高等学校教学用书

高等数学

（上册）

北京钢铁学院 何品三 主编

冶金工业出版社

高等学校教学用书

高等数学

（上 册）

北京钢铁学院 何品三 主编

*

冶金工业出版社出版

（北京北河沿大街嵩祝院北巷39号）

新华书店北京发行所发行

冶金工业出版社印刷厂印刷

*

850×1168 1/32 印张 10 1/4字数 270 千字

1986年 4 月第一版 1986年 4 月第一次印刷

印数00,001～23,300册

统一书号：15062·4424 定价1.40元

前　言

1984年8月冶金部高等教育研究会数学学科组在马鞍山钢铁学院举行经验交流会。与会同志普遍感到当前急需一本适应专科需要的高等数学教材，并决定组织编写。1985年元月在沈阳黄金专科学校召开了教材编写讨论会，讨论确定了编写大纲，1985年4月在武汉冶金建筑学校讨论了初稿，并决定按《高等数学》和《工程数学》两门课出书，前者又分为上下两册。

专科的高等数学教学，既不能照搬本科，又不能降低到中专水平。为此，我们是这样安排的：一元微积分是基础，基本教学内容要保证，但理论要求可适当降低；多元微积分要突出重点，只讲基本内容；常微分方程和级数只介绍基本概念及常用解法。总的说来，精简理论，加强计算和应用。总学时为140课时。

本书由北京钢铁学院何品三任主编，参加编写工作的有：沈阳黄金专科学校石忻兰(第二、三章)和冯文奉（第一、四、五章并任上册副主编)；沈阳冶金机械专科学校沈思秀(第六章)、梁维忠(第七章)、王世强(第十章)、邢文斗(第八、九章并任下册副主编)。

本书定稿前东北工学院刘溢名曾详加审阅修改，参加审稿的还有冶金系统各专科学校、部分职工大学和高等院校的周颐龄、李守杰、何德莹、李国殿、郑吉富、饶竹青、刘煜川、汪德震、肖自成、刘延青、黄鹏程、吴健敏、连永康等同志。他们提出了许多宝贵的意见，特在此表示衷心的感谢。

本书的编审工作主要是沈阳黄金专科学校熊汉斌、郑宏业同志组织的，武汉冶金建筑专科学校黄伟策同志也参加组织了审稿工作。

由于我们水平有限，编写时间仓促，书中难免有不少缺陷甚至谬误，敬请使用本书的同志们批评指正。

编者

1985年9月

目　录

第一章　极限与连续

函数是微积分学的主要研究对象，极限是讨论函数的基本方法．实数、函数和极限是微积分的基础．本章在复习和总结有关函数知识之后，着重介绍极限、无穷小、函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质．

第一节　函　　数

一、函数有关知识

1．函数概念

这里讲的函数是单元实数值函数．因此，在这小节和以后章节中谈到的数，都是实数．

定义 1　设A是一个数集．如果有一个规则f，使每个数$x\in A$，通过f，都有且仅有一个数确定的y与之对应，则称规则f是A上的**函数**．A称为函数f的**定义域**，和数x对应的数y，记为$y=f(x)$，称为函数f在x处的**函数值**．函数符号为：

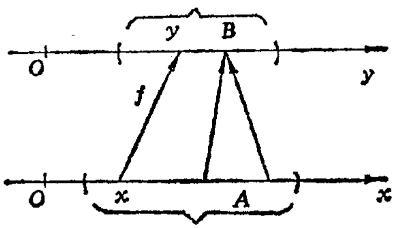


图 1-1

“$x\xrightarrow{f}y,\ x\in A$”

“$y=f(x),\ x\in A$”

或者干脆用“$f(x),\ x\in A$”表示“定义域是A的函数f”．在$f(x)$用解析式（例如，$f(x)=\sqrt{1-x^2}$）给出函数f的情况

下，由于定义域隐含在该式中，我们可以不写出定义域而把所定义的函数 f 就简单的记为"$f(x)$".要注意的是，这里符号 f 表示函数，$f(x)$表示函数值，两者是有区别的！今后，提到"$f(x)$，$x\in A$"或"$f(x)$"都要按这里谈论的意义来理解，来叙述.

对于每个$x\in A$，都说函数 f 在 x 处有定义．所有函数值的集$B=\{y|y=f(x),x\in A\}$称为函数 f 的**值域**，也可记为 $f(A)$．规则f所确定的$x\in A$与$y\in B$的对应关系见图1-1.

如果想象让 x 动起来而取遍A上的所有值，那末符号 x 就成为A上的变量，称为函数 f 的**自变量**．这时，符号$f(x)$就随之而成为$f(A)$上的变量，称为函数 f 的**因变量**．如果把x，$f(x)$联在一起，当 x 取遍 A 上的所有值时，那末 $(x, f(x))$ 便成为坐标平面上的动点M了．动点M的轨迹，即点集$\{(x, y)|y=f(x),x\in A\}$一般是一条平面曲线，例如图 1-2 所示．通常称为函数 f 的图形，有时也说曲线$y=f(x)$.

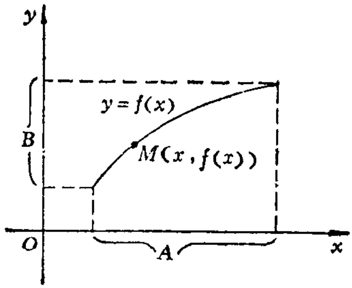


图 1-2

用R 表示所有实数的集，那末$B\subset R$，因此也称上述定义的函数 f 是由数集A到$\boldsymbol{R}$**内**的函数，或称 f 是由数集A到 $\boldsymbol{B}$ **上**的函数．规则 f 建立了$x\in A$与$y\in R$的一个特殊的对应关系，即**单值对应**：每一个$x\in A$，只有一个$y\in R$与之对应．这样，便可以说，函数概念的实质就是一个单值对应.

2．反函数

定义 2 如果给定的函数 f 是由数集A到数集B上的函数且A与B是**双方单值对应**，那末，f 的逆对应就确定一个由 B 到 A 上的函数f^{-1}：$y\xrightarrow{f^{-1}}x$，$y\in B$

或 $$x=f^{-1}(y),\quad y\in B$$

称f^{-1}为 f 的**反函数**（图1-3）.

由反函数的定义，我们注意到：

（1）反函数是相互称呼的，即若 f^{-1}是 f 的反函数，则 f 也是f^{-1}的反函数.

（2）f 的定义域A和值域B分别是f^{-1}的值域和定义域.

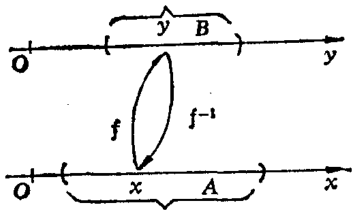


图 1-3

象常见的情形那样，如果函数 f 的图形是一段曲线，那末反函数 f^{-1}的图形是同一段曲线（图1-4(a)）．不过 x、y 改换了称呼，即 y 是反函数 f^{-1} 的自变量，x 是f^{-1}的因变量.

如果坚持 x 表示自变量，y 表示因变量，我们也称$y=f(x)$，$x\in A$和$y=f^{-1}(x)$，$x\in B$互为反函数．这时，函数 f 的图形与函数f^{-1}的图形是关于分角线$y=x$对称的两段曲线（图1-4(b)）.

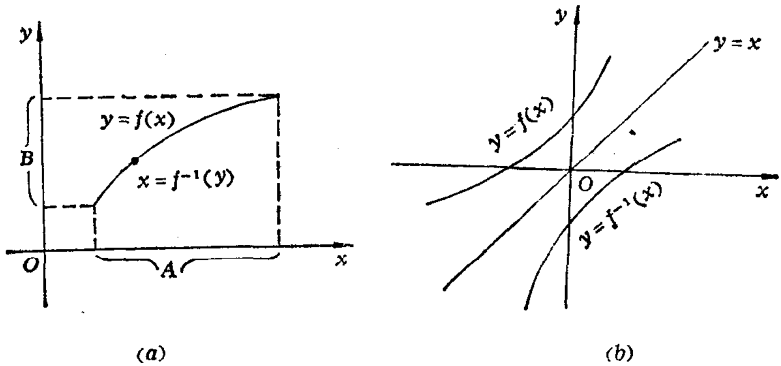


图 1-4

3．某些函数的特性

（1）单调性

定义 3 如果对于区间 I 的任意两点$x_1<x_2$，都有$f(x_1)<f(x_2)$（或$f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 f 在 I 上是**单调递增函数**（**或单调递减函数**）.

在区间 I 上的单调递增函数和单调递减函数统称为在区间 I 上的**单调函数**，而区间 I 称为函数的**单调区间**.

单调递增函数的图形，自左至右看，是上升曲线（图1-5）；单调递减函数的图形，自左至右看，是下降曲线（图1-6）.

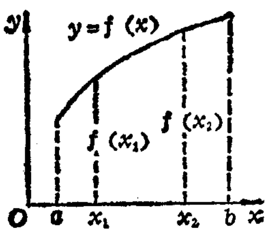


图 1-5

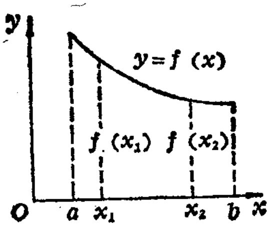


图 1-6

（2）奇偶性

定义 4 给定函数$f(x)$，$x\in A$.如果对于任意一个$x\in A$，都有$(-x)\in A$且$f(-x)=-f(x)$（或$f(-x)=f(x)$）则称f是A上的**奇函数**（或**偶函数**）.

奇函数的图形一定关于原点对称（图1-7）；偶函数的图形关于y轴对称（图1-8）. 注意A必须是关于原点**对称**的任意一个数集，如A包含原点，则奇函数的图形通过原点.

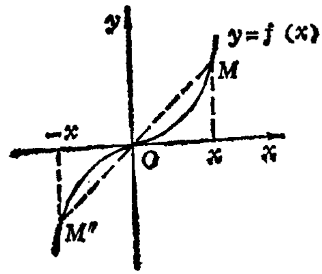


图 1-7

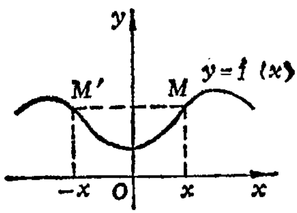


图 1-8

（3）周期性

定义 5 给定函数$f(x)$，$x\in A$，如果存在一个常数$l>0$，对于任意一个$x\in A$，使$x+l\in A$且都有$f(x+l)=f(x)$，则称

函数 f 为**周期函数**，l 是它的**周期**。

图1-9表示一个以 l 为周期的周期函数的图形．由图1-9可知在函数的定义域内，每一个长为 l 的区间上，函数的图形都有相同的形状．

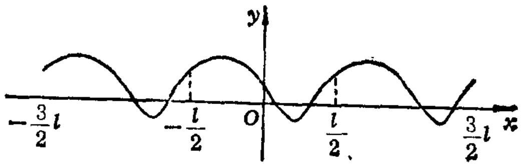


图 1-9

（4）有界性

定义 6　给定函数 $f(x)$，$x\in A$，如果存在两个数 m 和 M，使得对于任意一个 $x\in A$，都有

$$m\leqslant f(x)\leqslant M$$

则称函数 f 在 A 上是**有界的**，m 和 M 分别称为函数 f 在 A 上的一个**下界**和一个**上界**．如果至少这样的数 m 和 M 有一个不存在，就说函数 f 在 A 上是**无界的**．或者换一个说法：如果存在一个数 $K>0$，使得对于任意一个 $x\in A$，都有

$$|f(x)|\leqslant K$$

则称函数 f 在 A 上是有界的，如果这样的数 $K>0$ 不存在，就说函数 f 在 A 上是无界的．函数有界性的这两个说法是一回事，我们不去深究了．不过，两种说法各有方便之处，用起来看具体情况．

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $A=(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为 x 取任意数，都有 $|\sin x|\leqslant 1$．此时，$K=1$，或 $m=-1$，$M=1$．再如函数 $y=\operatorname{tg}x$ 在 $A=\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 内是无界的，因为不存在这样的数 $K>0$ 使 $|\operatorname{tg}x|\leqslant K$ 对于每一个 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 都能成立；但它

在$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$上是有界的，因为这时，对于每一个$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，$|\mathrm{tg}x|\leqslant 1$都成立.

显然，有界函数的图形能介于两平行直线$y=\pm K$之间；而无界函数的图形，不论取怎样的$K>0$，都不能使它的所有点全都介于两平行直线$y=\pm K$之间.

4. 基本初等函数

在中学数学中，常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数等称为**基本初等函数**. 在高等数学中，仍因袭这个术语. 为了便于今后使用和查阅，现将它们的图形和性质表列于表1-1中.

二、复合函数　初等函数

定义 7　设$y=f(u)$是数集B上的函数，$u=\varphi(x)$是数集A到B的函数，因此，对于每一个$x\in A$，经过u，都有确定的值$y=f(\varphi(x))$与它对应，这时就产生了在数集A上的一个新的函数，用$f\circ\varphi$表示，称为φ与f的**复合函数**，记为

$$x\xrightarrow{f\circ\varphi}y,\ x\in A\text{或}f\circ\varphi(x)=f(\varphi(x)),\ x\in A.$$

其中u称为**中间变量**，A是复合函数的定义域. 应当强调一下，“φ是由A到B的函数”是说φ的值域$C=\{u\,|u=\varphi(x),x\in A\}$必需包含于函数$f$的定义域$B$而不必和$B$相等，即$C\subset B$. 复合函数$f\circ\varphi$与函数$\varphi$，$f$的关系见图1-10. 注意$u$轴上介于{　}之

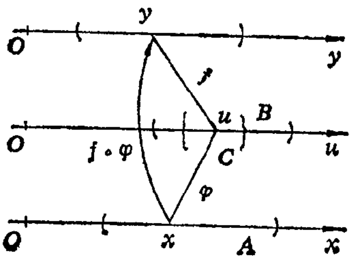
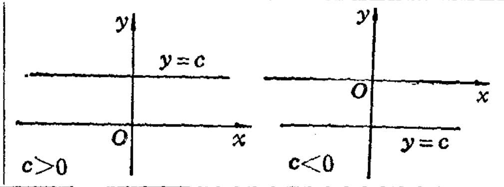
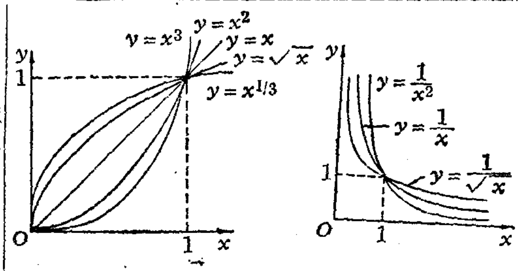
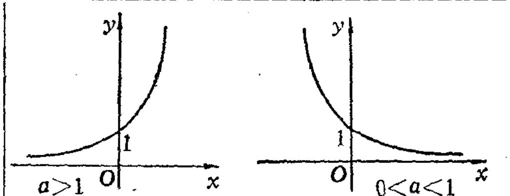
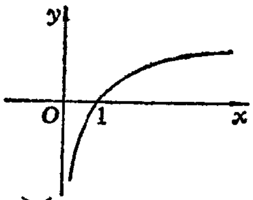
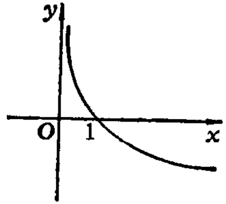
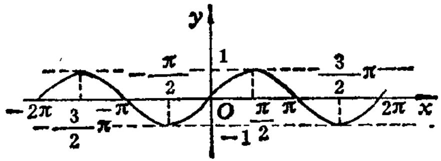
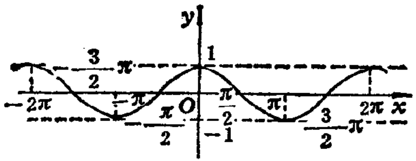


图 1-10

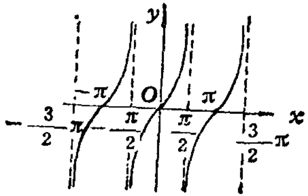
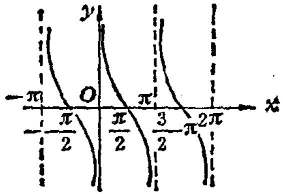
表 1-1

名称	解析式	定义域	图形	简单性质
常值函数	$y=c$	$(-\infty, +\infty)$		图形是平行于 x 轴的直线. $c=0$ 时，图形是和 x 轴重合的直线。
幂函数	$y=x^{\alpha}$	随 α 而定，但在 $(0,+\infty)$ 内都有定义		图形通过点 $(1, 1)$ 在第一象限内，当 $\alpha>0$ 时，x^{α} 为递增函数；当 $\alpha<0$ 时，x^{α} 为递减函数。
指数函数	$y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$	$(-\infty, +\infty)$		$a^x>0$。图形在 x 轴上方，过点 $(0, 1)$。当 $a>1$ 时，a^x 为递增函数；当 $0<a<1$ 时，a^x 为递减函数。

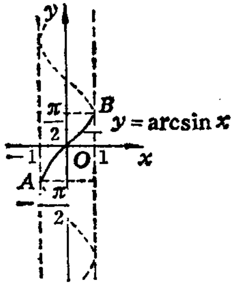
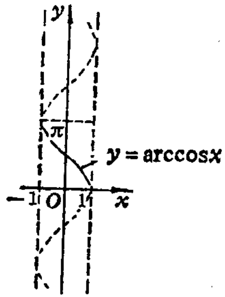
续表 1-1

名称		解析式	定义域	图形	简单性质
对数函数		$y=\log_a x$ $(a>0, a\neq1)$	$(0, +\infty)$	 $a>1$  $0<a<1$	图形在y轴的右侧，过点$(1,0)$。当$a>1$时，$\log_a x$为递增函数；当$0<a<1$时，$\log_a x$为递减函数。
三角函数	正弦函数	$y=\sin x$	$(-\infty, +\infty)$		以2π为周期的奇函数。图形对称于原点O、有界的，图形界于直线$y=\pm1$之间。
	余弦函数	$y=\cos x$	$(-\infty, +\infty)$		以2π为周期的偶函数。图形对称于y轴。有界的，图形界于直线$y=\pm1$之间。

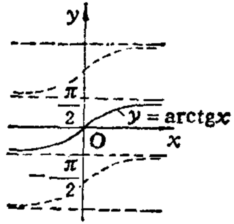
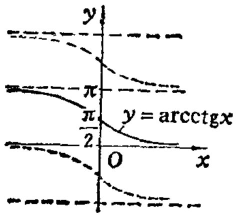
续表 1-1

名称		解析式	定义域	图形	简单性质
三角函数	正切函数	$y=\mathrm{tg}x$	$x\neq(2k+1)\pi/2$（k为整数）的全体实数		以π为周期的奇函数。图形对称于原点o。 在$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$内是递增函数。
	余切函数	$y=\mathrm{ctg}x$	$x\neq k\pi$（k为整数）的全体实数		以π为周期的奇函数。图形对称于原点o。在$(0,\ \pi)$内是递减函数。

续表 1-1

名称		解析式	定义域	图形	简单性质
反三角函数	反正弦函数	$y=\text{Arcsin}x$	$[-1, 1]$		$y=\text{Arcsin}x$主值为 $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$，记为 $y=\arcsin x$。 $y=\arcsin x$为单调递增的奇函数。
	反余弦函数	$y=\text{Arccos}x$	$[-1, 1]$		$y=\text{Arccos}x$主值为 $0\leqslant y\leqslant\pi$，记为 $y=\arccos x$。 $y=\arccos x$为单调递减函数。

续表 1-1

名称		解析式	定义域	图形	简单性质
反三角函数	反正切函数	$y = \mathrm{Arctg}x$	$(-\infty, +\infty)$		$y = \mathrm{Arctg}x$ 主值为 $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$，记为 $y = \mathrm{arctg}x$，为单调递增的奇函数。
	反余切函数	$y = \mathrm{Arcctg}x$	$(-\infty, +\infty)$		$y = \mathrm{Arcctg}x$ 主值为 $0 < x < \pi$，记为 $y = \mathrm{arcctg}x$，为单调递减函数。

间的部分表示C，（ ）之间的部分表示B，y轴上介于（ ）之间部分表示$f\circ\varphi$的值域.

例 1 给定函数$f(u)=\arcsin u$，$u\in[-1,1]$和$\varphi(x)=\ln x$，$x\in(0,+\infty)$. 问φ与f能否形成以$(0,+\infty)$为定义域的复合函数$f\circ\varphi$？

解 由于函数φ的定义域是$A=(0,+\infty)$，它的值域是$C=(-\infty,+\infty)$，而函数f的定义域是$B=[-1,1]$. 因为$C\not\subset B$，所以，按上述定义，φ与f不能形成复合函数$f\circ\varphi(x)=(f\circ\varphi)(x)$，$x\in A=(0,+\infty)$.

如果在$D=\left[\frac{1}{e},e\right]$上考虑$\ln x$，即把$\varphi$的定义域限制到$D\subset A$，那末，由于定义域的改变已不是原来的函数$\varphi$了，而是另一个函数，称为**$\varphi$到$D$的限制**，记作$\varphi|_D$，即$(\varphi|_D)(x)=\ln x$，$x\in\left[\frac{1}{e},e\right]$，这时函数$\varphi|_D$的值域是数集$[-1,1]$，它包含于函数$f$的定义域$B=[-1,1]$，即$[-1,1]\subset B=[-1,1]$. 所以我们说函数$\varphi|_D$与函数$f$能形成复合函数$f\circ\varphi|_D$，即$f\circ\varphi|_D(x)=\arcsin(\ln x)$，$x\in\left[\frac{1}{e},e\right]$. 若是对符号$\varphi|_D$感到累赘，我们干脆说，**函数$\varphi$到$D$的限制**能与$f$形成以$D$为定义域的复合函数. 今后碰到类似情况都是在这种意义下来理解复合函数.

利用复合函数概念可以把一些比较复杂的函数拆成几个基本初等函数. 这对以后求函数的导数和积分是很有用的.

例 2 指出下列各复合函数的复合过程：

（1）$y=\sin 2x$； （2）$y=\sqrt{a^2-b^2\cos^2 x}$

（3）$y=\ln(\sin e^x)$；（4）$y=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x^2}{1-x}}$

解 所谓指出复合函数的复合过程，就是要指出复合函数是由哪些基本初等函数复合而成的.