柏均和 著

数学思维方法

柏均和高中数学指导

本书教你数学思维的方法。
本书将教材、教辅、素质教育融为一体。
题型千变万化，万变不离其宗。
仔细阅读本书，高考逍遥自如。

1

學苑出版社

数学思维方法

柏均和高中数学指导

第一册

柏均和　著

學苑出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学思维方法：柏均和高中数学指导（第一册）/柏均和著．
－北京：学苑出版社，2002.3
ISBN 7－5077－0306－1

Ⅰ．数…　Ⅱ．柏…　Ⅲ．数学课－高中－教学参考资料
Ⅳ．G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 07521 号

学苑出版社出版发行
北京市万寿路西街 11 号　100036
永清县印刷厂印刷　新华书店经销
787×960　16 开本　14.625 印张　220 千字
2002 年 3 月北京第 2 版　2002 年 3 月北京第 1 次印刷
印数：5000 册
定价：15.00

序 言

该书是高中学生学习数学的一部有特色的实用参考书。

该书对高中数学知识进行了颇有新意的梳理，揭示了知识要素之间的内在的、系统的联系，使学生站在一个逻辑体系上去认识、理解和记忆数学知识。

该书对高中数学中的重点、难点进行了深入的剖析，不就题论题，而是教其知，授其法，以法述知，揭示规律，由例及类，举一反三，这对于促使高中学生建立数学思想，提高学生的数学能力，培养学生的数学素养具有重要的作用。

该书还对学生的学习策略，结合高中数学各章的具体内容进行了深入的论述，这对于帮助高中学生建立正确的学习方法很有启发。

该书还配备了经过精选的练习题，这些习题主要是经过重点学校学生反复实练后的主客观复习题，同时还对二十多年我国高考题进行了按章的分类介绍，这对于学生深刻认识高中数学考点的要求，提高学习数学的实效性，具有特殊作用。

该书不是以某一版本的数学教材为准，而是兼顾了现行的数学通用教材和一些实验教材。既适合于学生参加高考的毕业复习，更适合日常教学参考。因为作者认为，掌握知识比应考更重要。而真正掌握了知识，应考也就成了知识的运用而已。因此，将该书选为学习数学的重要参考书，使学生在学习过程中，不仅知其然，更知其所以然，对磨练学生智力、提高学生能力均有很大帮助。

在本书编写过程中，作者将自己四十年中学数学教学的经验，特别是在近二十年来，运用该书成果，指导学生参加数学高考取得优异成绩和突出效果上所积累的经验，均无保留地介绍了出来。在当前全面实施素质教育的过程中，在对数学高考内容进行改革的过程中，数学做为高中的一个基础学科，任务十分艰巨，而该书的实践与探索均有一定的参考价值。

在本书编辑过程中，天津第一中学的优秀青年老师王悦、何智理、袁爽等同志参加了书中热点训练题的选编和做答，并对高考题进行了抄写，特别是王悦绘制了该书的全部图形，并以原稿为本，进行了认真的校对。对此，本书作者表示衷心的感谢。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

§1　幂函数、指数函数和对数函数

一　要点梳理（4个问题）……（1）

1　集合……（1）

2　映射与函数……（2）

3　幂函数……（4）

4　指数函数与对数函数……（6）

二　难点剖析（4个问题）……（8）

1　深刻地认识集合的知识以及映射与函数的概念……（8）

2　函数的基本性质及其应用规律……（16）

3　二次函数的知识规律与典型应用……（20）

4　指数方程、对数方程的解法及参数讨论问题……（26）

三　热点训练……（34）

四　答案提示……（61）

五　学法指导……（66）

§2　三角

一　要点梳理（3个问题）……（71）

1　三角函数……（71）

2　两角和与差的三角函数，解斜三角形……（73）

——两角和与差的三角函数

3　两角和与差的三角函数，解斜三角形……（76）

——解斜三角形

4　反三角函数和简单三角方程……（78）

二　难点剖析（5个问题）……（81）

1　三角函数的性质图象和典型应用例析……（81）

2　三角式的化简、证明、求值问题及其变形规律……（87）

3 解斜三解形的知识规律与典型应用例析 …………………………………………………… (105)

4 深刻地认识反三角函数概念 …………………………………………………………… (113)

5 简单三角方程的解法规律 ……………………………………………………………… (120)

三 热点训练………………………………………………………………………………… (128)

四 答案提示………………………………………………………………………………… (151)

五 学法指导………………………………………………………………………………… (158)

§ 3 不等式

一 要点梳理（2个问题） …………………………………………………………………… (165)

1 不等式的概念、性质和证明 …………………………………………………………… (165)

2 不等式的解法 …………………………………………………………………………… (166)

二 难点剖析（3个问题） …………………………………………………………………… (168)

1 深刻地认识不等式的概念与性质 ……………………………………………………… (168)

2 证明不等式的基本方法 ………………………………………………………………… (171)

3 不等式的解法的分类研究及有关规律 ………………………………………………… (181)

三 热点训练………………………………………………………………………………… (195)

四 答案提示………………………………………………………………………………… (213)

五 学法指导………………………………………………………………………………… (219)

§1 幂函数、指数函数和对数函数

一、要点梳理

1 集合

〈1〉集合

是数学中最原始的概念之一，不能以其他更基本的概念给它下定义，是不定义概念，其每一组对象的全体形成一个集合(或简称集)，各个对象叫这集合的元素.

〈2〉分类

(1)有限集：含有限个元素的集合，

(2)无限集：含无限个元素的集合，

(3)空集：不含任何元素的集合.

〈3〉特征

(1)确定性：一给定集合 A，X 为某一具体对象，则 X 或为 A 的元素或不是，二者必居其一.

(2)互异性：一集合中的元素分别代表不同的对象，相同对象归入一集合时，只能算作这集合中的一个元素.

(3)无序性：一给定集合 A 中的元素，不论其顺序如何排列，只能算一个确定的集合，不能视为不同的集合.

(4) 广泛性：即集合中的元素所代表的对象允许有意义上的广泛性.

〈4〉表示法

(1) 列举法：把集合中的元素逐一列出，写在大括号内.

(2) 描述法：把集合中元素的公共属性描述出来写在大括号内.

(3) 习惯表示：

① 集合：大写拉丁字母表示，

② 元素：小写拉丁字母表示，

③ a 是集合 A 中的元素：记为 $a \in A$，

④ b 不是集合 A 中的元素：记为 $b \notin A$ 或 $b \overline{\in} A$，

⑤ 自然数集：N，

⑥ 整数集：Z，

⑦ 有理数集：Q，

正有理数集：Q^{+}，

负有理数集：Q^{-}，

⑧ 实数集：R，

正实数集：R^{+}，

负实数集：R^{-}.

〈5〉关系

(1) 子集：两个集合 A 与 B，如 A 的任一元素都是 B 的元素，则 A 叫 B 的子集，记为 $A \subseteq B$(或 $B \supseteq A$)，

① 任一集合是它本身的子集，记为 $A \subseteq A$，

② 空集是任何集合的子集，记为 $\emptyset \subseteq A$，（注意 $\emptyset$ 与 $\{\emptyset\}$ 不同），

③ 真子集：如 A 是 B 的子集，且 B 中至少有一个元素不属于 A，则 A 是 B 的真子集，记为 $A \subset B$（或 $B \supset A$），

④ 空集是任何非空集的真子集.

(2) 集合相等：两个集合 A 与 B，如 $A \subseteq B$，且 $B \subseteq A$，则 $A = B$.

(3) 交集：由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫 A 与 B 的交集，记为 $A \cap B$.

(4) 并集：由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫 A 与 B 的交集，记为 $A \cup B$.

(5) 全集：在研究集合间关系时，有时一些集合是某一给定集合的子集，该给定集合为全集，记为 I.

(6) 补集：如 $A \subseteq I$，由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫 A 在 I 中的补集，记为 $\overline{A}$.

2 映射与函数

〈1〉映射

设 A、B 是两个集合，如按某种对应法则 f，对 A 中任一元素，在 B 中都有唯一元素和它对应，这样的对应（包括 A、B 以及 f），叫从 A 到 B 的映射，记为 $f: A \to B$.

简而言之，映射的特征是：

一对一
多对一，均可，但不能一对多，即 A 无余
B 可余，或 A 中每一元素有象，
B 中元素不一定有原象.

〈2〉一一映射

设 A、B 是两个集合，$f: A \to B$ 是从 A 到 B 的映射，在这映射的作用下，对 A 的不同元素如能在 B 中有不同的象，而 B 中每一元素都有原象，则这映射叫 A 到 B 上的一一映射.

简而言之，一一映射的特征是：

单射 —— 一对一，

射满 —— A 无余，

满射 —— B 无余，

〈3〉逆映射

设 A、B 是两个集合，并且 $f: A \to B$ 是 A 到 B 上的一一映射，如对 B 中每一元素 b，使 b 在 A 中原象 a 与之对应，这样所得映射叫映射 $f: A \to B$ 的逆映射，记为 $f^{-1}: B \to A$.

注意，在一一映射的基础上才能谈到逆映射.

〈4〉函数

(1) 定义

① 传统定义：如在某变化过程中有两个变量 x、y 并对 x 在某一范围内的每一确定的值，按照某个对应法则，y 都有唯一确定的值和它对应，那 y 就是 x 的函数.

x —— 自变量，

x 取值范围 —— 函数的定义域，

和 x 值对应的 y 值 —— 函数值，

函数 y 值的集合 —— 函数的值域.

② 近代定义：设 A、B 都是非空数的集合，f 是 A 到 B 的一个对应法则，那 A 到 B 的映射 $f: A \to B$，叫 A 到 B 的函数，记为 $y = f(x)$.

$x \in A, y \in B$，

原象集合 A —— 函数 $y = f(x)$ 的定义域，

象集合 C —— 函数 $y = f(x)$ 的值域，$C \subseteq B$.

比较：

相同点：

ⅰ　实质一致,

ⅱ　定义域、值域意义一致,

ⅲ　对应法则一致.

不同点:

ⅰ　传统定义从运动变化观点出发,描述生动、直观.

ⅱ　近代定义从集合、映射观点出发,其描述更具广泛性.

这里有以下问题应当注意:

ⅰ　函数是具备以下特点的特殊映射:

A、B 是非空数的集合,

$f:A\rightarrow B$ 是 A 到 B 的映射.

ⅱ　函数的核心 — 对应法则 f,其 f 对 $y=f(x)$,是 x 拉着 y 的纽带与法则,

f 简单时,可用解析式表示,

f 复杂时,可用其他方式表示.

ⅲ　函数的重要部分:

定义域:如函数的解析式相同,但定义域不同,视为不同的函数.

值域:单值函数.

符号:$y=f(x)$,仅表 y 是 x 的函数,当 $y=f(x)$ 是一解析式,也可视为一方程.

(2) 性质

① 单调性:如果函数 $y=f(x)$ 在某个区间上是增函数(或减函数),就说 $f(x)$ 在这一区间上具有(严格的)单调性,这一区间叫做 $f(x)$ 的单调区间.

这里有以下问题应当注意:

ⅰ　有些函数在整个定义域内都是增函数或减函数;有些函数在某些区间上是增函数,而在另一些区间上是减函数;有的函数定义域不是区间,则无单调区间;有的函数,如 $f(x)=\frac{1}{x}$,区间$(0,+\infty)$上是减函数,在$(-\infty,0)$上也是减函数,但不可说在区间$(-\infty,+\infty)$上是减函数.

ⅱ　正确理解单调含义,即在单调区间内,只增不减或只减不增,不能又增又减,显然不单调.

ⅲ　正确理解两个区间的公共端点处,函数的单调性是对某个区间而言的,对单独的一点,其函数值是唯一确定的值,无增减变化,也就不存在单调性问题.

ⅳ　现主要研究连续函数或分段连续函数,对闭区间上的连续函数,只要开区间单调,则闭区间也单调,包不包括端点均可.

② 奇偶性

奇函数:

ⅰ　定义:对于函数 $f(x)$,如对其定义域内任一 x,都有 $f(-x)=-f(x)$,那函数 $f(x)$ 就叫奇函数.

ⅱ　几何特征:图象关于原点成中心对称图形,由此画其图象可先画一半,另半由对称性描出.

ⅲ　如函数 $f(x)$ 是奇函数,又在$(0,+\infty)$上是增函数,则 $f(x)$ 在$(-\infty,0)$也是增函数.

偶函数:

ⅰ　定义:对于函数 $f(x)$,如对其定义域内任一 x,都有 $f(-x)=f(x)$,那函数 $f(x)$ 就叫偶函数.

ⅱ　几何特征:图象关于 y 轴成轴对称图形,由此画其图象也可先画一半,另半由对称性画出.

ⅲ　如函数 $f(x)$ 是偶函数,又在$(0,+\infty)$上是增函数,则 $f(x)$ 在$(-\infty,0)$是减函数.

注意:定义域不对称,一定不具备奇偶性,但定义域对称时,也不一定就具有奇偶性.

〈5〉反函数

(1) 定义:

式子 $y=f(x)$,表示自变量为 x,y 是 x 的函数,

设定义域为 A,值域为 C,

从式子 $y=f(x)$ 中解出 x,得式子 $x=\Phi(y)$,当原函数的映射为一一映射时,即在 C 中对 y 的任

何一个值，由 $x=\Phi(y)$，必能在 A 中有唯一确定的 x 值和它对应.

这时 $x=\Phi(y)$ 就可视为 y 是自变量，x 是 y 的函数，

这样的函数 $x=\Phi(y)$ 叫函数 $y=f(x)$ 的反函数.

记为 $x=f^{-1}(y)$，习惯记为 $y=f^{-1}(x)$.

(2) 求法：

第一步将 $y=f(x)$ 视为方程，解出 $x=f^{-1}(y)$，

第二步将 x、y 互换，得 $y=f^{-1}(x)$.

互为反函数的两函数如有解析式，一般不同，但少数例外，如 $y=x$ 的反函数为 $y=x$，又如 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 的反函数为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

(3) 互为反函数的函数图象间关系：关于直线 $y=x$ 对称.

注意：应用本结论画图时，x 轴与 y 轴的长度单位应一致，另本结论可应用于规律作图，即先画出原函数图象，再利用对称性画出其反函数的图象.

3　幂函数

〈1〉定义

(1) 函数 $y=x^n$ 叫做幂函数，x 是自变量，n 是常数，现阶段只研究 $n\in Q$ 的情况.

(2) 定义域

因为现阶段只研究 n 为有理数的情况，有理数的分类表为：

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{正分数}\end{cases}\\\text{零}\\\text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}$$

其定义域分以下情况叙述

① 当 $n=0$ 时，

$x^n=x^0=1(x\neq 0)$，　得 $y=1$，

定义域为 $\{x\mid x\in R，且\ x\neq 0\}$，

② 当 $n=1$ 时，　得 $y=x$，

定义域为 $\{x\mid x\in R\}$.

③ 当 $n\in N$ 但 $n\neq 1$ 时，　得 $y=x\cdot x\cdots\cdots x$（共 n 个 x 相乘）

定义域为 $\{x\mid x\in R\}$.

④ 当 n 是正分数（设此正分数是既约分数 $\dfrac{p}{q}$ 时，　得 $y=x^{\frac{p}{q}}$，$y=\sqrt[q]{x^p}$，

定义域为 $\{x\mid 使\sqrt[q]{x^p}\ 有意义\}$

⑤ 当 n 是负整数时（设 $n=-p,p\in N$），　得 $y=x^{-p}$，$y=\dfrac{1}{x^p}$，

定义域为 $\{x\mid 使\dfrac{1}{x^p}\ 有意义\}$.

⑥ 当 n 是负分数（设此负分数为负的既约分数 $\dfrac{p}{q}$）时，　得 $y=x^{-\frac{p}{q}}$，$y=\dfrac{1}{\sqrt[q]{x^p}}$，

定义域为 $\{x\mid 使\ y=\dfrac{1}{\sqrt[q]{x^p}}\ 有意义\}$.

〈2〉图象与性质

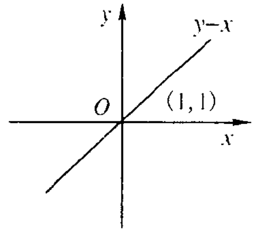
当 $n>0$ 时：

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

(1) 如 $n=1$,图象如图,其图象:

① 过(0,0),(1,1)点,

② 函数值随 x 增大而增大,



(2) 如 $n=2,4,6,8\cdots$ 时,部分图象如图,其图象:

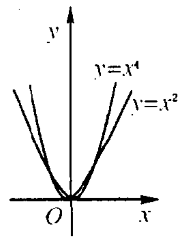
① 过(0,0),(1,1)点,

② 在第一象限,函数值随 x 增大而增大,

③ 在第二象限,函数值随 x 增大而减小,

④ 在第一象限,$x>1$,指数越大,图象越靠近 y 轴.

(3) 如 $n=\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\cdots$,时,部分图象如图,其图象:



① 过(0,0),(1,1)点,

② 在第一象限,函数值随 x 增大而增大,

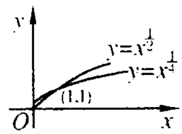
③ 在第一象限,$x>1$,指数越小,图象越靠近 x 轴.

(4) 如 $n=3,5,7,\cdots$,时部分图象如图,其图象:

① 过(0,0),(1,1)点,

② 在第一、三象限,函数值随 x 增大而增大,

③ 在第一象限,$x>1$,指数越大,图象越靠近 y 轴.

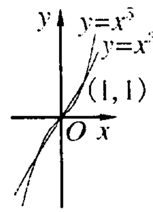


(5) 如 $n=\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},\cdots$,时部分图象如图,其图象:

① 过(0,0),(1,1)点,

② 在第一、三象限,函数值随 x 增大而增大,

③ 在第一象限,$x>1$,指数越小,图象越靠近 x 轴.



总结其共同的性质为:

ⅰ 图象都通过点(0,0),(1,1);

ⅱ 在第一象限内,函数值随 x 的增大而增大.

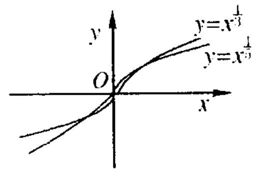
当 $n<0$ 时

(1) 如 $n=-1$,图象如图,其图象:

① 过(1,1),(-1,-1)点,

② 在第一象限,函数值随 x 增大而减小,

③ 在第三象限,函数值随 x 增大而减小.



(2) 如 $n=-2,-4,-6,\cdots$,时,部分图象如图,其图象:

① 过(1,1),(-1,1)点,

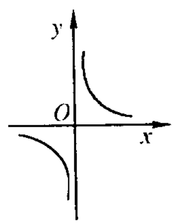
② 在第一象限,函数值随 x 增大而减小,

③ 在第二象限,函数值随 x 增大而减小.

(3) 如 $n=-\frac{1}{2},-\frac{1}{4},-\frac{1}{6},\cdots$,时,部分图象如图,其图象:

① 过(1,1)点,

② 在第一象限,函数值随 x 增大而减少.

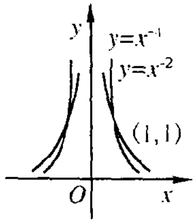


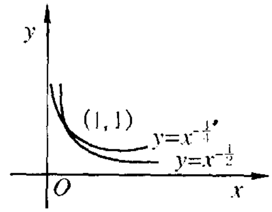
总结其共同的性质为:

ⅰ 图象都通过(1,1)点;

ⅱ 在第一象限内,函数值随着 x 的增大而减小;

ⅲ 在第一象限内,图象向上与 y 轴无限地接近,向右与 x 轴无限地接近.





4 指数函数与对数函数

〈1〉指数函数

(1) 定义:形如 $y=a^x$ 的函数叫指数函数.

ⅰ 定义域$\{x \mid x \in R\}$,

ⅱ 对底数 a 的限定 $a>0$ 且 $a \neq 1$,即 a 的范围为$(0,1) \cup (1,+\infty)$,

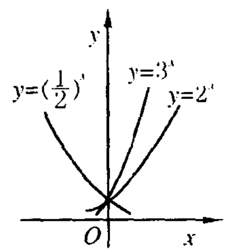
ⅲ 注意:

限定 a 的范围的原因,若 $a<0$,当 $x \in R$,例$(-4)^{\frac{1}{2}}$ 无意义;若 $a=0$,当 $x \in R$,例0^{-2} 无意义;若 $a=1$,当 $x \in R$,变为 $y=1$,归到一次函数去研究.

应用中要区分指数函数 $y=a^x$ 与幂函数 $y=x^n$ 的特征.

(2) 图象与性质:

为深入理解指数函数的性质,



ⅰ 抓关键:指数函数的关键在底,底决定了函数的增减性.

$a>1$,为增函数,$0<a<1$,为减函数.

ⅱ 抓界限:对于指数函数 $y=a^x$,

底 a 当然应大于零,其分界是 1,分 $0<a<1$ 与 $a>1$.

其 x 的分界是零,分 $x<0$ 与 $x>0$.

函数 y 必大于零,其分界是 1,分 $0<y<1$ 与 $y>1$.

ⅲ 抓特殊:

x 无特殊,$\{x \mid x \in R\}$,y 有特殊,$y>0$,当 $x=0$ 时 $y=1$.

ⅳ 抓趋势:

当 $a>1$ 时,随 a 的值增大,其函数图象越靠近 y 轴.

当 $0<a<1$ 时,随 a 的值增大,其函数图象越远离 y 轴.

〈2〉对数函数

(1) 定义:形如 $y=\log_a x$ 的函数叫对数函数.

ⅰ 定义域$\{x \mid x \in R^+\}$.

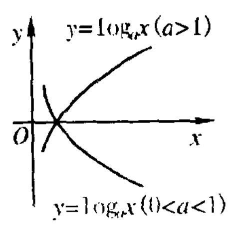
ⅱ 对底数 a 的限定 $a>0$ 且 $a \neq 1$,即 a 的范围为$(0,1) \cup (1,+\infty)$.

ⅲ 注意:

一般地,当 $a>0$ 且 $a \neq 1$ 时,指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数.

(2) 图象与性质

为深入理解对数函数的性质,



ⅰ 抓关键:对数函数的关键在底,

底决定了函数的增减性,

$a>1$ 为增函数,

$0<a<1$ 为减函数.

ⅱ 抓界限:对于对数函数 $y=\log_a x$.

其底 a 当然应大于零,其分界是1,分 $0 < a < 1$ 与 $a > 1$.

其 x 当然必大于零,其分界是1,分 $0 < x < 1$ 与 $x > 1$.

其 y 的分界是零,分 $y < 0$ 与 $y > 0$.

ⅲ 抓特殊:

x 有特殊,$x > 0$,当 $x = 1$ 时 $y = 0$,y 无特殊,$\{y \mid y \in R\}$.

ⅳ 抓趋势:

当 $a > 1$ 时,随 a 的值增大,其函数图象越靠近 x 轴.

当 $0 < a < 1$ 时,随 a 的值增大,其函数图象越远离 x 轴.

〈3〉重要指对数公式

(1)$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (a > 0, m, n \in Q)$.

(2)$(a^m)^n = a^{mn} \quad (a > 0, m, n \in Q)$.

(3)$(ab)^n = a^n b^n \quad (a > 0, n \in Q)$.

(4)$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0, m, n \in N$ 且 $n > 1)$.

(5)$a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad (a > 0, m, n \in N$ 且 $n > 1)$.

(6)$a^{\log_a N} = N \quad (a > 0$ 且 $a \neq 1, N > 0)$.

(7)$\log_a a^n = n \quad (a > 0$ 且 $a \neq 1)$.

(8)$\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a} \quad (a > 0$ 且 $a \neq 1, b > 0$ 且 $b \neq 1, N > 0)$.

(9)$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a} \quad (a > 0$ 且 $a \neq 1, b > 0$ 且 $b \neq 1)$.

(10)$\log_a M = \log_{a^n} M^n \quad (a > 0$ 且 $a \neq 1, M > 0)$.

(11)$\dfrac{\log_a M}{\log_a N} = \dfrac{\log_b M}{\log_b N} \quad (a > 0$ 且 $a \neq 1, b > 0$ 且 $b \neq 1, M > 0, N > 0)$.

(12)$\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N \quad (a > 0$ 且 $a \neq 1, M > 0, N > 0)$.

(13)$\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \quad (a > 0$ 且 $a \neq 1, M > 0, N > 0)$.

(14)$\log_a M^n = n\log_a M \quad (a > 0$ 且 $a \neq 1, M > 0)$.

(15)$\log_a \sqrt[m]{p} = \dfrac{1}{m}\log_a p \quad (a > 0$ 且 $a \neq 1, p > 0, m \in N$ 且 $m > 1)$.

(16) 常用对数:

ⅰ $\lg 10^n = n$.

ⅱ $\lg N$.如 $N > 1$,$\lg N$ 的首数 $= [N]$ 的位数 $- 1$.如 $0 < N < 1$,$\lg N$ 的首数 $= -$(N 中第一个不为零的数字前连续零的个数包括整数单位一个零).

二、难点剖析

1　深刻地认识集合的知识以及映射与函数的概念

〈1〉集合

在集合这部分内容中,要注意二点

(1) 正确地理解与使用有关符号

例　下列写法中,哪些是正确的,哪些是不正确的,为什么?

①$3 \in \{1,3\}$,　②$\{3\} \in \{1,3\}$,　③$3 \subset \{1,3\}$,

④$\{3\} \subset \{1,3\}$,　⑤$\{1,3\} \subseteq \{1,3\}$　⑥$\emptyset = \{\emptyset\}$

解:

①3 确为集合$\{1,3\}$中一元素,用符号 $\in$ 正确,

② $\in$ 这符号不能用在集合间,

③ 真子集符号 $\subset$ 不能用在元素与集合间,

④ 首先$\{3\}$是$\{1,3\}$的子集,且$\{1,3\}$中元素 1 不属于$\{3\}$,符合真子集定义,

⑤$\{1,3\}$(左集合)中任一元素都为$\{1,3\}$(右集合)中的元素,符合子集定义,

⑥$\emptyset$ 为空集,而$\{\emptyset\}$为单元素集合,二者含义不同,所以不等.

(2) 正确地理解与应用子、交、并、补等集合概念

例　求证 $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$

分析:集合相等的定义为:对于两个集合 A 与 B,如 $A \subseteq B$,同时 $B \subseteq A$,则 $A = B$.由此应证集合 $\overline{A} \cup \overline{A}$ 与集合 $\overline{A \cap B}$ 互为子集.

先证特殊情况,如 $\overline{A} \cup \overline{B} = \emptyset$.

并集定义为:由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合,叫 A 与 B 的并集.

由此可得 $\overline{A} = \overline{B} = \emptyset$.

补集定义为:已知全集 I,集合 $A \subseteq I$,由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合,叫 A 在 I 中的补集.

由此可得 $A = B = I$.

交集定义为:由所有属于集合 A 且属于 B 的元素所组成的集合,叫 A 与 B 的交集.

由此可得 $A \cap B = I$,

$\therefore \overline{A \cap B} = \overline{I} = \emptyset$.

$\therefore \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B} = \emptyset$.

再证一般情况,如 $\overline{A} \cup \overline{B} \neq \emptyset$.

首先证明 $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

子集定义为:对于两个集合 A 与 B,如 A 中任一元素都是 B 的元素,那 A 叫 B 的子集.

根据定义,任取 $X \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

由并集定义可得:$X \in \overline{A}$ 或 $X \in \overline{B}$.

由补集定义可得:$X \notin A$ 或 $X \notin B$.

由交集定义可得:$X \notin A \cap B$.

由补集定义可得:$X \in \overline{A \cap B}$.

由子集定义得:$\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

同时证明 $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$:由子集定义,任取 $X \in \overline{A \cap B}$.

由补集定义可得:$X \notin A \cap B$.

由交集定义可得:$X \notin A$ 或 $X \notin B$.

幂函数、指数函数和对数函数·难点剖析

由补集定义可得：$X \in \overline{A}$ 或 $X \in \overline{B}$.

由并集定义可得：$X \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

由子集定义可得：$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.

由集合相等的定义可得（不论特殊与一般）：$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$.

由以上证明过程可以看出，正确理解集合的各种概念，结合题目条件，以理论做指导，不仅能得出解题思路，而且能准确表达解题过程.

〈2〉映射

在映射这部分内容中，正确深入地理解与应用概念，以概念指导思路，以概念指导表述十分重要.

例　已知 $f: x \to \lg x$ 是集合 R^+ 到集合 R 的映射.

(1) 求证映射 f 是一一映射，

(2) 求该映射的逆映射 f^{-1}.

证解的分析：

(1) 剖析该题的已知条件：$f: x \to \lg x$ 是集合 R^+ 到集合 R 的映射.

映射的概念是设 A，B 是两个集合，如按某种对应法则，对 A 中任一元素，在 B 中都有唯一元素和它对应，这样的对应叫从 A 到 B 的映射.

所以本题已知是在 R^+ 中任意一元素，a，$a \in R^+$，按对应法则，在 R 中都有唯一元素与之对应 $\lg a \in R$.

剖析该题的求证：证明映射 f 是一一映射.

一一映射概念（建议予以补充）有两个条件，一是 A 中不同元素，在 B 中有不同的象，二是 B 中每一元素都有原象并指导本题即可写出表述过程.

① 设 $x_1 \cdot x_2 \in R^+$ 且 $x_1 \neq x_2$，

由已知条件 $\lg x_1$ 与 $\lg x_2$ 均属于 R，令 $\lg x_1 - \lg x_2 = \lg \dfrac{x_1}{x_2}$

$\because x_1 \neq x_2$，即 $\dfrac{x_1}{x_2} \neq 1$，

$\therefore \lg x_1 - \lg x_2 \neq 0$，

$\therefore \lg x_1 \neq \lg x_2$，

$\therefore$ 按此对应法则，R^+ 中不同元素，在 R 中有不同的象，符合一一映射第一特征.

② 设 $\lg x_3 \in R$，则 x_3 必大于零，

$\therefore x_3 \in R^+$，

$\therefore$ 在 R 中每一元素在 R^+ 中有原象，符合一一映射第二特征.

综述可知映射 f 是从 R^+ 到 R 的一个一一映射.

(2) 这类问题的线索是：

映射 —— 一一映射 —— 逆映射 —— 反函数.

该题由 $x \to \lg x$，设 $y = \lg x$，得 $x = 10^y$，

$\therefore f$ 的逆映射是 $f^{-1}: y = x = 10^y$.

〈3〉函数的定义域

现阶段考虑函数的定义域常涉及以下几个方面

(1) 分母不得为零；

(2) 偶次根式的被开方数不得为负数；

(3) 对数的真数不得为负数和零；

(4) 三角函数 $y = \operatorname{tg} x$ 中 $x \in R$ 且 $x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$，$k \in z$；

(5) 三角函数 $y = \operatorname{ctg} x$ 中 $x \in R$ 且 $x \neq k\pi$，$k \in z$；

(6) 特别限定以及由实际需要而产生的限定.

例 1　求 $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{3-x}{x-5}-2\right)}+\frac{\sqrt{0.3^{x^2}-0.3^{25}}}{\sqrt{2x^2-x+1\frac{1}{8}}}$ 定义域

解:

$$\begin{cases}x-5\neq 0\\ \frac{3-x}{x-5}-2>0\\ 0<\frac{3-x}{x-5}-2\leqslant 1\\ 2x^2-x+1\frac{1}{8}>0\\ 0.3^{x^2}-0.3^{25}\geqslant 0\end{cases}\quad \text{实形得}\begin{cases}x\neq 5\\ \frac{3x-13}{x-5}<0\\ \frac{2x-9}{x-5}\geqslant 0\\ x\in R\\ x^2\leqslant 25\end{cases}$$

$$\text{解得}\begin{cases}x\neq 5\\ \frac{13}{3}<x<5\\ x>5\text{ 或 }x\leqslant\frac{9}{2}\\ x\in R\\ -5\leqslant x\leqslant 5\end{cases}\qquad \therefore \frac{13}{3}<x<\frac{9}{2}.$$

$\therefore$ 定义域为$\left\{x\mid\frac{13}{3}<x<\frac{9}{2}\right\}$.

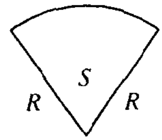
这个例题就体现了研究定义域问题的前三条限定,这类问题最容易出错处是两点,一是思考不全面,二是解联立不等式组综合其解时有误,此时最好借助于数轴,以图助思考.

例 2　周长为定值 a 的扇形,它的面积 S 是这个扇形半径 R 的函数,求这函数的定义域.

解:由已知条件可得

$S=\frac{1}{2}R(a-2R)=-R^2+\frac{a}{2}R.$

这是一个二次函数,就其函数本身,其定义域为实数域.



但这是一个实际问题,

$\therefore\begin{cases}a-2R<0\\ a-2R\leqslant 2\pi R\end{cases}$,　即$\begin{cases}R<\frac{a}{2}\\ a\leqslant R(2\pi+2)\end{cases}$,

$\therefore \frac{a}{2(\pi+1)}\leqslant R<\frac{a}{2}.$

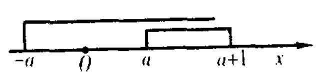
$\because$ 它是扇形问题,

$\therefore$ 定义域为$\left\{R\mid\frac{a}{2(\pi+1)}<R<\frac{a}{2}\right\}$.

这个例题就体现了研究定义域问题的第 (6) 条,即应考虑由实际需要而产生的限定.

例 3　若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $0\leqslant u\leqslant 1$,求关于 x 的函数 $y=f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域,$(a>0)$.

解:由已知得$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}$,即为$\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\ a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}$,



关键为 $1-a$ 点落在数轴何处,思路如下:

如 $1-a\leqslant -a$,得 $1\leqslant 0$,不可能.

如 $1-a>-a$,得 $1>0$,这是肯定的.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com