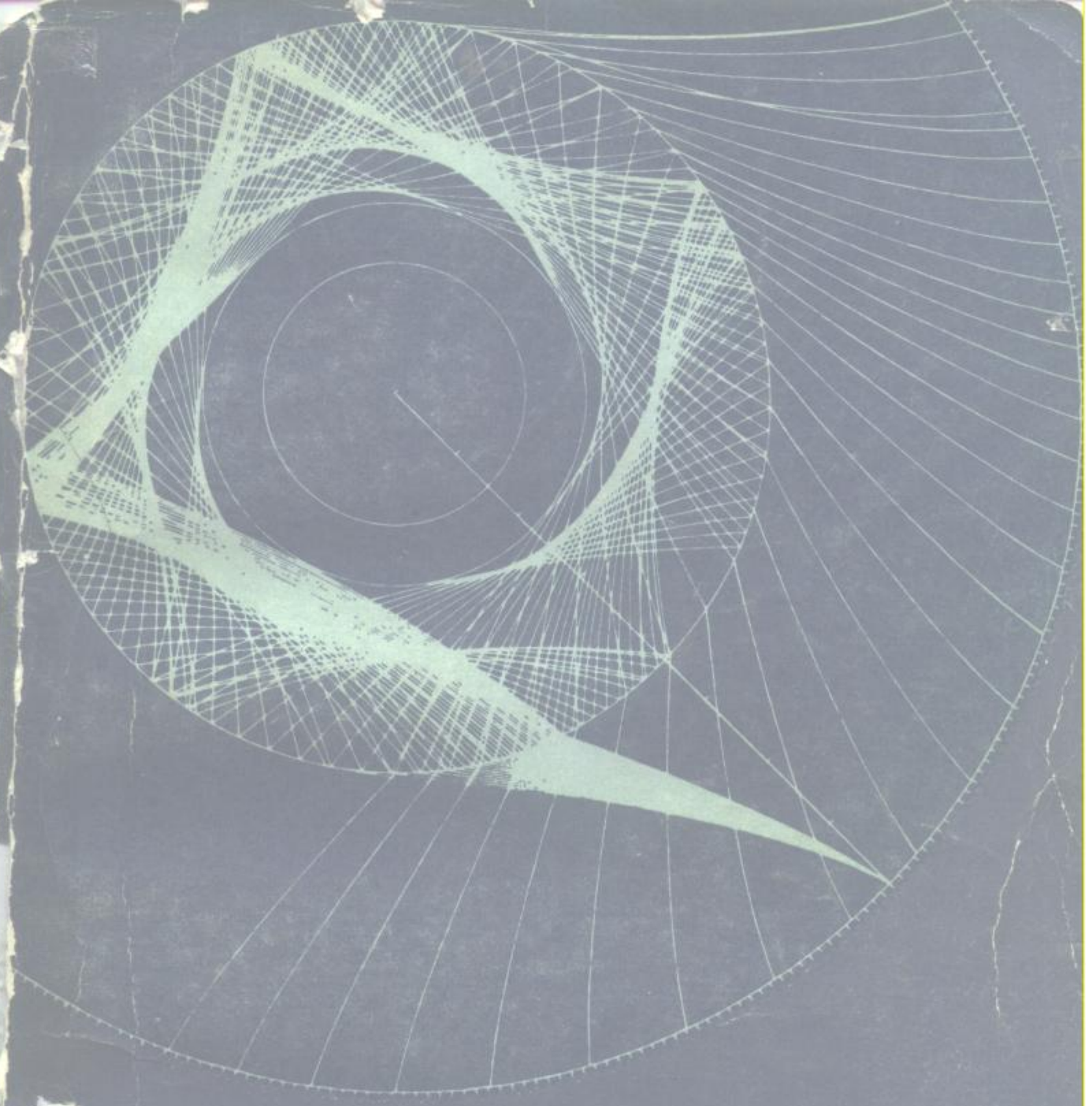

固体中的波

郭自强　编著

地震出版社

固 体 中 的 波

郭自强 编著

科 学 出 版 社

内容简介

本书主要介绍固体中各种线性波，内容包括弹性体、热弹体、粘弹体的基本理论，弹性波、热弹波、粘弹波、磁弹波、磁热弹波、磁热粘弹波的特性及分析方法，章末并有必要的数学附录。

本书可供高等学校物理、地球物理、力学等专业的教师高年级学生以及从事声学、地震学、地球内部物理学、地质力学的科研工作者参考。

固 体 中 的 波

郭自强 编著

地震出版社 出版

北京复兴路63号

北京朝阳区展望印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

850×1168 1/32 11 1/4印张 287千字

1982年8月第一版 1982年8月第一次印刷

印数0000—4000

统一书号：13180·171 定价：1.40 元

前　　言

扰动沿空间的传播称为波。波是物质运动的一种重要形式，任何一种波总携带着波源及传播介质物理特性的信息。利用这种特点，人们常常把波作为传递信息和研究介质物理特性的重要手段。对于空间中的电磁波（包括光波）和空气中的声波，我们是很熟悉的。作为波动问题的一个分支，固体中的波也已成为一些科学技术领域中的重要问题。例如利用弹性波和粘弹波在地球介质中的传播，我们可以获得地球内部结构和物质状态的知识；测量超声波的传播速度和衰减，可以推知固体材料的某些力学特性；研究形变过程中位错运动和微破裂产生的声发射，可以判断固体内部发生的某些过程；材料的无损检验与全息技术是波动特性的直接应用。由此可见，研究固体中的波动特性，无论在论理上和实际应用上都有重要意义。

固体中的波与气体、流体中的波以及电磁波相比，虽然性质是不同的，但在研究方法上，存在许多共同之处。因此研究固体中的波对了解其它形式的波也将有所帮助。

作为近似描写，固体可以看成是完全弹性体。在弹性体中传播的波称为弹性波。实际固体不是完全弹性体，而是除弹性外还具有粘滞性的粘弹体，粘弹体中传播的波称为粘弹波。粘弹波与弹性波相比具有许多不同特点，例如粘弹波在传播过程中不仅波的振幅会发生衰减，而且有频散现象。从电性质和热性质考虑，固体可能是导电体和导热体，当固体中各部分温度也不尽相同。因此，波在固体中传播时，会引起机械运动与热运动的相互耦合，这种波称为热弹波。如果弹性体是良导体，又处在恒定外磁场中，则机械运动还会与电磁场发生相互作用，形成电磁弹性波（简称磁弹性波）、磁热弹性波和磁粘弹波。本书将在线性理论

范围内，研究上述几种波。

按照由浅入深的次序，本书第一章叙述固体的力学性质，第二章建立连续体基本方程，第三章讨论弹性体本构关系，第四、五章讨论弹性波，第六、七章讨论热弹体和热弹波，第八、九章讨论粘弹体和粘弹波，第十章介绍固体中的耦合波。

为了简化数学表示形式，本书采用张量符号，并假定读者具有矢量分析、数理方程、线性代数、热力学、电动力学等基础知识。一些必要的数学公式放在各章附录中，以便参考。

本书着重基本理论，取材上照顾了地球物理方面的问题。因此，在一般力学书中叙述较多的结构方面的问题，本书很少涉及。对这方面有兴趣的读者，可以参阅其它书籍。

编者水平所限，错误难免，敬希读者批评指正。

编　　者

1980.8.

目　　录

第一章　固体的力学性质

§1.1　应力-应变曲线 ……………………………… 2
§1.2　弹性……………………………………………… 4
§1.3　范性……………………………………………… 7
§1.4　蠕变和弛豫……………………………………… 8
§1.5　粘性流体………………………………………10
§1.6　简单粘弹体……………………………………12
§1.7　蠕变弛豫函数…………………………………16
§1.8　键力……………………………………………19
§1.9　位能曲线………………………………………21
§1.10 晶体结构………………………………………23
§1.11 弹性的微观解释………………………………27
§1.12 固体的缺陷与范性……………………………28
附录1.1 δ函数 ……………………………………33

第二章　连续体基本方程

§2.1　张量符号………………………………………37
§2.2　应变张量………………………………………41
§2.3　旋转张量………………………………………46
§2.4　应变主轴………………………………………48
§2.5　应力张量………………………………………51
§2.6　应力主轴………………………………………53
§2.7　物质和空间变数………………………………57
§2.8　质量方程………………………………………61
§2.9　动量方程………………………………………62

§2.10 角动量方程……………………………………………… 64
附录2.1 笛卡尔张量…………………………………………… 65
附录2.2 相似矩阵的特征值…………………………………… 69
附录2.3 哈密顿算符…………………………………………… 71

第三章　弹性体

§3.1　形变热力学……………………………………………… 74
§3.2　完全弹性体……………………………………………… 76
§3.3　各向同性弹性体………………………………………… 80
§3.4　小形变简化……………………………………………… 83
§3.5　弹性体基本方程………………………………………… 85

第四章　弹性波的传播

§4.1　各向同性弹性体内的波………………………………… 88
§4.2　晶体中的波……………………………………………… 92
§4.3　平面波…………………………………………………… 96
§4.4　平面波的能量……………………………………………100
§4.5　半无限介质中的波………………………………………102
§4.6　平面波在自由界面上的反射……………………………108
§4.7　瑞利波……………………………………………………113
§4.8　平面波在介质分界面上的反射、折射…………………117
§4.9　单层介质中的瑞利波……………………………………120
§4.10 单层介质中的洛夫波……………………………………124
§4.11 SH波在柱形腔上的散射 ………………………………126
§4.12 纵波在球体上的散射……………………………………132
附录4.1 曲线坐标……………………………………………139
附录4.2 贝塞耳函数…………………………………………147

第五章　弹性波的激发

§5.1　SH波源 …………………………………………………150

§5.2 两维位移场……155
§5.3 非齐次波动方程的性质……161
§5.4 集中力激发的波……164
§5.5 球腔激发……171
§5.6 柱腔激发……180
§5.7 初值问题……184
附录5.1 积分变换……187

第六章 热弹体

§6.1 热力学定律……195
§6.2 热力学函数……196
§6.3 固体的导热性质……198
§6.4 热弹体本构方程……201
§6.5 热传导方程……205
§6.6 热弹体基本方程……207

第七章 热弹波

§7.1 横波波速……212
§7.2 平面简谐波……215
§7.3 传播和衰减特性……218
§7.4 耦合特性……225
§7.5 热弹瑞利波……228

第八章 粘弹体

§8.1 力学模式……233
§8.2 粘滞张量……237
§8.3 简单粘弹体中的波……239
§8.4 Q 值……244
§8.5 线性粘弹体理论……246
§8.6 函数间的关系……251

§8.7 三维理论……………………………………………255

第九章 粘弹波

§9.1 粘弹体中的波……………………………………257
§9.2 粘弹波的波型……………………………………263
§9.3 粘弹波的能量……………………………………267
§9.4 能量耗散…………………………………………274
§9.5 SH 波……………………………………………277
§9.6 S-II波的反射、折射特性………………………281

第十章 固体中的耦合波

§10.1 电磁运动的基本规律 ……………………………288
§10.2 介质的电磁性质 …………………………………293
§10.3 麦克斯韦应力张量 ………………………………298
§10.4 电磁场能量 ………………………………………301
§10.5 运动媒质效应 ……………………………………302
§10.6 磁弹性方程 ………………………………………307
§10.7 不可压缩介质中的磁弹性波 ……………………309
§10.8 磁弹性平面波 ……………………………………312
§10.9 应变效应 …………………………………………317
§10.10 磁弹性 SH 面波 ………………………………321
§10.11 磁热弹波 …………………………………………325
§10.12 磁粘弹波 …………………………………………329
§10.13 磁热粘弹波 ………………………………………333
§10.14 有初始应力下的磁粘弹波 ………………………341

第一章 固体的力学性质

实验证明，固体中可以传播机械波，固体波动的传播特性与固体力学性质有密切关系，因此在研究固体的波动以前，对固体的力学性质作一简要介绍。

在研究固体运动时，为了简化问题，常把固体理想化为刚体。所谓刚体，就是在运动过程中固体的体积和形状均不发生变化。实际固体当然不是刚体，在外力作用下，固体会发生形状和体积的变化，这种变化统称为形变。固体的力学性质就是指在外力作用下固体的形变特性。固体的形变特性不仅与固体所处的状态（如温度、压力）有关，也与外力作用的时间长短和力的强度有关。固体的形变特性也称为固体的流变性。固体的流变性质与固体的微观结构、键力性质及固体中存在的缺陷有关。从微观结构去阐明固体的力学性质是研究固体的一种重要方法，并在固体物理学中广泛使用。除此之外，为了研究固体的宏观力学性质，还可从实验中找出固体的形变特性，并用一些数学上可以表示出的简单模型去近似描述它们，具体地说，就是要找出各类固体的应力应变关系（即所谓本构方程），并以它作为基础去研究固体的宏观运动规律。

上述两种方法各有自己的适用范围，当所研究的问题涉及分子、原子大小的空间尺度时，微观方法显然是必须的，而当我们研究固体的宏观运动时，即问题涉及的尺度比分子、原子大得多时，宏观方法就十分简便。我们着重介绍第二种方法，对于固体力学性质只从微观结构给以定性解释，目的在于对所研究的对象有一个具体的物理图象，以便了解所用数学模型的适用范围。

本章首先介绍从实验建立起来的固体宏观形变规律，再引入描述宏观性质的物理量及数学表示法，最后从微观结构给以定性

解释。

§1.1 应力-应变曲线

我们首先研究静力作用下固体处于平衡状态下的形变特性。

固体的形变可分为几类，最简单最基本的是单向拉伸和压缩形变。图1.1a是单向拉伸实验的示意图。设长为 l 截面积为 A 的

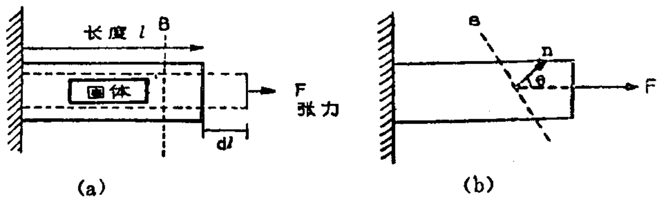

图 1.1

均匀杆，左端固定，右端受力 F 作用，杆由原长 l 伸长到 $l+dl$。我们用绝对伸长 dl 与原长之比 $e=dl/l$ 来表示杆的形变程度，并称为应变；用单位面积所受之力 F/A 表示力的强度。在这种力作用下，组成固体的分子将偏离原来的平衡位置，从而在固体内部出现一种称为内应力的恢复力。内应力是由分子间的相互作用引起的一种力，它的作用半径很小，只能从一点到达它的邻近点。物本任一部分受到的来自各方的应力，只能直接通过该部分的表面起作用。因此应力是一种面力。面力的一个重要特性是力的大小和方向与所取面积的方向有关，这就使得应力的数学表示比通常的体力更为复杂。

在图1.1a中垂直于杆轴方向取平面 B 将杆切成两段，当杆拉伸时，B 面左边分子将有力作用于 B 平面上，当杆处于平衡状态时，按平衡条件，作用于 B 平面上的力 F_1 应等于 F，但方向向左。我们把单位面积上恢复力 $\sigma=F_1/A\left(=\frac{-F}{A}\right)$称为应力。在上例中，杆上任一截面上的应力都相同，并等于σ，我们称杆具有均

匀应力。

如果平面 B 沿倾斜方向切割杆体，面B的法线方向 n 与杆轴的夹角为 θ，对 B 面右边杆体，由平衡条件可以得到 B 面上应力的合力应等于 F。将这个力分解成两个分量，一个与面 B 垂直，用N 表示。另一个平行于 B面，用S表示（图1.1b）。从图可知，

$$N = F\cos\theta,$$

$$S = F\sin\theta.$$

考虑到平面 B 斜截杆体的截面面积$A' = A/\cos\theta$，用A'除以 N，S 可得：

$$\sigma_n = \cos^2\theta\left(\frac{F}{A}\right),$$

$$\sigma_\tau = \sin\theta\ \cos\theta\left(\frac{F}{A}\right),$$

这里 σ_n表示垂直于平面 B 的应力称为正应力，σ_τ表示平行于B平面的应力称为切应力。上述结果说明，正应力、切应力均随 θ 角变化，即与 B 面的方向有关。当 $\theta = 0$ 时，σ_n 最大。当 $\theta = 45^\circ$ 时，σ_τ最大且等于$\frac{1}{2}\left(\frac{F}{A}\right)$。

这个例子说明应力与面积的取向有关，应力矢量（σ_n，σ_τ）是与另一矢量（面积法线的单位矢量）相联系的矢量，具有这种性质的量称为张量，应力是一种张量。关于应力的性质和张量概念，我们放在第二章中讨论。

为了研究固体的拉伸性质，暂不考虑应力的一般表示方法，只从实验上找出应变与垂直杆轴平面上的正应力的相互关系，即对不同的正应力测出固体的瞬态响应应变，这样的曲线称为应力应变曲线（如图1.2）。

除拉伸形变外，另一种重要的形变是切变。图 1.3 是切变的示意图。设矩形六面体的截面为 $abcd$，六面体底面面积为 A，高为 l。当六面体下底面固定，上表面受平行于表面的切向力 F 作用时，上下表面沿力的方向相对移动一段距离 Δt。如果形变是

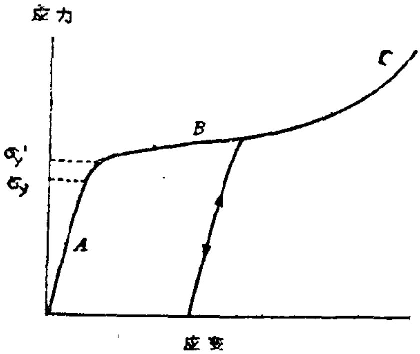

图 1.2

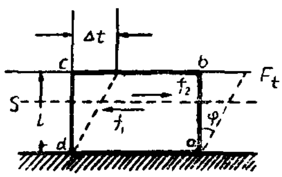

图 1.3

均匀的，则平行于底面的所有平面都有平移。物体内平行于ab的直线都和 ab 一样偏转一个角度 φ 。$\frac{\Delta t}{l}$表示单位高度上的切变大小，当切变不大时，因 $\Delta t/l=\mathrm{tg}\varphi\simeq\varphi$，所以可以用角 φ 表示切应变。为了以后计算方便（见第三章），习惯上定义切应变 $e_\tau=\varphi/2$。

与拉伸形变时出现的应力相似，固体切变时，平行于六面体上下表面方向的平面上将出现内应力，从平衡条件知这种应力的大小等于 F/A，我们称它为切应力并用 σ_τ 表示。

为了找出固体切变时的力学性质，可以对固体进行切变试验，得到切变时的应力应变关系曲线。实验证明，切变时的应力应变曲线与拉伸的应力应变曲线有相似形状。

§1.2 弹　　性

从图1.2的应力应变曲线看到，当外力较小时，形变不大，应力和应变有单值线性关系，相当于曲线的直线部分。在这一范围内，如果去掉外力，物体就恢复原状，这种形变称为弹性形变。在弹性形变时，应力与应变成正比关系，这一规律称为胡克定律。当应力超过某一数值 σ_y，胡克定律不成立，即应力与应变不成线性关系，相应的 σ_y 称为比例极限。在比例极限内，去除外力，物体仍可恢复原形。当应力继续增大到 σ_y'时，外力去

除后物体不能恢复原形，相应的$\sigma_y{}'$称为弹性极限。

在胡克定律成立的范围内，应力与应变的比值是描写固体弹性的物理量，称为弹性模量，即

$$弹性模量=应力/应变.$$

因为应变是无量纲的量，所以弹性模量的量纲与应力相同。对不同的形变，有不同的弹性模量。下面介绍几种弹性模量。

当固体受到拉伸（或压缩）时，应力与应变的比值称为杨氏模量，并用Y表示，即

$$Y=\sigma/e=\frac{F}{A}\Big/\frac{\Delta L}{L}=\frac{FL}{A\Delta L}, \tag{1.2.1}$$

式中各量意义与前节相同。当$\Delta L<0$时，表示压缩。杨氏模量的大小与固体性质有关。

当杆受到纵向拉伸时，杆的横切面积也将变化，拉伸时变小，压缩时增大。如果杆的纵向应变为$\Delta L/L$，横向应变为$\frac{\Delta d}{d}$（即横截面的长或宽的相对变化），我们把横向应变与纵向应变之比的负值称为泊松系数，用ν表示：

$$\nu=-\frac{\Delta d}{d}\Big/\frac{\Delta L}{L}. \tag{1.2.2}$$

对于大多数固体，ν都介于0到1/2之间。对于大多数金属，ν介于1/4到1/3之间。这就是说杆受到拉伸时（$\Delta L>0$）截面变细了（$\Delta d<0$）。

当杆只有纵向拉伸时，可以求得杆的体积变化与泊松系数的关系。设杆的横截面为正方形，每边长为d。当杆受拉伸时，边长变化为Δd，保留Δd的一次项时，面积的相对变化为

$$\frac{\Delta A}{A}\simeq-2\nu\frac{\Delta L}{L}. \tag{1.2.3}$$

因为只有纵向拉伸，所以杆的体积相对变化为

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{\Delta(L\cdot A)}{L\cdot A}\simeq\frac{\Delta L}{L}(1-2\nu), \tag{1.2.4}$$

式中A为杆的截面积，V为杆的体积。

切变弹性模量μ定义为切应力与切应变比，如果令$e_\tau=\dfrac{\varphi}{2}$为切应变，$F/A$为切应力，则

$$\mu=\frac{F}{A}\Bigg/\left(\frac{\varphi}{2}\right)=\frac{2F}{A\varphi}. \qquad (1.2.5)$$

这里令 $e_\tau=\varphi/2$ 而不是φ， 目的在于与以后引入的拉梅系数一致。对大多数各向同性固体，切变模量约等于杨氏模量的0.4倍。

为了对于固体的弹性模量有定量概念，表1列出了几种固体的弹性模量。

表1　　　　弹性模量（达因/厘米^2）

物　质	Y	μ	物　质	Y	μ
铝	7×10^{11}	2.5×10^{11}	铜	12×10^{11}	4.5×10^{11}
黄铜	9×10^{11}	3×10^{11}	钢	23×10^{11}	8×10^{11}
银	7.7×10^{11}	2.8×10^{11}	玻璃	8×10^{11}	3.3×10^{11}
铁	20×10^{11}	8×10^{11}	水晶	5.6×10^{11}	3×10^{11}
铅	1×10^{11}	2×10^{11}	木	0.9×10^{11}	

当物体各方向受到均匀压强P时体积为V，压强增加ΔP时，体积的增量为ΔV，此时应力为ΔP，应变为$\dfrac{\Delta V}{V}$。由于压强增加时体积减小，故体积的增量为负值。体积弹性模量定义为

$$K=-\Delta P\Big/\frac{\Delta V}{V}. \qquad (1.2.6)$$

考虑一块立方体（图1.4），每边长为l，沿三个互相垂直的方向加压强ΔP。在平行某压强方向，压强引起的相对伸长为$\dfrac{\Delta l}{l}$（Δl为负值），根据泊松系数的定义，在垂直此方向的相对伸长为$-2\nu\dfrac{\Delta l}{l}$（因每个方向的相对伸长受到两个垂直压强

的影响，所以是2倍）、从杨氏模量定义

$$\frac{\Delta l}{l}=-\Delta P/Y, \qquad (1.2.7)$$

可以得到每一边总的相对伸长量 $\frac{\Delta l'}{l}$ 为

$$\frac{\Delta l'}{l}=(1-2\nu)\frac{\Delta l}{l}=\frac{\Delta P}{Y}(2\nu-1). \qquad (1.2.8)$$

又因 $V=l^3$，

$$\frac{\Delta V}{V}=3\frac{l^2\Delta l'}{l^3}=\frac{3\Delta l'}{l}, \qquad (1.2.9)$$

于是体积弹性模量就可以写成

$$K=-\Delta P\Big/\frac{\Delta V}{V}=\frac{Y}{3(1-2\nu)}. \qquad (1.2.10)$$

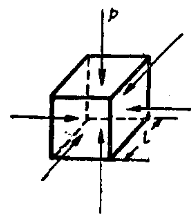

图 1.4

从上面的讨论看出，无论何种形变，只要在弹性限度内，应力与应变成简单的线性关系。如果以 σ 表示应力，以 e 表示应变，以 E 表示弹性模量，则它们的应力应变关系可以表示成

$$\sigma=Ee. \qquad (1.2.11)$$

我们把满足这一关系的固体称为弹性体或胡克固体。而把应力应变的数学关系称为固体的本构方程。

上述形变是在一定温度下进行的，并且假定固体各部分处于同一温度，这时测得的弹性模量称为等温弹性模量。如果在形变过程中，固体各部分及与周围介质间来不及发生热交换，这种过程称为绝热过程，绝热过程中测得的弹性模量称为绝热弹性模量。此外，当温度改变时，物体因热膨胀而引起附加应力，这时就需在式(1.2.11)中附加上热应力项（详见第五章）。

§1.3 范　　性

从图 1.3 看到，当应力超过弹性极限时，胡克定律不成立。在应力增加很小或不变的情况下，形变继续增大，这种现象称为屈服。开始出现屈服的应力称为屈服极限。

当应力超过弹性极限后，外力取消，物体不能恢复原状。应

力渐减时，应变并不沿开始的曲线减小到零，而是沿另一条曲线减小到有限数值（有箭头曲线）。这种形变称为永久形变。固体具有永久形变的性质叫做范性，工程上称为塑性。

有些固体材料（如金属）经过范性形变后硬性增加，它们的应力应变曲线如图1.5所示。当达到图1.5的E点后，再度施加外力时，形变将沿EF变化。这时比例极限较前加大。这种经过范性形变后弹性加强的现象叫做“加硬”。

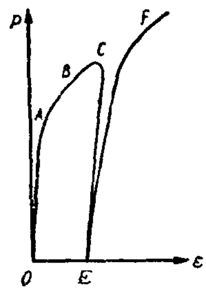

图 1.5

在范性形变范围内，当应力不断加大并到达一定数值后，物体发生断裂，这时的应力称为强度极限。强度高的固体，强度极限大。如果强度极限与弹性极限很接近，物体只能发生很小的剩余形变，这种物体叫做脆体。岩石和有些硬质合金就是脆体。有的脆体的强度极限甚至小于弹性极限，这类固体不存在范性形变。

固体的范性和脆性与外界条件有关，温度低，力的作用时间短，可使固体有脆性趋向。温度高，力的作用时间长，可使固体有范性趋向。橡胶在常温下是弹性固体，在低温时成为脆性固体。冰和树脂在不同条件下可以呈现范性或脆性。岩石在通常条件下呈脆性，但在高围压下可呈韧性。

对于韧性材料，为了表示它的塑性性质，有时用一理想模型去近似描述它，即在图1.2的曲线中将塑性形变部分用一水平直线表示，弹性部分用一倾斜直线表示，这时它们的应力应变关系可以表示成：

$$\sigma = \mu e, \qquad \text{当}\ \sigma < \sigma_0\ \text{时；}$$

$$\sigma = \sigma_0, \qquad e\ \text{可任意增大.}$$

具有这种性质的固体称为理想塑性体。

§1.4 蠕变和弛豫

从上节讨论可知，当应力超过弹性极限时，固体出现非弹性