高中数学解题方法

代数

程志国　金耀先　主编

气象出版社

高中数学解题方法一代数
（青年自学用书）
程志国　金耀先　主编

气象出版社出版发行
（北京西郊白石桥路 46 号）
石家庄市塔冢印刷厂印刷

开本:1/32　印张:15.25　字数:327 千字
1991 年 1 月第一版　1991 年 1 月第一次印刷
印数:1—8000　定价:4.60 元

ISBN7—5029—0643—6/G·0102

前　言

为了帮助高、初中学生、自学数学的知识青年、职工干部，以及中学数学教师巩固并熟练掌握数学基础知识，提高逻辑思维能力，简捷地掌握解数学题的一般方法和某些特殊技巧，我们编写了这套《中学数学解题方法》。

本套书每章均有“基础知识”、“解题方法”、“习题”和“解答”四部分，重点是“解题方法”。本套书围绕各类问题的典型方法精选了有代表性的例题，例后的“注”中有对方法的解释与总结。本套书所介绍的方法以教材为基础，但又高于教材、深于教材，旨在巩固知识，深化思维，拓宽思路。各章所列方法既有一般方法，又有技巧性的方法，以期使读者在总结规律的基础上锤炼解题技艺。每章后面的习题均与方法呼应，起到巩固作用。

由于我们水平有限，不妥之处恳请读者批评指正。

主编：程志国、金耀先

编者：仇　岷、王墨森

袁缵芹

1989年8月

目　录

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

基 础 知 识

1. 集合的概念

(1) 集合是不定义概念，可描述如下：一组对象的全体形成一个集合. 集合里的各对象叫集合的元素.

(2) 集合的元素具有确定性、无序性和互异性.

(3) 集合的表示法：列举法、描述法.

(4) 常用的数集的记号：

自然数集：N;

整数集：　Z;

有理数集：Q，正有理数集：Q^+;

实数集：　R，负实数集，R^-;

复数集：C.

2. 元素与集合的关系：属于($\in$)、不属于($\notin$).

3. 集合与集合的关系

	定　义	备　注
子集	对于任意 $x\in A$，均有 $x\in B$，则集合 A 叫集合 B 的子集记作 $A\subseteq B$.	(1) $A\subseteq A$ (2) $\Phi\subseteq A$ (3) 若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$ (4) 几个元素的集合，子集个数为 2^n.

	定　义	备　注
真子集	若$A\subseteq B$，且 B 至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 叫集合 B 的真子集. 记作$A\subset B$.	(1) 空集是任何非空集合的真子集. (2) 若$A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$. (3) 含几个元素集合，真子集个数为 2^n-1.
相等	若$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$. 则说 $A=B$.	若 A、B 为非空集合，则 $A=B \Rightarrow A$、B的 元素完全相同.

4. 集合的运算

	定　义	性　质
交集	$A\bigcap B=\{x\|x\in A$ 且 $x\in B\}$	(1) $A\bigcap A=A$ (2) $A\bigcap \Phi=\Phi$ (3) $A\bigcap B=B\bigcap A$
并集	$A\bigcup B=\{x\|x\in A$ 或 $x\in B\}$	(1) $A\bigcup A=A$ (2) $A\bigcup \Phi=A$ (3) $A\bigcup B=B\bigcup A$
补集	$\overline{A}=\{x\|x\in I$ 且 $x\notin A\}$	(1) $A\bigcup \overline{A}=I$ (2) $A\bigcap \overline{A}=\Phi$ (3) $\overline{\overline{A}}=A$

5. 映射与一一映射的判断

对于给出的对应，判断其是否为映射，是否为一一映射，均应严格按定义衡量. 为此需抓住定义的要点.

(1) 映射：对集合 A 中任何一个元素在集合 B 中都有唯一的象，即有象且唯一.

(2) 一一映射要求：

①是映射;

②A 中不同元素在 B 中的象不同;

③B 中每一元素在 A 中都有原象.

6. 函数

(1) 定义(略)

(2)用映射的观点理解函数：函数是由定义域、值域以及定义域到值域上的对应法则三部分组成的一类特殊映射(函数是映射，但映射不都是函数)

(3) 两个函数相同，当且仅当其定义域、值域及对应法则均相同.

(4) 函数的奇偶性与单调性.

	奇偶性	单调性
定义	对于函数 $f(x)$ 定义域内任一 x 均有 ① $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数 ② $f(-x)=f(x)$ 则称 $f(x)$ 为偶函数.	设有函数 $f(x)$，若对于给定区间上任意两自变量值 x_1、x_2. ①若 $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ 则称 $f(x)$ 在该区间为增函数 ②若 $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ 则称 $f(x)$ 在该区间为减函数
区别	奇偶性是函数在其整个定义域内的性质	单调性是函数在其定义域内某区间上的性质
定义域特征	奇、偶函数的定义域在数轴上关于原点对称	无
图象特征	奇函数图象关于原点对称 偶函数图象关于 y 轴对称	增函数图象从左向右越来越高. 减函数图象从左向右越来越低.

7. 反函数

(1) 定义(略)

(2) $y=f(x)$与它的反函数$y=f^{-1}(x)$互逆体现在两点：其一，对应法则是互逆的，在$f^{-1}(x)$作用下，原来函数值域内每个$f(a)$的象必是$f(a)$关于f的原象，即$f^{-1}[(f(a)]=a$；其二，定义域与值域是互换的．若两个函数仅仅对应法则互逆，而定义域与值域不是互换的，它们并不互为反函数，例如$y=\frac{x}{2}(x\in Z)$与$y=2x(x\in Z)$不是一对反函数．

(3) $y=f(x)$与它的反函数$y=f^{-1}(x)$的图象关于$y=x$对称．

(4) 上述定理的逆命题不成立．

8. 幂函数及其性质．

9. 指数函数与对数函数的性质．

10. 指数方程与对数方程．

解 题 方 法

本章理论性强，重在运用概念解题，故应侧重掌握各类问题的思路与规律，技巧性的方法仅穿插于某些问题之中．

本章有十一类问题，涉及多项方法与技巧．

一、集合的运算与集合关系判断的方法

1. 利用数轴求解或判断

例 1　设$I=R$，$M=\{y|y=\log_{\frac{1}{2}}x,\ \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\}$，$N=\{y|y=\cos x,\ 90^\circ\leqslant x<180^\circ\}$，求$M\cap N$，$M\cup N$，

$\overline{M}\bigcup\overline{N}$，$\overline{M}\bigcap\overline{N}$.

解：$M=\{y|0\leqslant y\leqslant 1\}$，$N=\{y|-1<y\leqslant 0\}$ 将其在数轴表示

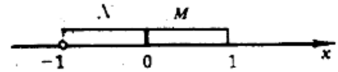

图 1-1

$\therefore M\bigcap N=\{0\}$，$M\bigcup N=\{y|-1<y\leqslant 1\}$

$\overline{M}\bigcup\overline{N}=\overline{M\bigcap N}=\{y|y\neq 0\}$

$\overline{M}\bigcap\overline{N}=\overline{M\bigcup N}=\{y|y\leqslant -1 或 y>1\}$.

例 2 判断下列集合 A 与 B 的关系.

$A=\{x|2x^2-9x-5\leqslant 0\}$，$B=\{x||x-3|<2，x\in R\}$.

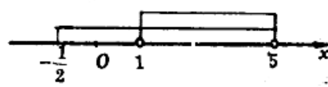

图 1-2

解：$A=\left[-\frac{1}{2},5\right]$，

$B=(1，5)$，将 A、B 在数轴表示.

$\therefore A\supset B$.

注：当给出的集合是实数集或其子集等可在数轴表示的集合时，采用数轴表示法

2. 利用图象求解或判断

例 3 判断 $A=\left\{(x，y)|\frac{y}{x}=1\right\}$ 与 $B=\{(x，y)|y=x\}$ 的关系.

解：$\frac{y}{x}=1\Rightarrow y=x(x\neq 0)$ 用图象分别表示两集合：A 是直线 $y=x$ 除去原点，而 B 是直线 $y=x$(图略)，由图知 $A\subset B$.

例 4 已知 $M=\{(x,\ y)|x^2+2x+y^2\leqslant 0\}$，$N=\{(x,\ y)|y\geqslant x+a\}$ 且 $M\cap N=M$，求 a 的取值范围．

解：$\because x^2+2x+y^2\leqslant 0$ 即 $(x+1)^2+y^2\leqslant 1$，$\therefore M$ 是以 $(-1,\ 0)$ 为圆心，以 1 为半径的圆的内部（包含边界），N 则是动直线 $y=x+a$ 上方的半平面，显然 $y=x+a$ 运动至如图 1－3 所示的切线及以下位置时 $M\cap N=M$，于是问题即求此切线纵截距．

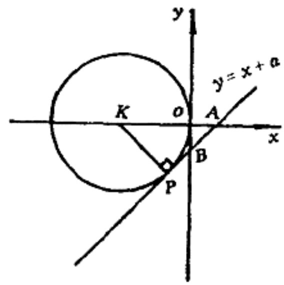

图 1－3

$\because |KP|=1$，

$\therefore |KA|=\sqrt{2}$，

$\therefore |OA|=\sqrt{2}-1$，$\therefore |OB|=\sqrt{2}-1$．

$\therefore$ 当 $a\leqslant 1-\sqrt{2}$ 时，$M\cap N=M$．

例 5 已知集合 $A=\{(x,\ y)||x|+|y|=a,\ a>0\}$，$B=\{(x,\ y)||xy|+1=|x|+|y|\}$．若 $A\cap B$ 是平面上正八边形顶点所构成的集合，求 a 的值．

解：如图：集合 A 的图象为正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的边界，集合 B 可化为 $B=\{(x,\ y)|(|x|-1)(|y|-1)=0\}$，$\therefore$ 其图象为四条直线：$x=\pm 1$，$y=\pm 1$．

(1) 当 A_1B_1 与 $x=1$，$y=1$ 相交于正方形 $MNPQ$ 的边界上时（图 1－4），易知 $a=\sqrt{2}$．

(2) 当 A_1B_1 与 $x=1$，$y=1$ 相交于正方形 $MNPQ$ 之

外时（图 1－5），可解得 $a=2+\sqrt{2}$.

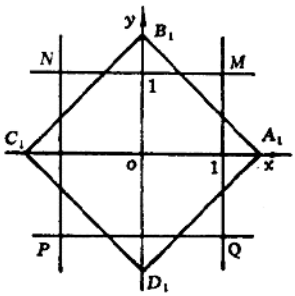

图 1–4

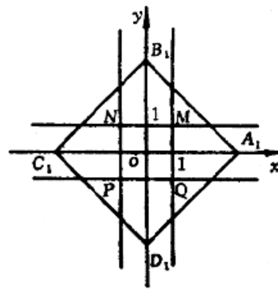

图 1–5

注：图象法适用于集合的元素是数对的集合，这些集合可用平面直角坐标系中的点、曲线或区域表示出来.

3. 列举元素法

例 6　判断集合 $A=\{x|x=2k+1,\ k\in Z\}$，$B=\{y|y=4m\pm1,\ m\in Z\}$ 的关系.

解：对 A、B 中的 k、m 分别给出一系列具体数值，可分别列出 $A=\{\cdots-5,\ -3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5\cdots\}$，$B+\{\cdots-5,\ -3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5,\ \cdots\}$. $\therefore A=B$.

注：对集合中元素是无限的可以列出的集合. 采用该方法并非严格，故答选择或填空题可用此法. 若严格论证须运用集合相等的定义：

$\because A=\{x|x=2k+1,\ k\in Z\}=\{$奇数$\}$.

$\therefore$任取$y\in B$均有$y\in A$，$\therefore B\subseteq A\cdots\cdots$　①

又任取 $x\in A$ 有 $x=2k+1$，$k\in z$，当 k 为偶数时，设 $k=2m(m\in z)$ 则 $x=2.2m+1=4m+1\in B$，当 k 为奇数时，设 $k=2m-1(m\in Z)$，则 $x=2(2m-1)+1=4m-1\in B$，$\therefore A\subseteq B$ ②

由①②知 $A=B$.

4. 韦恩图法

例 7 设 $I=\{1,2,3,\cdots 9\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,9\}$，$A\cap B=\{2\}$，$\overline{A}\cap B=\{4,6,8\}$，求 $A\cup B$、A、B.

解：用韦恩图表示 I、A、B. 据已知可分别填出各元素所在位置如图 1–6.

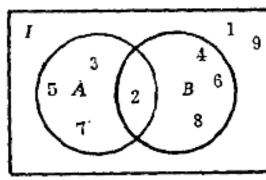

图 1–6

显然空出的 $\overline{B}\cap A$ 部分应填 3，5，7.

$\therefore A\cup B$

$=\{2,3,4,5,6,7,8\}$

$A=\{2,3,5,7\}$，$B=\{2,4,6,8\}$.

例 8 有 a、b、c 三本书，至少读过其中一本的有 18 人，读过 a、b、c 的分别为 9、8、11 人，同时读过 a、b 的 5 人，读过 b、c 的 3 人，读过 c、a 的 4 人，问 a、b、c 全部读过的有几人？

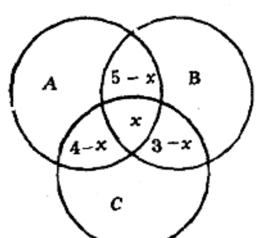

图 1–7

解：设 a、b、c 全部读过的有 x 人，并设读过 a、b、c 的分别为集合 A、B、C，作韦恩图（图 1－7），依各项已知条件可分别将图中各部分填出，并列出各部分之和：

$(9+8-5)+(11-4)-(3-x)=18.$

解得　$x=2.$

二、求函数定义域的方法

中学阶段各类函数的定义域都是实数集或其子集．因此求定义域均采用解不等式并求其交集．故通过数轴表示最为常见．

例 9　求下列各函数的定义域

(1) $y=\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\lg(2x-1)}$;

(2) $y=\log_{2x+1}(32-4^x)$;

(3) $y=\sqrt{3^{2x}-1}\arcsin(x-\dfrac{1}{2})$;

(4) $y=\sqrt{\cos 3x}+\sqrt{9-x^2}$;

(5) $y=\dfrac{(x-1)^0}{\dfrac{1}{x}+1}$;

(6) $y+\sqrt{1-\log_a(x+a)}$，$(a>0且a\neq 1)$.

解：**(1)** 欲使函数有意义，须

$$\begin{cases}2x-x^2\geqslant 0,\\ \lg(2x-1)\neq 0,\\ 2x-1>0\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x\in[0,\ 2], \\ x\neq 1, \\ x>\frac{1}{2}. \end{cases}$$

∴　函数定义域为$\{x|\frac{1}{2}<x<2\text{且}x\neq 1\}$.

(2) 欲使函数有意义，须

$$\begin{cases} 2x+1\geqslant 1, \\ 2x+1>0, \\ 32-4^x>0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x\neq 0, \\ x>-\frac{1}{2}, \\ x<\frac{5}{2}. \end{cases}$$

∴　定义域为　$x\in(\frac{1}{2},\ \frac{5}{2})$且$x\neq 0$.

(3) 欲使函数有意义，须

$$\begin{cases} 3^{2x}-1\geqslant 0, \\ -1\leqslant -\frac{1}{2}\leqslant 1 \end{cases}$$

解得　$0\leqslant x\leqslant \frac{3}{2}$.

∴　定义域为$x\in\left[0,\ \frac{3}{2}\right]$.

(4) 欲使函数有意义，须

$$\begin{cases}\cos 3x \geqslant 0,\\ 9-x^2\geqslant 0\end{cases}.$$

解得

$$\begin{cases}\dfrac{2k\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{2k\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}(k\in Z),\\ -3\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$$

用数轴求公共解(图 1-8):

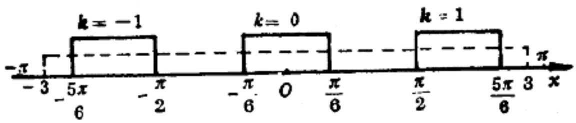

图 1-8

$\therefore$ 定义域为$\left[-\dfrac{5\pi}{6},-\dfrac{\pi}{2}\right]\cup\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right]\cup\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6}\right]$.

(5) 欲使函数有意义，须

$$\begin{cases}x-1\neq 0.\\ x\neq 0,\\ \dfrac{1}{x}+1\neq 0\end{cases}.$$

解得 $\begin{cases}x\neq \mathrm{i},\\ x\neq 0,\\ x\neq -1\end{cases}.$

$\therefore$ 定义域为$\{x|x\neq 0且x\neq -1且x\neq 1\}$.

(6) 欲使函数有意义，须

$$\begin{cases}1-\log_a(x+a)\geqslant 0, & (1)\\ x+a>0. & (2)\end{cases}$$

(1) 当 $a>1$ 时，$\log_a(x+a)\leq 1$，解得 $x\leq 0$，又由 (2) $x>-a$，∴ 定义域为 $-a<x\leq 0$;

(2) 当 $0<a<1$ 时，由 (1) 得 $\log_a(x+a)\leq 1$，解得 $x\geq 0$，又由 (2) 得 $x>-a$，∴ 定义域为 $x\geq 0$.

∴当 $a>1$ 时定义域为 $(-a,\ 0]$.

当 $a\in(0,\ 1)$ 时，定义域为 $[0,\ +\infty)$.

例 10 若 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0,\ 1]$，求下列函数的定义域:

(1) $f(\sin x)$; (2) $f(x)=f(x+m)+f(x-m)(m>0)$.

解: (1)令 $\sin x=t$，∴$0\leq t\leq 1$.

∴$0\leq \sin x\leq 1$

解得 $2k\pi\leq x\leq 2k\pi+\pi(k\in Z)$.

∴$f(\sin x)$定义域为$[2k\pi,\ 2k\pi+\pi](k\in Z)$.

(2) $\begin{cases}0\leq x+m\leq 1,\\0\leq x-m\leq 1\end{cases}.\Rightarrow\begin{cases}-m\leq x\leq 1-m,\\m\leq x\leq 1+m\end{cases}$

①当$m>\dfrac{1}{2}$时，$-m<-\dfrac{1}{2}$，∴$1-m<\dfrac{1}{2}$.

∴$[-m,\ 1-m]\cap[m,\ 1+m]=\Phi$(图1－9).

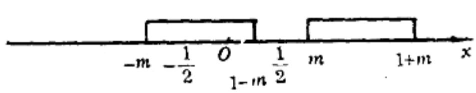

图 1-9

②当$m=\dfrac{1}{2}$时，$-m=-\dfrac{1}{2}$，$1-m=\dfrac{1}{2}$.

∴$[-m,\ 1-m]\cap[m,\ 1+m]=\dfrac{1}{2}$ (图1－10).