陳 建 功 著

三 角 級 數 論

高 等 數 學 叢 書

岩 波 書 店

昭和五年十二月十五日　印　　刷
昭和五年十二月二十日　第一刷發行

三角級數論

定價四圓貳拾錢

著　者　陳　建　功

東京市神田區一ツ橋通町三番地
發行者　岩　波　茂　雄

東京市神田區美土代町二丁目一番地
印刷者　島　連　太　郎

東京市神田區一ツ橋通町
發行所　岩波書店
電話九段(33)｛二一〇八番　一二八一番
二一〇九番　二六二六番
一〇二二番（小賣部專用）
振替口座東京二六二四〇番

三秀舍印刷

（大森製本）

序

陳建功君は稀に見る篤學の士である. 君は東京高等工業學校を出でて,東北帝國大學數學教室に入り,大正十二年業を了へて故國に歸り,武昌師範大學に教授たること數年,昭和二年再び笈を負ふて仙臺の地に歸り,大學院に入りて數學解析の研究に沒頭すること二年有餘,直交函數列に關する光輝ある論文を提出して,昭和四年七月,理學博士の學位を獲られたのである. 中華民國の士で,我邦に於て理學博士の稱號を取られたのは,恐く君を以て嚆矢とするのではないかと思ふ. 君の研究は東北數學雜誌,帝國學士院記事に於て發表されたが,其內特にフーリエ級數に關する部分は本書に收められてゐる.

陳君が將さに錦衣故鄉に歸られんとするや,余は本叢書に於ける三角級數論の執筆者としては,君を最適の一人と信じ,之を慫慂した. 君は行李忽々の際なるにも拘はらず,之を快諾され,炎暑の七,八月を非常の努力を以て本書の著述に費し,其稿本を余に托されて,九月浙江大學に赴任された. 本書出版の一切を任された余は,校正及索引製作を泉理學士に乞ひ,余も亦一部の校正にたづさはり,茲に本書を我邦學界に推薦し得て,陳君寄托の一部

を果し得たるを喜ぶと同時に,或は校正の粗漏が著者の意に滿たざりしものありしやを恐れるものである. 此點に關して,余は讀者と著者とに深く謝したい.

陳君は正に歸國の際であつたが爲め,遍く文献を涉獵するの餘暇がなかつた. 其文献の足らざる處は,泉君に乞ふて補充して戴いた. 其大部分は卷末にまとめられて居るが,本文中にも泉君の補筆を得た個處がある. 今一々之を擧げない. 本書の術語は余の一存で成るべく我邦在來のものに改めたが,二三陳君自身の譯語をその儘に殘してをいた. 吾々は之を他山の石として見ることが出來るであらう.

本書は第一編に於て,豫備として點集合の測度併にルベーグ積分に關する理論の一班を述べ,第二編の大部分をフーリエ級數の理論に費した. 唯最後の一章に於て,一般の三角級數の理論を論ずることになつてゐる.

三角級數の理論は實に近代の數學解析の或意味に於ける一つの母胎である. 其初期に於ては,振動弦の問題に關聯して,ディリクレをして函數の從來の概念を擴げて現在の形の定義を與へしめ,其收斂問題に關しては,條件收斂級數の研究をうながした. リーマンをして積分概念の根本的再吟味をなさしめたのも,フーリエ級數の研

究にある．更に三角級數の單一問題は,カントルをして點集合論を生ましめた．之が彼の集合論の踏み出しであつた．其他近代の數學解析の諸方面に於て,何處かにフーリエ級數の理論の直接或は間接の影響を受けてゐないものは少ないといふても過言ではない．

かかる重大な意義をもつ三角級數の理論は,十九世紀の初頭から今日に至るまで,絶へず其發展の步度を緩めずに,今猶盛んに進みつゝある,古くして尚ほ若い研究對象である．

本書は古典的問題に加ふるに,最近盛んに方々の雜誌で發表された目ぼしい研究の結果の非常に多くを收めてゐる．三角級數の理論の最近の展望を得んとするには,非常に重寶な著述である．敢て之を我邦好學の士に奬める所以である．

昭和五年十一月

仙臺に於て

藤原松三郎

自　序

本論は微積分學を卒へ,三角級數を研究せんとする方々の參考書として編纂したるものなり.

著者は淺學にして不才,繁簡其の當を得ず.幸に恩師藤原松三郎教授の親切なる指導と,學友泉信一君の叮嚀なる校正ありて大謬を免かれ,又泉君が多くの文献を追加されたることによつて本論の内容が豐富になつた.

茲に謹で藤原先生と泉君に謝意を表す.

浙江大學に於て

陳　建　功

目　　次

第一編　積分概論

第二編　フーリエ級數

三角級數論

第一編

積分概論

第一章

點集合

第一節

點集合の基本觀念

1. 集合. 吾人が思惟し得るものは,其有形と無形とを問はず,凡て之を物と名づけよう. 或特定の性質を有するか,又は或特定の條件を具へるあらゆる物を一つにまとめて考へる時,之を**集合**と名づける. 集合を形づくる個々の物を集合の**元素**と云ふ. 特に,n 次元空間の點を元素とする集合を **n 次元點集合**と名づける. 例へば一直線を數の軸と考へる時,其上の有理數を表す點の全體は,一つの一次元點集合である.

玆に二つの集合 A, B があつて,A の一つの元素に B の唯一つの元素が對應し逆に B の一つの元素に A の唯一つの元素が對應する時,A, B は**一對一の對應**にあり,或は A, B は同じ**應數**(Power) を有つと云ふ.

若し或與へられた集合 A が自然數の集合(即ち自然數の全體)

$$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots \qquad (1)$$

と同じ應數を有つ場合に,A を**可列集合** (enumerable set) と云ひ,A の元素の數は**可列無限箇**なりと云ふ. 例へば偶數の集合

$$2, 4, 6, \cdots\cdots, 2n, \cdots\cdots$$

は明かに一つの可列集合である. 有理數の集合も亦可列である. 之を示す爲めに先づ次の定理を證明しよう.

定理. 有限箇又は可列無限箇の可列集合の和は一つの可列集合である(1).

與へられた集合は高々可列無限箇しかないから,此等を A_1, $A_2, \cdots\cdots, A_n, \cdots\cdots$ なる記號で表すことが出來る. 又假定により, A_n $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ は可列であるから,其元素を

$$u_{n1}, u_{n2}, \cdots\cdots, u_{ni}, \cdots\cdots$$

で表し得る. $u_{ni}(n, i=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ を元素とする集合 A を A^1, $A_2, \cdots\cdots, A_n, \cdots\cdots$ の和と云ひ,之を表すに記號

$$A=\sum A_n=A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n+\cdots\cdots$$

を用ひる. 今證明せんとする事は,A も亦一つの可列集合である事である. さて A の元素を u_{11}; u_{12}, u_{21}; $\cdots\cdots$; $u_{1,n-1}, u_{2,n-2}, \cdots\cdots, u_{n-1,1}$; $\cdots\cdots$ なる様に排列すれば,直ちに(1)と A との間に一對一の對應がつけられることが知れる. 依て上述の定理が證明された.

有理數 i/n を u_{ni} と書けば,今の定理により容易に次の結果に達せられる.

---

(1) 此定理は集合論の創立者 G. Cantor が Journal f. Math. 84 (1875) に公にしたものである.

正の有理數の集合は可列である．故に**あらゆる有理數の集合も亦可列である．**

更に一步を進めて，凡ての無限集合(卽ち元素の數が無限にある集合)は可列であるか，どうかを知るため，次の事實を證明しよう．

1より大きくない正數の集合は可列ではない．

之を示すには，1より大きくない正數が皆數列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots, a_n, \cdots;\qquad 0 < a_n \leqq 1 \qquad (2)$$

に含まれると假定すれば，矛盾が起る事を言へばよい．

先づ(2)の數を無限小數に展開する．之は常に可能であつて，且一通りである．

$$a_n = 0.a_{n1}\,a_{n2}\cdots a_{ni}\cdots \quad (n=1,\,2,\,3,\cdots)$$

とすれば，a_{ni} は $(0, 1, 2, \cdots, 9)$ の何れかである．

今 $$b = 0.b_1 b_2 b_3 \cdots b_i \cdots \quad (0 \leqq b_i \leqq 9)$$

なる無限小數を考へ，$a_{nn} \neq 8$，$\neq 9$ の時，$b_n = a_{nn}+1$ とし，$a_{nn}=8$ 又は 9 の時，$b_n=1$ とすれば，$n=1, 2, \cdots$ に對して

$$a_{nn} \neq b_n$$

である．從て b は(2)に含まれない．故に上に述べた定理が成立する．

2. 極限點. 今 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を n 箇の獨立實變數とし，これらに一組の値を與へれば，これ等を座標に有つ n 次元空間に於ける一點が定まる．

茲に一つの n 次元點集合 A が與へられた時，A の各點の座標

が $|x_i|<K(i=1, 2, \cdots, n)$ なる關係を滿足させる時, A を一つの**有界集合** (bounded set) と名づける. こゝに K は一つの常數を表す.

正數 $\{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+\cdots+(x_n-x_n')^2\}^{\frac{1}{2}}$ を二つの點 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $(x_1', x_2', \cdots, x_n')$ の間の距離と云ふ. $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を一つの定點とし,次の關係

$$\{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+\cdots+(x_n-x_n')^2\}^{\frac{1}{2}}<\varepsilon \quad (\varepsilon>0)$$

を滿足させる様な點 $(x_1', x_2', \cdots, x_n')$ の全體を點 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の一つの**傍域** (vicinity) と名づける. ε が小さくなるに從つて傍域は小さくなる.

與へられた集合 A の一點 P の或傍域の内に, P 以外の A の點が一つも存在しない場合には, P を A の**孤立點**と名づける. 又 P が A に屬すると否とを問はず, P の傍域を如何様に小さく取るも,常に P 以外の A の點が一つ以上存在する時には, P を A の一つの**極限點**又は**集積點**と名づける.

定理 (Bolzano-Weierstrass). **無限箇の點より成る有界集合は少くも一つの極限點をもつ**(1).

吾々はこの定理を二次元點集合の場合に就て證明することにする. 一般の場合にも同じ方法で證明が出來る.

さて與へられた集合 A は有界であるから, A の點が皆或る一つの矩形 S_1 の内にある. S_1 の内部の一點を過り, S_1 の二邊に平行線を引けば, S_1 は四つの矩形に分けられる(線上の點は何れか

(1) Bolzano, Rein analylischer Beweis etc., Prag 1817.

に屬せしめる). 其四つの内,少くも一つはAの點を無數に含む. この矩形をS_2とする. S_2に就て同様のことをやれば,Aの點を無數に含む矩形S_3が得られる. このことを何回も繰り返せば,矩形の系列$S_1, S_2, \cdots\cdots, S_n, \cdots\cdots$が得られ,各矩形$S_n$が$A$の點を無數に含む. $n\to\infty$の時,明かにS_nがS_1内のある一點Lに收斂する. Lの任意の傍域内に常にAの點が一個以上存在するから,定義に依て,LはAの一極限點である.

3. 開放集合と關閉集合. Aを一つのn次元點集合とし,Aの凡ての點を除いたn次元空間のあらゆる點の集合をCAと書くことにする. CAも一つのn次元點集合である. 一點Pを取り,Pの凡ての傍域内にAの點もCAの點も存在する時,PをAの一つの**境界點**と名づける. 境界點を一つも含まない點集合を**開放集合**と名づけ,凡ての境界點を含む點集合を**關閉集合**と名づける. これはn次元空間に就ての定義であつて,nの値を指定しなければ,上の定義は無意義である. 例へば,$a<x<b$なる點集合は,一次元空間に就て云へば,一つの開放集合であるが,二次元空間に於ては,開放集合でないことは明かである.

二つの集合A, Bに共通な點の集合をA, Bの積と云ひ,記號$A\cdot B$で表す. $A\cdot B$の元素はAに屬し,又Bにも屬する. 勿論$A\cdot B$の元素がない場合がある. 其時吾々は$A\cdot B=0$と書く.

若しA, Bは二つとも開放集合であれば,和$A+B$及び積$A\cdot B$の何れも開放でなければならない. 依て次の事實が知られる.

1° 有限箇の開放集合の和と積とは何れも開放集合である.

2° 有限箇の鎖閉集合の和と積とは何れも鎖閉集合である.

又次の事實も容易に分る.

3° 可列無限箇の開放集合の和は一つの開放集合である.

4° 可列無限箇の鎖閉集合の積は一つの鎖閉集合である.

4. 領域定理. 一次元空間に於て,區間 (interval) を元素とする集合Δを考へる. 若し一つの與へられた鎖閉區間(a, b)の各點が,Δに屬する一區間を傍域としてもつならば,Δに屬し,Δと同じ性質を有つ有限箇の區間が存在する. 換言すれば,(a, b)の各點がこの有限箇の區間によつて蔽はれる[1].

之を證明するため,區間(a, b)をm等分してm箇の小區間とする. 若し各小區間がΔの一つの區間で蔽はれたならば,定理が證明されたことになる. 若しm箇の小區間の內,Δの何れの區間でも蔽はれない一つの小區間があれば,これをI_mとする. I_mの一點を取り,之をP_mとする. 凡てのmに對して,斯樣なP_mが定められたとすれば,吾々は$P_1, P_2, \cdots, P_m, \cdots$なる無限點集合を得る. この集合は明かに有界であるから,§2 の定理によつて,少くも一つの極限點Pをもつ. Pは區間(a, b)の點であることは云ふ迄もない. 故にPの一つの傍域はΔの元素である. 然しこの傍域の內にP_mなる點が無數にある(極限點の定義か

(1) この定理は Heine, Bòrel, Lebesgue が發見したもので,n次元空間に於ても成立する. 又色々な擴張が出來て居る. Hobson の實變數函數論第一卷參照.

ら直ちに知られる通り). m を充分大きくとれば, I_m もこの傍域の内に入る. それは I_m の定義に矛盾する. 依て定理が證明される.

第　二　節
點集合の測度

5. 一次元點集合の測度. 線分を測るには長さを以てし,矩形等の二次元點集合を測るには面積を以てする様に,一般の點集合が占領する場所をも何等かの方法で測らなければならない. 實際,點集合を測る方法は種々案出されてゐる. 併し玆にはルベーグが工夫した測度(measure)の考だけを論ずることにする(1).

玆に一つの一次元點集合 A が,有限箇,若くは可列無限箇の一次元區間の和である時,それ等の長さを夫々 $l_1, l_2, \cdots, l_n, \cdots$ とすれば,總和 $\sum l_n$ を A の**一次元測度** (linear measure) と名づけ,之を表すに記號 $mA=\sum l_n$ を用ひる.

二つの集合 A, B の和 $A+B$ と云ふのは, A に屬し B に屬さない元素と, B に屬し A に屬さない元素と, A, B の共通元素との集りであるから,次の關係が成立する:

$$mA+mB=m(A+B)+m(A\cdot B).$$

但し A, B は何れも有限箇又は可列無限箇の區間に分解し得ら

(1) H. Lebesgue, Leçons sur l'integration et la recherche des fonctions primitives 參照.