高等学校教材

常微分方程教程

丁同仁 李承治 编

高等教育出版社

高等学校教材

常微分方程教程

丁同仁　李承治　编

高等教育出版社

全书分为十一章，各章内容分别是：基本概念；初等积分法；存在和唯一性定理；奇解；高阶微分方程；线性微分方程组；微分方程的幂级数解法；定性理论与分支理论初步；边值问题；首次积分；一阶偏微分方程. 在各章节之后都配备一定数量的习题.

本书可作为高等学校数学专业常微分方程课程的教材. 对于其他希望了解常微分方程这门学科面貌的读者，它也可供作一本入门的书.

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程教程/丁同仁，李承治. —北京：高等教育出版社，2002 重印

ISBN 7-04-003162-0

Ⅰ.常… Ⅱ.①丁… ②李… Ⅲ.常微分方程-高等学校-教材 Ⅳ.O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 29138 号

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	邮政编码	100009
电　　话	010—64054588	传　　真	010—64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	国防工业出版社印刷厂		
开　　本	850×1168　1/32	版　　次	1991 年 4 月第 1 版
印　　张	12.375	印　　次	2002 年 1 月第 8 次印刷
字　　数	310 000	定　　价	12.00 元

谨以此书纪念我国微分方程界的先辈
申又枨教授的九十诞辰，以及他对数学的贡献.

申又枨教授（1901—1978）

序　言

常微分方程已有悠久的历史，而且继续保持着进一步发展的活力，其主要原因是它的根源深扎在各种实际问题之中.

牛顿最早采用数学方法研究二体问题，其中需要求解的运动方程是常微分方程. 他以非凡的积分技巧解决了它，从而在理论上证实了地球绕太阳的运动轨道是一个椭圆，澄清了当时关于地球将坠毁于太阳的一种悲观论点. 另外，莱布尼兹也经常与牛顿在通信中互相提出求解微分方程的挑战.

嗣后，许多著名数学家，例如伯努里(家族)，欧拉，高斯，拉格朗日和拉普拉斯等，都遵循历史传统，把数学研究结合于当时许多重大的实际力学问题，在这些问题中通常离不开常微分方程的求解法. 海王星的发现是通过对常微分方程的近似计算得到的，这曾是历史上的一段佳话. 十九世纪在天体力学上的主要成就应归功于拉格朗日对线性常微分方程的工作.

在上世纪早期，柯西给微积分学注入了严格性的要素，同时他也为微分方程的理论奠定了一个基石——解的存在性和唯一性定理. 到上世纪末期，庞卡莱和李雅普诺夫分别创立了常微分方程的定性理论和稳定性理论，这些工作代表了当时非线性力学的最新方法. 本世纪初，伯克霍夫继承并发展了庞卡莱在天体力学中的分析方法，创立了拓扑动力系统和各态历经的理论，把常微分方程的研究提高到新的水平.

自本世纪二十年代(特别是第二次世界大战)以来，在众多应用数学家的共同努力下，常微分方程的应用范围不断扩大并深入到机械，电讯，化工，生物，经济和其它社会学科的各个领域，各种成功的实例是不胜枚举的. 自六十年代以后，常微分方程定性理

论发展到现代微分动力系统的理论，对研究一些奇异的非线性现象作出了贡献，构成现代大范围分析学中出色的篇章．另外，现代的（最优）控制理论，微分对策论，以及泛函微分方程理论的基本思想，都起源于常微分方程，而且在方法上也与后者有密切的关系．

自然，在一本基础课教程中，我们不能详细介绍上面谈到的每个方面，而只能主要介绍常微分方程的一些常用解法和基本定理．这些内容将为数学，力学和物理系（科）的大学生在后继学习中服务，尽管在体系上缺少完美性，然而它们对于数学联系实际和各种数学方法的灵活运用是不可缺少的基本训练．无疑，这正是常微分方程课程的一个特色．

在每一章的标题下面，我们对全章的主题和某些背景都作了概括的介绍．下面，仅就编写本教程中的一些考虑作一简要说明．

在第一章（基本概念）中，只介绍了微分方程及其解的定义和几何解释，以便尽快进入主题；而把从实际问题引导出微分方程的例子分放到后面的章节，这就可以在导出微分方程之后立即进行求解和对结果的分析．

在介绍初等积分法的第二章中，以恰当方程和积分因子为主线贯穿各种求解法．对于不能容纳于这条线索之内的常数变易法，先在本章中以习题的方式出现，而把一般的讨论留待第六章（线性方程组）中进行．

微分方程最重要的理论基础是解的存在性、唯一性定理，和解对初值（及参数）的连续性、可微性定理．我们把这两部分内容分别放在第三章和第五章中，以分散难点．第五章的讨论，是在高阶微分方程（方程组）的框架中进行的．

对奇解在理论上的阐述，有赖于解的存在和唯一性定理．因此，我们把一阶隐式微分方程的解法和奇解理论作为第四章，安排在存在定理之后．鉴于首次积分具有明显的物理和几何意义，它不仅是求解微分方程的一个手段，而且也是一般微分方程的理论基础，所以我们也把它单独设章，放在一阶偏微分方程之前．

第六章线性微分方程组(和高阶线性微分方程式)是本课程的重点之一. 我们在编写中力求兼顾理论上的严密性和具体解法上的实用性,并采用了向量、矩阵和矩阵指数函数等工具.

第七章涉及古典解析理论中一些常见的内容. 而第八章比较简要地介绍了现代定性理论中的基本思想和方法. 这些内容有利于培养学生对一般微分方程进行分析的能力.

另外,根据我们的教学经验,有不少精力充沛的学生常常不满足于课堂讲授的内容,而另找合适的课外读物又不容易. 为了使这部分学生能顺手得到自学的材料,本书专门在某些节目上增添了适当的内容和难度,并以 * 号标明,例如: 皮亚诺存在定理,微分方程比较定理,奇解存在定理,解析解存在定理,算子法,拉普拉斯变换法,结构稳定与分支现象,非线性边值问题与周期边值问题,大范围的首次积分等. 对于一般读者,可以根据自己的需要和兴趣,部分或全部跳过上述内容也不会影响对本书主体的学习.

除了个别几节外,我们在本书的每节之后都安排了习题,并在书末对计算题给出了参考答案,对大部分证明题给出了提示.

参加 1989 年微分方程教材编审组会议的同志,特别是本书的主审人金福临教授和吴克乾教授,对本书的初稿提出了很多宝贵的意见;我们的同事黄文灶教授和董镇喜教授等也多年从事这个课程的教学工作,为本书提供了他们的经验;柳彬同志为本书的习题做了题解;王鹏远同志也对本书的编写提出过富有启发的建议;高等教育出版社的有关同志为本书的编辑出版给予了大力的支持;本书采用北京大学计算机科学技术研究所研制的华光Ⅳ型系统进行排版,这个研究所和北京大学新技术公司的有关同志为此给予了热情的帮助. 在此,我们对所有上述同志一并表示衷心的感谢. 同时,也恳切地希望和欢迎读者对本书提出批评与建议.

编　者

1990 年 1 月于北京大学数学系

目　录

第一章　基本概念

由牛顿(Newton, 1642－1727)和莱不尼兹(Leibniz, 1646－1716)所创立的微积分，是人类科学史上划时代的重大发现. 而微积分的产生与发展，和人们求解微分方程的需要有密切关系. 所谓微分方程，就是联系着自变量，未知函数，以及未知函数的导数的方程. 物理学，化学，生物学，工程技术和某些社会科学中的大量问题一旦加以精确的数学描述，往往会出现微分方程. 在本书的各章中，将举出各种不同的引导到微分方程的实际例子. 一个实际问题只要转化为微分方程，那么问题的解决就有赖于对微分方程的研究. 就是在数学本身的一些分支中，微分方程也是经常用到的重要工具之一. 本教程将主要介绍常微分方程的基本理论和某些基本方法.

我们首先在本章中给出微分方程及其解的定义，和它们的几何解释. 对这些内容的理解需要在以后各章中进行反复和加深.

§1.　微分方程及其解的定义

利用数学手段研究自然现象和社会现象，或解决工程技术问题，一般先要建立数学模型，再对数学模型进行简化和求解，最后结合实际问题对结果进行分析和讨论. 数学模型最常见的表达方式，是包含自变量和未知函数的函数方程. 在很多情形下，未知函数的导数也会在方程中出现. 例如，用牛顿第二运动定律列出质点的运动方程时，就要出现质点位移(未知函数)对时间(自变量)的二阶导数.

现在，我们给出如下一般的定义.

定义 1 凡是联系自变量 x，这个自变量的未知函数 $y=y(x)$，及其直到 n 阶导数在内的函数方程

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{1.1}$$

叫作**常微分方程**①，其中导数实际出现的最高阶数 n 叫作常微分方程(1.1) 的**阶**.

例如，下面的方程都是常微分方程：

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=x^3,\quad (x\neq 0) \tag{1.2}$$

$$\frac{dy}{dx}=1+y^2, \tag{1.3}$$

$$y''+yy'=x, \tag{1.4}$$

$$\ddot{\theta}+a^2\theta=0,\quad (\cdot\ 表示\frac{d}{dt},\ 常数\ a>0). \tag{1.5}$$

在前三个方程中，x 是自变量，y 是未知函数；在最后一个方程中，t 是自变量，θ 是未知函数. 前两个方程都是一阶的；后两个方程都是二阶的.

在常微分方程(1.1) 中如果左端函数 F 对未知函数 y 和它的各阶导数 $y',\cdots,y^{(n)}$ 的全体而言是一次的，则称它是**线性**常微分方程. 否则称它为**非线性**常微分方程. 例如，常微分方程(1.2)和(1.5)是线性的；(1.3)和(1.4)是非线性的.

我们在定义 1 中把微分方程(1.1)冠以"常"字，指的是未知函数是一元的. 如果未知函数是多元的，则微分方程中将出现偏导数，我们自然把这种方程叫作**偏微分方程**. 例如

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}+f=0$$

是一阶线性偏微分方程，其中 x, y 和 z 为自变量，$f=f(x,y,z)$ 为

---

① 这里的 F 是一个关于变元 $x,y,y,\cdots,y^{(n)}$ 的给定的已知函数. 因此，诸如 $\frac{dy}{dx}=y(y(x))$ 和 $y'(x)=y(x-1)$ 之类的方程就不是常微分方程.

未知函数；

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

为二阶线性偏微分方程，其中 x 和 y 为自变量，$u=u(x,y)$ 为未知函数.

本书主要介绍常微分方程，除了第十一章外，所说的微分方程都是指常微分方程，有时就索性简称为方程.

定义 2 设函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 J 上连续，且有直到 n 阶的导数. 如果把 $y=\varphi(x)$ 及其相应的各阶导数代入方程(1.1)，得到关于 x 的恒等式，即

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))=0$$

对一切 $x\in J$ 都成立，则 $y=\varphi(x)$ 叫作微分方程(1.1)在区间 J 上的**一个解**.

例如，从定义 2 可以直接验证：

1）函数 $y=\frac{1}{5}x^4$ 是微分方程(1.2)在区间 $(-\infty,0)$ 或区间 $(0,+\infty)$ 上的一个解；$y=\frac{1}{x}+\frac{1}{5}x^4$ 也是方程(1.2)在同样区间上的一个解. 而且对任意的常数 C，

$$y=\frac{C}{x}+\frac{1}{5}x^4$$

都是方程(1.2)在同样区间上的解. 但 $y=C+\frac{1}{5}x^4\ (C\neq 0)$ 不是这个方程的解.

2）$y=\operatorname{tg}x$ 是微分方程(1.3)在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的一个解；而 $y=\operatorname{tg}(x-C)$ 是方程(1.3)在区间 $\left(C-\frac{\pi}{2},C+\frac{\pi}{2}\right)$ 上的一个解，其中 C 为任意常数. 但 $y=C\operatorname{tg}x\ (C\neq 1)$ 不是解.

3）函数 $\theta=3\sin at$ 和 $\theta=7\cos at$ 都是微分方程(1.5)在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的解. 而且对任意的常数 C_1 和 C_2，

$$\theta=C_1\sin at+C_2\cos at$$

也是方程(1.5)在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的解.

从上面的讨论中可以知道,微分方程的解可以包含一个或几个任意常数(与方程的阶数有关),而有的解不包含任意常数.为了加以区别,我们给出如下定义.

定义 3　设 n 阶微分方程(1.1)的解 $y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 包含 n 个独立的任意常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$,则称它为**通解**;如果微分方程(1.1)的解 $y=\varphi(x)$ 不包含任意常数,则称它为**特解**.

这里说 n 个任意常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 是独立的,其含义是 $\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-1)}$ 关于 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 的 Jacobi 行列式

$$\frac{D[\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-1)}]}{D[C_1,C_2,\cdots,C_n]}\neq 0,$$

其中 $\varphi',\cdots,\varphi^{(n-1)}$ 分别是 φ 关于自变量 x 的相应导数.

容易看出 $\theta=C_1\sin at+C_2\cos at$ 是方程(1.5)的通解(请读者根据定义 3 来验证这个结论);而 $\theta=3\sin at$ 和 $\theta=7\cos at$ 都是方程(1.5)的特解.

显然,当任意常数一旦确定之后,通解也就变成了特解.

下面我们以简单的自由落体问题为例,说明微分方程及其通解和特解的某些实际背景.

所谓自由落体运动,指的是只考虑重力对落体的作用,而忽略空气阻力等其它外力的影响,参看图 1-1.设落体 B 作垂直于地面的运动,取坐标轴 y 从地面垂直向上.问题是:落体 B 的位置坐标 $y=y(t)$ 如何随时间 t 变化?

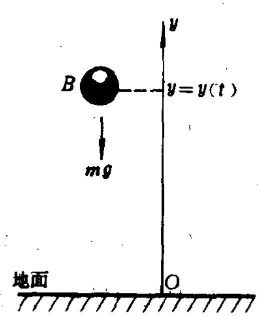

图 1-1

因为 $y=y(t)$ 表示 B 的位置坐标,所以它对 t 的一阶导数 $\dot{y}=\dot{y}(t)$ 表示 B 的瞬时速度 $v=v(t)$;而二阶导数 $\ddot{y}=\ddot{y}(t)$ 则表示 B 的

瞬时加速度 $a=a(t)$. 假设 B 的质量为 m,重力加速度为 g(在地面附近,它近似于常数. 通常取 $g=9.80$ 米 / 秒^2),则由牛顿第二运动定律得出

$$m\ddot{y}=-mg,$$

上式右端出现负号,是由于 B 所受的重力与 y 轴的正方向相反. 这样我们得到一个微分方程

$$\ddot{y}=-g. \tag{1.6}$$

为了得出落体的运动规律,需要求解这微分方程.

在(1.6)两侧对 t 积分一次,得到

$$\dot{y}=-gt+C_1, \tag{1.7}$$

其中 C_1 是一个任意常数;再把(1.7)对 t 积分一次,就得

$$y=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2, \tag{1.8}$$

其中 C_2 是另一个任意常数. 易知(1.8)是微分方程(1.6)的通解.

因此,通解(1.8)就表示自由落体的运动规律. 在(1.8)中包含两个任意常数,这说明微分方程(1.6)有无穷多个解. 对求解结果的这种不确定性,该如何解释呢? 如果检查一下我们最初对问题的提法,就会发现我们所作的唯一假定仅是某物体作自由落体运动,既没有指明物体在下落的初始时刻($t=0$)的位置,又没有给出在初始时刻的速度. 而方程(1.6)所表达的,正是物体自由下落时在任意瞬间 t 所满足的关系式. 然而,容易明了,在同一时刻从不同高度和(或)以不同初速度自由下落的物体,将表现为不同的运动. 这就须要考察落体 B 在初始时刻($t=0$)的位置和速度,即下面的**初值条件**:

$$y(0)=y_0,\quad \dot{y}(0)=v_0, \tag{1.9}$$

其中 y_0 和 v_0 是已知的数据(通常由测量得到). 把条件(1.9)分别代入(1.8)和(1.7)两式,推出

$$C_2=y_0,\quad C_1=v_0.$$

这样,在初值条件(1.9)下,从微分方程(1.6)唯一地确定了一个解

$$y=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+y_0, \tag{1.10}$$

它描述了具有初始高度 y_0 和初始速度 v_0 的自由落体运动.

我们称(1.10)是**初值问题**

$$\begin{cases} \ddot{y}=-g, \\ y(0)=y_0, \quad \dot{y}(0)=v_0 \end{cases} \tag{1.11}$$

的解. 有时也把初值问题(1.11)记为(1.6)+(1.9). 初值问题又名**柯西问题**.

从上面简单实例的分析中,可以得出下面的启示:

第一,微分方程的求解,与一定的积分运算相联系. 因此也常把求解微分方程的过程称为积分一个微分方程,而把微分方程的解称为积分. 由于每进行一次不定积分运算,会产生一个任意常数,因此仅从微分方程本身去求解(不顾及定解条件),则 n 阶方程的解应该包含 n 个任意常数.

第二,微分方程所描述的是物体运动的瞬时(局部)规律. 求解微分方程,就是从这种瞬时(局部)规律出发,去获得运动的全过程. 为此,需要给定这一运动的一个初始状态(即上述初值条件),并以此为基点去推断这一运动的未来,同时也可追溯它的过去. 对于 n 阶微分方程(1.1),初值条件的一般提法是

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}, \tag{1.12}$$

其中 x_0 是自变量的某个取定的初值,而 $y_0,\ y'_0,\cdots,\ y_0^{(n-1)}$ 是未知函数及其相应导数的给定的初值. 这样,不失一般性, n 阶微分方程的初值问题可以提成如下形式

$$\begin{cases} y^{(n)}=F(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}), \\ y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \end{cases} \tag{1.13}$$

自然要问:当函数 F 满足什么条件时,初值问题(1.13)的解是存在的,或者更进一步,是存在而且唯一的? 这是常微分方程理论中的一个基本问题. 在第三章中我们将就 $n=1$ 的情形进行证明:

只要 F 是连续的，则初值问题(1.13)的解(局部)存在.并在某些附加条件下证明解的存在和唯一性.我们将在第五章中把这些结果自然地推广到 $n\geqslant 2$ 的情形.

除了初值条件外，另外一种常见的定解条件是边值条件(参看第五章的悬链线之例)，在第九章中我们将对边值问题作一简要的介绍.

在结束本节之前，我们对 n 阶方程的通解中所包含的 n 个任意常数的独立性作一点说明.

如上所说，一个 n 阶微分方程的通解包含 n 个独立的任意常数(严格的证明见第十章).

反之，对于一个关于自变量 x 是 n 次可微的，而且包含 n 个独立的参数(任意常数) $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 的函数族，存在一个形如(1.1)的 n 阶微分方程，使得该函数族恰好是它的通解.

我们先来看一个例子.

【例 1】 求双参数函数族

$$y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x \tag{1.14}$$

所满足的微分方程.

解 把(1.14)对 x 先后求导两次，得出

$$y' = C_1 e^x(\cos x - \sin x) + C_2 e^x(\sin x + \cos x), \tag{1.15}$$

$$y'' = C_1 e^x(-2\sin x) + C_2 e^x(2\cos x). \tag{1.16}$$

从(1.14)和(1.15)两式可知 Jacobi 行列式

$$\frac{D(y, y')}{D(C_1, C_2)} \equiv \begin{vmatrix} e^x \cos x & e^x \sin x \\ e^x(\cos x - \sin x) & e^x(\sin x + \cos x) \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0.$$

这说明(1.14)中包含的两个任意常数 C_1 和 C_2 是独立的.据此，可从(1.14)和(1.15)两式解出 C_1 和 C_2 作为 x, y 和 y' 的函数，即

$$\begin{cases} C_1 = e^{-x}[y(\sin x + \cos x) - y' \sin x], \\ C_2 = e^{-x}[y(\sin x - \cos x) + y' \cos x]. \end{cases}$$

然后把它们代入(1.16)式，得到一个二阶微分方程

$$y'' - 2y' + 2y = 0, \tag{1.17}$$