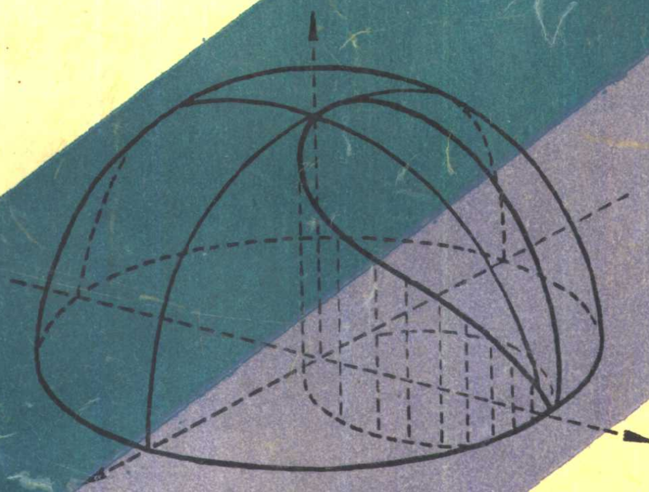
上册

简明高等数学

王树禾　毛瑞庭　编



中国科学技术大学出版社

简明高等数学

上 册

王树禾　毛瑞庭　编

中国科学技术大学出版社

1992 • 合肥

内 容 简 介

本书分上、下两册，系统阐述了一元微积分、多元微积分、空间解析几何、级　和常微分方程的基本概念、基础理论和重要方法及其实际应用。本书论证严谨清晰，表达简明易懂，内容深入浅出，例题典型类全，习题难度恰当。而且每章设有覆盖全章的复习题，书末附有习题答案，同时出版配套的学习指导书《高等数学自学指南》。

本书是按照我国理工科专科高等数学教学大纲并参照安徽省高等数学自学考试大纲，应安徽省高等教育自学考试指导委员会的约请而编写的。对有志进修理工科专业和参加高等数学自学考试的读者是一本理想的自学教材，极适用于函大、夜大、职大、电大理工科各专业作课程教材，也可供普通高校理工科师生参考。

简明高等数学

上册

王树禾　毛瑞庭　编

中国科学技术大学出版社出版

（安徽省合肥市金寨路96号，邮政编码：230026）

安徽省金寨县印刷厂印刷

安徽省新华书店发行

开本：850×1168/32　印张：10.625　字数：275千

1992年2月第1版　1992年2月第1次印刷

印数：1—18000册

ISBN7-312-00336-2/O·109

〔皖〕第08号　定价：4.90元

前　言

《简明高等数学》分上、下两册，内容主要有一元微积分、多元微积分、空间解析几何、级数和常微分方程。

本书是按理工科专科高等数学教学大纲并参照安徽省高等数学自学考试大纲的要求写成的，可供我国理工科专科高等数学教学使用，尤其适合于用做高等教育自学考试及各类成人高等教育的教材。

考虑到成人高等教育的特点，在保障内容严谨和完善的前提下，本书论证解答力求详细易懂、重点突出、直观自然、深入浅出，极适用于自学。全书强调“双基”训练，阐述力争清晰准确，配有足够多的典型例题，并于每章之末列出该章的复习题等，以强化对基本概念和基础理论与方法的理解和提高读者的解题能力。

每节之末布置适量作业，以帮助学生牢固掌握高等数学的思想和方法。书后附有习题答案。

囿于作者的水平和经验，书中欠缺之处想必不少，盼请读者予以指正。

作　者

1991 年 1 月

于中国科学技术大学数学系

目　录

第一章　函数与极限

高等数学这门课程的名字有时也称为微积分，它以函数的微分与积分为其主要内容。而微商和积分则是以无穷小分析方法建立的某种变量的极限，其中大量的是计算初等函数的微分与积分。可见，首先熟练掌握初等函数的性质以及函数极限（尤其是无穷小量）的性质与运算，乃是学好整个高等数学的钥匙。

§1.1　集合、实数与绝对值

1　集合

集合是近代数学最基本的概念之一，可以说全部近代数学就是建立在集合这一概念的基础之上的。

集合论的创始人康托(G. Cantor)1897 年指出："把一定的并且彼此可以明确识别的事物——这种事物可以是直观的对象，也可以是思维的对象——放在一起，称为一个集合"。

简言之，**集合**就是可以互相区别的事物的集体；这些事物的每一个叫做该集合的**元素**。例如一个人的双手手指组成一个集合，这个集合有十个元素。

对于某一集合，任意取定一个事物，我们能够判定它是否为该集合的元素时，则称该集合已经给定。

一般用大写字母表示集合，小写字母表示元素。若 A 是给定的一个集合，a 是 A 的元素，则记成 $a\in A$，读作 a **属于** A，b 不是 A 的元素，记成 $b\notin A$。

本节中常用的集合为

$\boldsymbol{N}$：全体自然数组成的集合；

$\boldsymbol{Z}$：全体整数组成的集合；

$\boldsymbol{Q}$：全体有理数组成的集合；

$\boldsymbol{R}$：全体实数组成的集合。

约定把"任意取定"记成 $\forall$，若 $\forall x\in A$，则 $x\in B$，即 A 的每个元素都属于集合 B 时，则称 A 是 B 的**子集**，记成 $A\subset B$（或 $B\supset A$）读作 A 包含于 B（或 B 包含 A），例如 $\boldsymbol{N}\subset\boldsymbol{Z}\subset\boldsymbol{Q}\subset\boldsymbol{R}$。

若 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称**集合 A 与 B 相等**，记之为 $A=B$。

集合通常有两种表示法，一种是**列举法**，即写出一个集合的全部元素，用逗号分开，再用花括号括起它们。例如，$x^2+2x+1=0$ 的解集合为 $\{-1\}$；$x^2+2x=0$ 的解集为 $\{-2, 0\}$。另一种表示法是**描述法**，即用描述集合中元素性质的语句表示一个集合，在花括号内划一个竖线，竖线前方写的字母代表元素，竖线后方的语句是对元素的描述，例如，$x^2+2x+1=0$ 的解集合为 $\{x|x^2+2x+1=0\}$。

不含任何元素的集合称为**空集**，记成 $\varnothing$，例如

$$\{x|x^2+1=0,\ x\in R\}=\varnothing,$$

事实上，在实数范围内，$x^2+1=0$ 的根不存在，所以 $\{x|x^2+1=0, x\in R\}$ 是空集。

规定 $\varnothing$ 是任何集合的子集，例如 $\varnothing\in\varnothing$，$\varnothing\in\{1, 2\}$。

2 实数与绝对值

在微积分中所考虑的数都指实数。大家知道，实数分成有理数（或比数）和无理数（或非比数）两大类，有理数是形如 $\frac{p}{q}$ 的实数，其中 $p, q\in Z$，$q\neq 0$，其余的（不是有理数）实数为无理数。例如 $\sqrt{2}$，π 等。

实数可用数轴上的点形象地表示出来。在直线 l 上取定一个点 O 作为原点，另外再取一个点代表 1，把这两个点之间的距离作

为度量单位，把从 O 到 1 的方向规定为正方向，称这样规定了原点、方向和长度单位的直线 l 为**数轴**。数轴 l 上的每一点都有一个实数 x 与之对应，该实数 x 称为该点的坐标，以下将不区分点 x 与实数 x。从 O 点到表示 x 的点之间的距离叫做实数 x 的**绝对值**，记成 $|x|$，于是

$$|x|=\begin{cases} x, 当 & x\geqslant 0; \\ -x, 当 & x<0. \end{cases}$$

显然，$|x|\geqslant 0$，且 $|y-x|$ 表示点 x 与点 y 的距离。

为书写方便，我们记

$$[a, b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}，(a, b)=\{x|a<x<b\},$$
$$[a, b)=\{x|a\leqslant x<b\}，(a, b]=\{x|a<x\leqslant b\}.$$

$[a, b]$ 叫做**闭区间**，a, b 叫做**闭区间端点**，$b-a$ 叫做**区间长**；(a, b) 叫做**开区间**，a, b 叫做**开区间端点**，但要注意，$a\notin(a,b)$，$b\notin(a, b)$。$[a, b)$，$(a, b]$ 叫做**半开区间**。

以上的区间都是长度有限的所谓**有限区间**，引入记号 $-\infty$（读作**负无穷大**）和 $+\infty$（读作**正无穷大**），则有以下的无限区间：

$$[a, +\infty)=\{x|a\leqslant x\}，(a, +\infty)=\{x|x>a\},$$
$$(-\infty, b)=\{x|x<b\}，(-\infty, b]=\{x|x\leqslant b\},$$
$$(-\infty, +\infty)=R.$$

但不许写 $[-\infty, +\infty]$ 或 $[a, +\infty]$ 等。

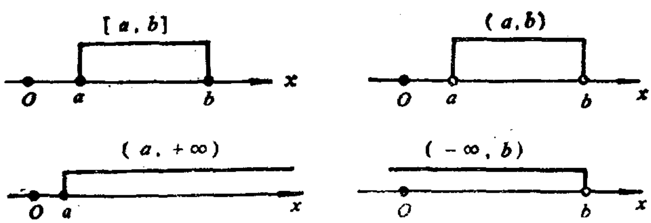


图 1.1

这里应当注意，我们引入的符号 $-\infty$ 与 $+\infty$ 不能作为数来看待。

我们称区间$(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$为$x_0$的$\varepsilon$邻域，若用绝对值不等式表示，即满足$|x-x_0|<\varepsilon$的$x$组成的集合$\{x \mid |x-x_0|<\varepsilon\}$为$x_0$的$\varepsilon$邻域。$x_0$叫做邻域的中心。$\varepsilon$叫做邻域的半径（见图1.2）

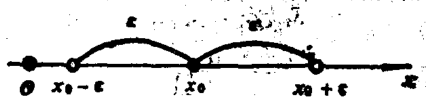


图 1.2

关于绝对值，显然有

$$|a|=\sqrt{a^2}, \quad -|a|\leqslant a\leqslant|a|.$$

此外，关于绝对值运算，有下面四个性质：

(1) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$（三角不等式）；

(2) $|a-b|\geqslant|a|-|b|$；

(3) $|ab|=|a||b|$；

(4) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|} \quad (b\neq 0)$。

证 (1) 由于

$$-|a|\leqslant a\leqslant|a|,$$
$$-|b|\leqslant b\leqslant|b|,$$

两式相加得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|,$$

它与不等式

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

等价。

(2) 因为

$$|a|=|(a-b)+b|,$$

由(1)得

$$|(a-b)+b|\leqslant|a-b|+|b|,$$

于是

$$|a|\leqslant|a-b|+|b|,$$

即得

$$|a-b| \geqslant |a|-|b|.$$

(3)与(4)显然成立，**证毕**。

有时我们需要解带绝对值的不等式，下面举两个这方面的例题。

例 1 解不等式

$$|x-3|<4.$$

解 不等式

$$|x-3|<4$$

与不等式

$$3-4<x<3+4$$

等价，故得

$$-1<x<7,$$

或者说 $x \in (-1, 7)$。

例 2 解不等式

$$|x|>x.$$

解 (1) $x \geqslant 0$ 时 $|x|=x$，代入不等式 $|x|>x$ 得 $x>x$，这是不可能的，即没有非负实数满足 $|x|>x$。

(2) $x<0$ 时，有 $|x|=-x$，代入不等式 $|x|>x$ 得

$$-x>x,$$

移项得 $2x<0$，即得解

$$x<0.$$

从而不等式 $|x|>x$ 的解集为 $\{x \mid x<0\}$，即一切负实数满足不等式 $|x|>x$。

习 题 1.1

1．用区间表示变量的变化范围：

(1) $2<x \leqslant 6$； (2) $x \geqslant 0$； (3) $x^2<9$； (4) $|x-3| \leqslant 4$。

2．对照写出等价的不等式与区间：

例如 （1） $|x|<3 \Leftrightarrow 2^\circ$ $-3<x<3$。

（1） $|x|<3$； 1° $4<x<6$；

（2） $|x-1|<3$； 2° $-3<x<3$；

（3） $|3-2x|<1$； 3° $x>3$ 或 $x<-1$；

（4） $|1+2x|\leqslant 1$； 4° $x>2$；

（5） $|x-1|>2$； 5° $-2<x<4$；

（6） $|x+2|\geqslant 5$； 6° $-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant -1$ 或 $1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$；

（7） $|5-x^{-1}|<1$； 7° $1<x<2$；

（8） $|x-5|<|x+1|$； 8° $x\leqslant -7$ 或 $x\geqslant 3$；

（9） $|x^2-2|\leqslant 1$； 9° $\frac{1}{6}<x<\frac{1}{4}$；

（10） $x<x^2-12<4x$。 10° $-1\leqslant x\leqslant 0$。

3．证明或反驳：

（1） $x<5$ 就是 $|x|<5$；

（2） $|x-5|<2$ 就是 $3<x<7$；

（3） $|1+3x|\leqslant 1$ 即 $x\geqslant -\frac{2}{3}$；

（4） 不存在实数 x，使得 $|x-1|=|x-2|$。

4．解不等式：$|x-A|<\varepsilon$ （$\varepsilon>0$ 为常数）。

5．证明：$|x+y|\leqslant |x|+|y|$。

6．证明：$|x|-|y|\leqslant \big||x|-|y|\big|\leqslant |x-y|\leqslant |x|+|y|$。

§1.2 函 数

1 常量与变量

当我们观察与研究客观世界的各种过程时，会遇到很多不同的量，这些量一般来说都是在不断变化的，这是物质世界不断变化、不断运动、不断发展在量的方面的体现。但在某一特定问题中，某些因素的变化极小，因而可以看作不变，这时与之相应的量叫做**常量**，而不断变化的量叫做**变量**，例如一个密闭容器内的气体

受热时，气体的体积与分子个数是常量，而气体的压强与温度则是变量。

通常用字母 a, b, c 等表示常量，用字母 x, y, z 等表示变量。

初等数学主要研究常量，而高等数学主要研究变量。

2 函数概念

在同一个自然现象、社会现象或技术过程中，往往同时有几个变量变化着，这几个变量并不是孤立地变化，而是互相联系并遵循着一定的变化规律。现在我们以两个变量的情形举出两个实例。

例 1 令 r 为圆的半径，A 为该圆面积，则

$$A=\pi r^2,$$

当变量 r 的值在 $(0, +\infty)$ 内任意取定后，上式即可确定出圆面积 A 的一个相应的数值。

例 2 自由落体下落时间为 t，落下的距离为 s，开始下落时刻为 $t=0$，则 s 与 t 之间的相依关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 是重力加速度，假设物体落地时刻为 $t=T$，那么当时间 t 在 $[0, T]$ 上任意取定时，上式即可确定出相应的 s 值。

上述这种变量之间的对应关系抽象化，就得出下面的函数概念。

定义 1.1 x 与 y 是两个变量，D 是给定的一个数集合，若对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值与它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记成 $y=f(x)$；D 叫做函数 $f(x)$ 的**定义域**，x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**；当 $x_0\in D$ 时，$f(x_0)$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 点的函数值；当 x 取遍 D 的各个值时，对应的函数值全体组成的集合

$$Y=\{y\,|\,y=f(x),\ x\in D\}$$

称为函数 $f(x)$ 的**值域**。

关于函数的记号，除了用 $y=f(x)$ 表示函数外，还可以用 $y=\varphi(x)$，$y=\psi(x)$，$y=F(x)$ 等来标志函数，这里的 f,φ,ψ,F 等是 x 与 y 之间依赖关系的记号，所以不同的函数符号表示不同的函数，$y=\varphi(x)$ 与 $y=\psi(x)$ 不能在同一个题目中表示同一个函数；另一方面，由于**函数的两个要素**，一个是**定义域**，一个是**对应关系**，所以自变量与因变量的字母对于函数是不重要的，例如 $x=\sin t$ 与 $y=\sin x$，当 t 与 x 都是自变量，且 $t\in(-\infty,+\infty)$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 时，我们认为两者是同一个函数，一般地，

$$y=f(x),\ x\in D$$
$$w=f(u),\ u\in D$$

是同一个函数，因为它们的定义域与对应关系是一致的。

关于函数的定义域，在实际问题中，应根据实际意义具体地确定，例如自由落体的下落距离与时间的函数关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

若物体从 H 米高的地方下落，令 $T=\sqrt{\frac{2H}{g}}$，则上述函数的定义域为 $D=\left[0,\sqrt{\frac{2H}{g}}\right]=[0,T]$，对于 $t>T$，虽然 $\frac{1}{2}gt^2$ 数学上仍有意义，但已失去物理意义了。在数学上，我们把使函数的表达式有意义的一切实数组成的集合称为函数的**自然定义域**，今后写出的函数，若未标明定义域，我们就认为是以自然定义域为定义域。求函数的自然定义域只需除去以下三种自变量的值：

(1) 使分母为零的自变量之值；

(2) 使对数的真数为零或负数的自变量的值；

(3) 使偶次方根内被开方数为负数的自变量的值。

例 3 求 $y=\frac{1}{1+x}$ 的定义域。

解 显然，在$\frac{1}{1+x}$中，当且仅当$x+1\neq0$，即$x\neq-1$时表达式才有意义，故函数$y=\frac{1}{1+x}$的定义域为$x\neq-1$，即其定义域为

$$D=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty).$$

例 4 求函数$y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域。

解 要使$\sqrt{1-x^2}\neq0$且$\sqrt{1-x^2}$有意义，当且仅当$1-x^2>0$，即 $|x|<1$，故函数的定义域为

$$D=(-1,1).$$

例 5 求函数$y=\sqrt{(x-a)(b-x)}(b>a>0)$的定义域。

解 要使表达式$\sqrt{(x-a)(b-x)}$有意义，当且仅当$(x-a)(b-x)\geqslant0$，我们分两种情形讨论之。

(1) $\begin{cases}x-a\geqslant0,\\ b-x\geqslant0.\end{cases}$

由此不等式组得 $a\leqslant x\leqslant b$，

(2) $\begin{cases}x-a\leqslant0,\\ b-x\leqslant0.\end{cases}$

由于$b>a>0$，故此不等式无解。

由(1)与(2)知函数定义域为

$$D=[a,b].$$

例 6 求函数$y=\frac{1}{\sin\pi x}$的定义域。

解 欲使$\frac{1}{\sin\pi x}$有意义，只需$\sin\pi x\neq0$，即$x\neq n, n\in\boldsymbol{Z}$，所以函数的定义域为删去整数后的实数构成的集合。

3 函数的表示法

函数的表示法有三种，即：列表法、图象法和公式法，其中列