1}{3} \arrow[ur] & \frac{2}{3} \arrow[ur] & \frac{3}{3} \arrow[ur] & \frac{4}{3} & \cdots \\
\frac{1}{4} \arrow[ur] & \frac{2}{4} \arrow[ur] & \frac{3}{4} \arrow[ur] & \frac{4}{4} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}
$$

每一个 p/q 都可以在这个阵列中找位置，因此 S 的所有元素都含在这个阵列中．当然阵列中元素的个数比 S 要多，例如 S 中只有一个 1，而阵列中有 1/1, 2/2, 3/3, $\cdots$．按照分子加分母的和数，小的在前，大的在后，相同和数的又以分子小的在前，分子大的在后，重新排列．按照这个排列次序将上述阵列与自然数集建立起对应，即

$$\frac{1}{1}\to 1$$

$$\frac{1}{2}\to 2,\quad \frac{2}{1}\to 3$$

$$\frac{1}{3}\to 4,\quad \frac{2}{2}\to 5,\quad \frac{3}{1}\to 6$$

$$\frac{1}{4}\to 7,\quad \frac{2}{3}\to 8,\quad \frac{3}{2}\to 9,\quad \frac{4}{1}\to 10$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

这样的对应显然是可逆的，因此阵列的元素是可列的，从而 S 也是可列的. 证毕

是否所有的无限集都是可列的?下面的定理回答了这个问题.

定理 2 [0, 1] 中的实数是不可列的.

证明 [0, 1] 中的实数可以用无穷位十进制小数表示，即对于 $\alpha\in[0, 1]$，有

$$\alpha=0.a_1a_2a_3\cdots$$

其中 a_i 是 0, 1, 2, …, 9 十个数码中的一个. 我们规定：如果从某一个 a_i 开始，a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, … 都是 9, 则在 a_{i-1} 处加 1，且将 a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, … 都改为零. 这样规定后，则 [0, 1] 中的数就能用十进制小数唯一表示. 现在用反证法证明这种十进制数是不可列的.

假设 [0, 1] 中的数可列，将它们排列成

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n,\ \cdots$$

即 $\alpha_n\in[0, 1]$ 与自然数集中的 n 对应，如果

$$\alpha_k=0.a_1^{(k)}a_2^{(k)}a_3^{(k)}\cdots$$

构造一个数

$$\beta=0.b_1b_2b_3\cdots$$

其中

$$b_k=\begin{cases}5 & a_k^{(k)}\neq 5\\ 6 & a_k^{(k)}=5\end{cases}$$

显然，$\beta\in[0,1]$，但 $\beta\neq\alpha_k$(对一切 k)，因为至少有一位不相同. 这说明 β 不在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\cdots$ 中，这与 $[0,1]$ 可列相矛盾，故 $[0,1]$ 是不可列的.　　证毕

§3. 二元关系和代数运算

1. 对于集合 M, 任意的 $a,b\in M$, 所有有顺序的数对 (a,b) 的全体组成的集合称为 M 的乘积集，记为 $M\times M$, 即

$$M\times M=\{(a,b)\mid a\in M,\ b\in M\}$$

例如 $M=\{1,2,3\}$, 则

$$M\times M=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),\\(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

对于 $M\times M$ 中的元素 (a,b), 如果 a 与 b 具有某种关系 R, 则记为 $R(a,b)$ 或者 aRb. 这种 M 上二个元素之间的关系称为二元关系. 所有使 aRb 成立的 (a,b) 构成 $M\times M$ 的一个子集.

例如 $M=\{1,2,3\}$, 关系 R 是大于关系"$>$". 于是使关系 R 成立的 $M\times M$ 的元素只有三个: $(2,1)$, $(3,1)$, $(3,2)$, $\{(2,1),(3,1),(3,2)\}$ 构成 $M\times M$ 的子集. 所以二元关系构成 $M\times M$ 中的某种子集; 反过来 $M\times M$ 一个子集，可以看作由某种二元关系所确定. 而 $M\times M$ 中有很多不同的子集，因此二元关系也有很多.

M 上的二元关系 R, 如果具有下列三个性质:

(1) 自反性. 对所有 $a\in M$, 有 aRa;

(2) 传递性. 若 aRb, bRc, 则 aRc;

(3) 对称性. 若 aRb, 则 bRa,

则称为是一种等价关系.

例如 M 是平面上所有三角形的全体，考虑关系 R 为几何上的相似关系"$\backsim$"，则它就是一种等价关系. 事实上，一个三角形 a，它和自己当然是相似的 $a\backsim a$，故有自反性. 对于三角形 a, b, c，若 $a\backsim b$, $b\backsim c$，必然有 $a\backsim c$，故有传递性. 两个三角形 a 和 b，若 $a\backsim b$，必定也有 $b\backsim a$，故有对称性.

两个三角形之间的"全等关系"是一种等价关系，又如两个三角形之间的"面积相等关系"也是一种等价关系，可见等价关系是很多的.

但是，并不是所有的关系都是等价关系. 例如前面讲的 $M=\{1, 2, 3\}$ 中的"大于关系"就不是等价关系. 因为对 $a\in M$，关系 $a>a$ 是不成立的，故没有自反性.

现在考虑 M 上的等价类的概念.

如果 R 是 M 上的一个等价关系，对于 $a\in M$，所有使 aRx 成立的元素 x 的全体，称为元素 a 的等价类，记为 R_a. 显然，a 的等价类至少有一个元素 a，所以它是 M 的非空子集.

如果 a, $b\in M$, R_a 与 R_b 作为 M 的子集是不相同的，则称 R_a 与 R_b 是不相同的.

定理 3 不相同的等价类 R_a 与 R_b 是不相交的.

证明 如果有 $d\in M$，而且 $d\in R_a\cap R_b$，则

$$aRd,\ bRd$$

根据 R 的对称性有

$$dRb$$

根据 R 的传递性有

$$aRb$$

再根据 R 的对称性有

$$bRa$$

设 s 是 R_a 中的任意一个元素，则