Bert mendelson 著
陈 明 蔚 译
麦 雨 农 校

拓扑学引论

TUOPUXUE YINLUN

广西人民出版社

拓扑学引论

Bert Mendelson 著

陈明蔚 译

麦雨农 校

广西人民出版社

广西人民出版社出版
（南宁市河堤路14号）
广西新华书店发行　　广西民族印刷厂印刷
*
开本850×1168　1/32　印张5.375　154千字
1983年11月第1版　　1983年11月第1次印刷
印数1　49500册
书号　7113·448　　定价　0.73元

译者的话

拓扑学是一门重要学科，是现代数学的主要支柱之一。目前，国内高等院校数学系已经陆续开设《拓扑学》课程。而在国外，中学也在讲授拓扑学的部分内容了。但是，国内编写或翻译的拓扑学教科书都很少。〔美〕Bert Mendelson编著的《Introduction to Topology》原是美国一些大学的教本，后来英国一些大学也采用。现将此书译出，以满足当前教学的需要。

本书主要介绍拓扑学的基本原理，内容深入浅出，所选例子富有启发性，每节都有相当份量的习题，宜于初学者练习。正如英国版的序言所指出的，不论在中学、大学或科学研究机构的水平上，它都可以成为一本理想的入门书。本书可作为大专院校拓扑学初步课程的教科书或教学参考书，也可作为中学数学教师以及学过一元函数微分学的学生、知识青年、青年工人的学习参考书。

在翻译过程中，阎金童、林士敏二同志曾参加讨论，提出了许多宝贵意见，又请麦雨农教授审校，特致谢意。

译者水平所限，虽经努力，错误仍恐难免，敬希读者批评赐教。

序　言

拓扑和代数是现代数学的两个主要支柱。掌握了这两门学科的基本原理，就会发现贯通数学全局的简明性和紧凑性。基本原理比技巧细节实在更为重要。因此，本书的意图是“从零开始”，循序渐进地给读者介绍拓扑学的基本原理。

拓扑学是连续性的研究。它是数学和科学中用到连续性的每一门学科的理论基础，特别是微积分学的理论基础。因而它的讲授，理应先于微积分。初学微积分时不能理解它的学生比之囫囵吞枣地接受它的学生，常常会成为较好的数学家。微积分的极限过程是一种奇巧的技术过程，它易于把一股诡诈的味道加于早已惯于算术、代数和几何的明确性的学生，这是很不幸的，因为理解上的模糊会产生对数学的畏惧，那样的学生必须给他这本书。如果他成熟到可以开始学习微积分学，那么他就能理解拓扑学。掌握了作为微积分学的理论基础的拓扑学原理，他就会感到微积分学也象算术、代数、几何那样明确可靠。

十年前，在英国的大学里，如果讲授拓扑学，那也只在三年级讲授。但是，今天由于认识了这门学科的逻辑地位，大多数大学都在一年级介绍拓扑学的基本原理，本书正好包含了一年级的内容。估计约十年之后，这些内容将可顺利地在中学讲授。

跟以往的拓扑学入门书相比较，本书有两个突出的特点：首先，它是以几何的观点来写的，有大量的图解，从而鼓励读者作图并且几何地思考。这是重要的，因为几何思维的习惯，今天还影响着最抽象的数学学科。此外，在高维里，数学上最有几何性

的课题不是高维几何学而是代数拓扑学——那是本书的续编。

其次，本书包含的仅仅是所有基本材料，有增补的余地，有充分的练习和例子，这就使得它可以在任何水平上——中学、大学或科学研究所成为一本理想的入门书。

第一章是集合论的一般论述，同时引进了由集合和函数组成的一种图示法。等价关系的概念和可数性的概念分别留到第四章和第五章叙述，在那里它们与其它课题一起自然出现。

第二章是关于度量空间的讨论，在那里仔细地介绍了开集、邻域等拓扑概念。对于可在n维欧几里得空间上定义且导致通常拓扑的种种距离函数，给予特别注意。

在第三章中，拓扑空间作为度量空间的推广被引入。对于用邻域等等来构造拓扑空间的各种可能途径，给予了充分的关注，希望这个看来平凡但却微妙的要点能够被阐明。由于拓扑空间是度量空间的推广，所以在这两个课题的论述中，希望读者注意其间类似的或许是累赘的地方。

第四章和第五章专门论述两个最重要的拓扑性质——连通性和紧致性。作为应用，给读者介绍一点代数拓扑，在第四章，为了阐明单连通性，描述了同伦的概念和基本群的概念，但是回避了群结构，因为著者假定读者完全不懂得群论。第五章以二维闭曲面的讨论来结束。

E·C·Zeeman博士1963．5．

目　录

序　言

第一章　集合理论

§ 1　引言……………………………………………（1）
§ 2　集合和子集……………………………………（4）
§ 3　集合的运算：并、交、余……………………（6）
§ 4　集合的加标族…………………………………（9）
§ 5　集合的积………………………………………（11）
§ 6　函数……………………………………………（13）
§ 7　函数的复合和图示法…………………………（17）
§ 8　逆函数…………………………………………（22）
§ 9　函数的限制和扩张……………………………（25）

第二章　度量空间

§ 1　引言……………………………………………（28）
§ 2　度量空间………………………………………（28）
§ 3　连续性…………………………………………（34）
§ 4　开球和邻域……………………………………（39）
§ 5　开集……………………………………………（45）
§ 6　极限点…………………………………………（49）
§ 7　闭集……………………………………………（52）
§ 8　积………………………………………………（56）

§ 9　子空间……………………………………………………（62）
§ 10　度量空间的等价性……………………………………（66）

第三章　拓扑空间

§ 1　引言……………………………………………………（73）
§ 2　拓扑空间……………………………………………（74）
§ 3　邻域和邻域空间……………………………………（78）
§ 4　闭包、内部、边界…………………………………（84）
§ 5　函数、连续性、同胚………………………………（90）
§ 6　子空间………………………………………………（95）
§ 7　积……………………………………………………（98）

第四章　连通性

§ 1　引言……………………………………………………（102）
§ 2　连通性………………………………………………（102）
§ 3　实直线上的连通性…………………………………（107）
§ 4　连通性的某些应用…………………………………（110）
§ 5　（连通）分支和局部连通性………………………（118）
§ 6　弧连通的拓扑空间…………………………………（121）
§ 7　同伦道路……………………………………………（126）
§ 8　单连通性……………………………………………（133）

第五章　紧致性

§ 1　引言……………………………………………………（141）
§ 2　紧致拓扑空间………………………………………（142）
§ 3　实直线的紧致子集…………………………………（149）
§ 4　紧致空间的积………………………………………（153）
§ 5　紧致度量空间………………………………………（157）

§ 6　紧致性和Bolzano-Weierstrass性质…………………（163）
§ 7　粘合拓扑和粘合空间……………………………（169）

参考书目录……………………………………………（184）
特殊符号 ……………………………………………（185）
索引 …………………………………………………（189）

第一章

集合理论

§1 引言

象现代任何其它的数学分支一样，拓扑学的研究对象是具有某种数学结构的事物集合。这一说法不应该解释为企图定义数学，因为“数学结构”本身是一个不确切的术语。然而，我们可以用两个重要的例子来说明这一点。

正整数或自然数的全体是一个集合N，其中定义了一个函数S，称为后继函数，满足下列条件：

1. 对于N中每一个事物x，即正整数x，有一个且仅有一个N中的事物y，使得$y=S(x)$；

2. 如果x和y是N中的事物，并且$S(x)=S(y)$，那么$x=y$；

3. 在N中有一个且仅有一个事物，用1表示，它不是N中任何一个事物的后继者，即对于在N中的每一个x，都有$1\neq S(x)$；

4. 在N中取定这样的一个部分T，使得1在T中，且对于T中的每一个x，$S(x)$也在T中，那么$T=N$。

上面列举的四个条件称为自然数的Peano公理。第四个条件称为数学归纳法原理。我们用这样的方法定义自然数的加法：对于N中的每一个x，$S(x)=x+1$。这说明了“后继函数S”中的“后

继"一词的用法。值得注意的是，自然数的概念是作为附有一个数学结构，即函数S，的某一个集合N而出现的。

我们将用实数系作为第二个实例，此例也说明人们在数学上研究的典型对象是附有一定的数学结构的集合这个事实。这个说明需要几个预备定义。

可换域是一个集合F，加上这样的两个函数：对于F中的每一对事物a，b，有F中的一个事物$a+b$与之对应，称为它们的和；又有F中的一个事物$a \cdot b$与之对应，称为它们的积，且满足下列条件：

1. 对于F中的每一对事物a，b，都有$a+b=b+a$；

2. 对于F中的每一组事物a，b，c，都有
$a+(b+c)=(a+b)+c$；

3. F中有唯一的、用0表示的一个事物，使得对于F中的每一个a都有$a+0=0+a=a$；

4. 对于F中的每一个a，有F中的唯一的事物a'使得$a+a'=a'+a=0$；

5. 对于F中的每一对a，b，都有$a \cdot b=b \cdot a$；

6. 对于F中的每一组a，b，c，都有
$a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$；

7. F中有唯一的、异于0的事物，用1表示，对于F中的每一个a，都有$a \cdot 1=1 \cdot a=a$；

8. 对于F中的每一个a，如果a异于0，那么在F中有唯一的事物a^*，使得$a \cdot a^*=a^* \cdot a=1$；

9. 对于F中的每一组a，b，c，都有
$a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$。

因此，可换域F是一个这样的集合，它有类似于实数的加法和乘法。

一个域叫做线性有序的，如果它还添上这样的结构：即关系

“$<$”，它满足实数系所用的“小于”的那些性质。确切地说，一个域F叫做线性有序的，如果在F的任何一对事物之间有满足下列条件的关系“$<$”：

1. 对于F中的每一对事物x，y，或者$x<y$，或者$x=y$，或者$y<x$，三者之中必有一个且仅有一个成立；

2. 若$x<y$，对于F中的每一个事物z，都有

   $x+z<y+z$；

3. 若$x<y$，对于F中的每一个$0<z$的事物z，都有

   $x\cdot z<y\cdot z$。

设T是线性有序域F的一个部分。F中的一个事物b称为T的上界，如果对于T中的每一个x，都有$x<b$或$x=b$。F中的一个事物a称为T的最小上界，如果a是T的一上界，且$a<b$，其中b是T的其它任一个上界。

线性有序域F称为完备的，如果F的每一个有上界的非空部分T都有最小上界。这是作为描述实数系之前的最后一个定义。现在我们可以这样说：实数系是具有加法运算、乘法运算和“$<$”关系的一个集合R，这个集合R连同这个结构是完备的、线性有序的可换域。

这样，我们看到了一些著名的数学研究对象可以看作是：一些事物的集合加上某些规定的结构。我们也要用同样的术语来讲述拓扑空间，虽然对这个概念的好处的评价只能留到后面。拓扑空间是事物（这些事物通常叫做点）的集合加上一个结构，这一结构给予这些点以某种粘连性，意即我们可以谈论附近的点，也就是在某种意义上靠近在一起的点。这一结构可以用叫做开集的概念来描述。正如我们将要看到的，拓扑空间的主要用途在于给我们提供了一个恰当的、非常一般的、包括连续性概念在内的研究基础。

到现在为止，已经阐明的要点是：拓扑学同数学的其它分支

一样，是关于具有某一规定结构的集合的研究。因此，我们首先研究集合的理论，由此开始拓扑学的研究。集合，也常常简称为集。

§2 集合和子集

我们假定“事物”、“集合”或“集”这些名词以及“是……的成员”（或“是……的元素”）这个关系是熟知的概念。我们将在同这些词组的通常用法相一致的意义上使用这些概念。

如果事物A属于集合S，我们就记为$A \in S$（读作“A在S中”）。如果事物A不属于集合S，我们将记为$A \notin S$（读作“A不在S中”）。如果$A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$是事物，那么，正好由这些事物组成的集合就记为

$$\{A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n\}。$$

为了逻辑上的精确，常常必须把恰好由一个事物A组成的集合$\{A\}$与事物A本身区别开来。因此，

$$A \in \{A\}$$

是一个正确的命题，而

$$A = \{A\}$$

是一个错误的命题；同时，一个成员也没有的集合，即所谓空集，也是必须的。这个集合的符号是$\varnothing$（一个瑞典字母）。

设A和B是集合。如果对于每一个$x \in A$都有$x \in B$，我们就说A是B的子集。这时候，我们也说A包含于B，记为

$$A \subset B,$$

或者说B包含A，记为

$$B \supset A。$$

根据子集的定义，集合A总是它自己的子集。而且，空集也是A的子集。A的这两个子集，A和$\varnothing$叫做假子集，而其它的任何

子集叫做真子集。

在微积分中经常用到实数的一些子集：对于每一对实数a, b，其中$a<b$，满足$a \leqslant x \leqslant b$的所有实数$x$的集合，叫做从$a$到$b$的闭区间，用$[a, b]$表示。类似地，满足$a<x<b$的所有实数$x$的集合叫做从$a$到$b$的开区间，用$(a, b)$表示。因此我们有

$$(a, b) \subset [a, b] \subset R,$$

其中R是实数集。

两个集合说是等同的，如果它们正好有相同的成员。因此，如果A和B是集合，则$A=B$当且仅当*$A \subset B$且$B \subset A$。这一事实经常用来证明两个集合的相等关系。

集合自身可以是属于其它集合的事物，例如，

$$\{\{1,3,5,7\}, \{2,4,6\}\}$$

是一集合，它包含两个事物，这两个事物是小于8的奇数集合和小于8的偶数集合。如果A是任一个集合，那么，由A的子集所组成的集合是有意义的。特别是，对于每一个集合A，有一个集合，它的成员是A的各个子集，这个集合用2^A表示。于是，对于每一个集合A，我们有：$B \in 2^A$，当且仅当$B \subset A$。

练　　习

1. 确定下列命题是对的还是错的：

(a) 对于每一个集合A，都有$\varnothing \in A$；

(b) 对于每一个集合A，都有$\varnothing \subset A$；

(c) 对于每一个集合A，都有$A \subset A$；

(d) 对于每一个集合A，都有$A \in \{A\}$；

(e) 对于每一个集合A，都有$A \in 2^A$；

---

* 复合命题"P当且仅当Q"就是"如果有P则有Q"和"如果有Q则有P"这两个命题的合并。形如"P当且仅当Q"的命题也可以说成"如果有P则有Q；反之亦然"。

(f) 对于每一个集合A，都有$A \subset 2^A$；

(g) 对于每一个集合A，都有$\{A\} \subset 2^A$；

(h) $\varnothing \in \{\varnothing\}$；

(i) 对于每一个集合A，都有$\varnothing \in 2^A$；

(j) 对于每一个集合A，都有$\varnothing \subset 2^A$；

(k) 集合$\{\varnothing\}$没有成员；

(l) 设A和B是集合，如果$A \subset B$，则$2^A \subset 2^B$；

(m) 有两个不同的对象属于集合$\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$。

2. 设A，B，C是集合，证明：如果$A \subset B$且$B \subset C$，则$A \subset C$。

3. 设A_1，A_2，……，A_n是集合，证明：如果$A_1 \subset A_2$，$A_2 \subset A_3$，……，$A_{n-1} \subset A_n$且$A_n \subset A_1$，那么$A_1 = A_2 = \cdots\cdots = A_n$。

4. 设A是有n个不同事物的集合，证明：有2^n个不同事物属于2^A。

§3 集合的运算：并、交、余

如果x是一个事物，A是一个集合，且$x \in A$，那么我们说x是A的一个元素，或成员，或点。设A和B是集合，集合A和B的**交集**是一个集合，其成员是使得$x \in A$且$x \in B$的那些事物x；A和B的**交集**用

$$A \cap B$$

表示（读作“A交B”）。集合A和B的**并集**是一个集合，其成员x是至少属于两个集合A、B之一的那些x，即*$x \in A$或$x \in B$；A和B的**并集**用

$$A \cup B$$

表示（读作“A并B”）。

---

* 逻辑连接词“或”在数学上（也在逻辑学上）是在包括意义上使用的。因此，复合命题“P或Q”在下列三种情形中的每一种情形下都是真确的：(1)P真，Q不真；(2)P不真，Q真；(3)P真，Q真；而只有P和Q皆不真的时候“P或Q”才不真。

集合的“并”和“交”的运算可以直观地用温恩图（Venn-diagrams)表示。

在图1中，设集合A的元素是从左下方到右上方的斜线所荫蔽的区域中的点，而集合B的元素则是相反方向的斜线所荫蔽的区域中的点，那么，$A\cup B$的元素是荫蔽区域中的点，而$A\cap B$的元素是交叉斜线所遮盖着的区域中的点。

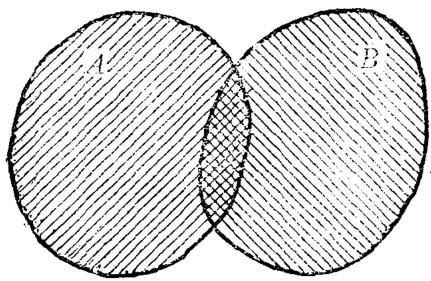

图 1

设$A\subset S$，A在S中的余集是其元素属于S但不属于A的集合。A在S中的余集用$C_S(A)$或$S-A$表示。集合S在同一个问题的整个讨论过程中可以是固定不变的，在这种情形下，A在S中的余集可以简称为A的余集，并用$C(A)$表示。$C(A)$又是S的子集，我们又可以取它的余集，A的余集的余集就是A，即$C(C(A))=A$。

有许多关于集合的交、并、余运算的公式，常用的是下面两个公式。

定理(De Morgan定律) 设$A\subset S$，$B\subset S$，那么

(3.1) $$C(A\cup B)=C(A)\cap C(B),$$

(3.2) $$C(A\cap B)=C(A)\cup C(B)。$$

证：假设$x\in C(A\cup B)$，那么$x\in S$，$x\notin A\cup B$，于是$x\notin A$且$x\notin B$，即$x\in C(A)$且$x\in C(B)$。因此$x\in C(A)\cap C(B)$，从而

$$C(A\cup B)\subset C(A)\cap C(B)。$$

反之，假设$x\in C(A)\cap C(B)$，那么$x\in S$，$x\in C(A)$且$x\in C(B)$。

于是$x\notin A$且$x\notin B$。

所以$x\notin A\cup B$，从而$x\in C(A\cup B)$，因此

$$C(A)\cap C(B)\subset C(A\cup B)。$$

这样，我们就证明了

$$C(A)\cap C(B)=C(A\cup B)。$$

我们可以基本上用证明(3.1)的方法来证明(3.2)。但是，如果我们将(3.1)用于S的两个子集C(A)和C(B)，那就可以得到一个比较简短的证明：

$$C(C(A)\cup C(B))=C(C(A))\cap C(C(B))=A\cap B。$$

再取余集，我们就得到

$$C(A)\cup C(B)=C(C(C(A)\cup C(B)))=C(A\cap B)。$$

练　　习

1. 设$A\subset S$，$B\subset S$，证明下列关系式：

(a) $\varnothing=C(S)$；　　(f) $A\cup A=A$；

(b) $S=C(\varnothing)$；　　(g) $A\cup S=S$；

(c) $A\cap C(A)=\varnothing$；　　(h) $A\cap S=A$；

(d) $A\cup C(A)=S$；　　(i) $A\cup\varnothing=A$；

(e) $A\cap A=A$；　　(j) $A\cap\varnothing=\varnothing$；

(k) $A\subset B$，当且仅当$A\cup B=B$；

(l) $A\subset B$，当且仅当$A\cap B=A$；

(m) $A\cup B=B$，当且仅当$A\cap B=A$；

(n) $A\subset C(B)$，当且仅当$A\cap B=\varnothing$；

(o) $C(A)\subset B$，当且仅当$A\cup B=S$；

(p) $A\subset B$，当且仅当$C(B)\subset C(A)$；

(q) $A\subset C(B)$，当且仅当$B\subset C(A)$。

2. 设$X\subset Y\subset Z$，证明下列关系：

(a) $C_Y(X)\subset C_Z(X)$；

(b) $Z-(Y-X)=X\cup(Z-Y)$。