数学基础研究三十年

（1930至1964年数理逻辑和数学基础研究发展状况讲演录）

〔波兰〕 安德热依·莫斯托夫斯基 著

郭世铭 陈安捷 修庆云译 康宏逵审校

華中工学院出版社

ANDRZEJ MOSTOWSKI

THIRTY YEARS OF FOUNDATIONAL STUDIES

(Lectures on the Development of Mathematical Logic and the Study of the Foundations of Mathematics in 1930—1964)

ACTA PHILOSOPHICA FENNICA, 17
HELSINKI, 1965

数学基础研究三十年

安德热依·莫斯托夫斯基 著

郭世铭 陈安捷 修庆云译 康宏逵审校

责任编辑 李立鹏

华中工学院出版社出版

（武昌喻家山）

湖北省新华书店发行 各地新华书店经售

沔阳县印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张 6 25 字数：141,000

1983年7月第一版 1983年7月第一次印刷

印数：1—8,000

统一书号：13255—018 定价：0,80元

目　　录

序

1964年夏天，我在芬兰瓦沙城暑期学校作了一系列有关1930至1964年间数理逻辑和数学基础研究发展状况的讲演。这个题目是该校校长凯托南教授给我出的。

在准备这些讲演的时候，我不得不批判地评价我的全部科学活动所属的那个时期。等到我发觉这种回顾是一种令人兴奋的精神享受之后，我就怀着感激的心情接受了凯托南、辛迪卡和冯·莱特诸位教授要我把讲稿写出来发表在《芬兰哲学录》这套散刊上的建议。

象眼前的这样一个评述，是既不会完全不偏颇也不会完全无遗漏的。选择要讲的题目就有相当大的困难。要设法对形色不一的发现及其相互关系作出简要的刻划，又产生更大的困难。如果还不得不用外语来表达自己的意思，这件事就更是其难无比了。只是在工作完成以后，才真正看清它与当初抱的幻想相差多远。我居然不顾这些困难而下决心发表讲稿，是希望它们也许能把我目睹下文所报告的那些理论创立时的热情传一点给（为数不多的）读者。

除了《芬兰哲学录》的编辑们，我还要感谢瓦沙暑期学校，感谢校长凯托南教授，感谢芬兰和瑞典学生小组，他们的悉心合作使我感到准备这些讲演或许并非全然无益之举。

安德热依·莫斯托夫斯基

导　言

在这些报告中，我们的目的是勾画数理逻辑和数学基础研究在1930至1964年间的发展状况。细谈这个时期创立的一切理论是不可能的；我们倒不如只满足于扼要地提一提它们的内容和它们的应用。这样一来，叙述就不免有些肤浅。然而，我相信它还是会有点趣味的，因为它涉猎了一个宽广的领域，让人们能够在巨幅画面中去看近几十年做的工作。

按照惯例，在数学的哲学里总要划分三大流派：布劳维的直觉主义，弗雷格和罗素的逻辑主义以及希尔伯特的形式主义。其中第一派把数学同其他科学分支隔离开来看待，并且主张把数学中使用的概念和方法限制在最初等和最直观的范围。由于这些缘故，没有多少数学家加入直觉主义学派。弗雷格和罗素的逻辑主义试图把数学归约为逻辑。看起来这倒是个卓越的方案，但一付诸实行，却发现根本就没有强得足以囊括全部数学的逻辑。因而，这一方案剩下来的东西就是把数学归约为集合论。这很难说是数学基础问题的一个令人满意的解释，因为在一切数学理论中比其他任何理论更需要澄清的恰好就是集合论。最后，希尔伯特的形式主义设计了一个方案，要求先把全部数学公理化，再用很简单的组合论推理来证明这些公理化理论是一致的。结果发现，这个方案行不通；即使它行得通，由于公理不可避免的任意性，也会难以使有哲学头脑的数学家们满意。

三个学派的哲学目标全都没有达到，而且，在我们看来，我们也并不比这些学派的奠基人更接近于对数学的全面理解。尽管如此，却不能否认这些学派的活动带来了大量重要的新见

解和新发现，它们加深了我们对数学及其与逻辑的关系的知识。正与常情相仿，这些副产品到头来反比三个学派的奠基人原来的目标更为重要了。我们的目的就是要研讨这些结果，以期对三大学派的哲学方案如何影响了逻辑和数学基础研究的正规进程有一个印象。我们将会看到，其中每一派的贡献都是伟大的，哪一派离开别的派都不能存在。

1930至1960年间，三个学派经历了巨大的变化。尤其引人注目的是元数学的发展，元数学最初是要追求一个象希尔伯特所关注的那样的一致性证明，而后来却发展成了抱负大得多的理论。最重要的元数学结果来源于三十年代早期开始的某些研究.确实，这些结果已经使形式主义学派的哲学方案局部失去信用了，但同样确实的是，元数学发现已经使我们的数学和形式逻辑知识发生革命了。

直觉主义并未改变它的基本哲学，可是开始改变它的内容了。公式，原先干脆被革出教门，如今却取代了旧文献中使用的那些复杂的、往往是无法捉摸的文句。从此，原先几乎只在布劳维追随者的小圈子里才有人懂的直觉主义理论，就变成其他哲学家和数学家也能了解的了，对双方都大有裨益。此外还出现了另一些理论，虽然与直觉主义无直接联系，但同样也有把数学概念限制到很简单的概念上去的倾向。总而言之，这些理论都叫做现代数学哲学中的构造主义倾向。本义的直觉主义大概是这些构造主义理论中最有趣的一种。

逻辑主义，在1930年以前支配了数学基础研究，在1930年以后没有创造什么崭新的观念，有一些学者，例如勒希涅夫斯基 大体还是沿着逻辑主义者的老方案的路子在工作，但他们的影响甚小。不过，逻辑主义的老方案到底靠集合论观念的外衣而保全了性命。只要回想一下类型论和其他相似的系统——

逻辑主义者试图把数学归约为这类系统——本质上都是抽象集合论的公理化系统，那么，这也就是理所当然，不得不然。

如此看来，我们不可不说明下面三个主要学派的贡献：构造主义的，元数学的和集合论的。三十年代早期有三篇作品问世，堪称三派的代表作，也极大地影响了三派的进一步发展。这就是脍炙人口的海丁[80]、哥德尔[54]和塔斯基[222]。我们要从讨论这三篇文章和直接依赖它们的某些工作来开始讲解。

第 一 讲

直觉主义逻辑的形式化

按布劳维所发明的那种模样，直觉主义依赖着若干一般原则，其中只有一部分是同直觉主义的逻辑有关的。十分重要但与我们当前的意图无关的，是一般集合论概念不许进入数学，全部数学都要归约为整数算术和一种很特别的直觉主义连续统理论的假定。另一个同等重要而又与直觉主义逻辑密切相关的假定，是一个有争议的直觉主义见解：逻辑不在数学之先，倒是数学活动的结果。根据这个论点，一条逻辑规律乃是被数学家们采取过的一种演绎形式；在数学家们使用这种形式的演绎之前，没有理由承认它是逻辑规律。最后，第三个论点则是规定在直觉主义者看来唯一准许进入数学的某些推理形式。这个论点认为，数学家们只能实行某些（心中的）构造；一条数学定理不过是这些构造的一个记录。

为了把这一点搞得更清楚，我们来考虑下面的情形。假设有一位数学家想要证明存在一个具有某些预定性质的对象。为了做到这一点，他就实行某些构造.如果他用这种办法成功地得到一个具有所求性质的对象，那他就证明了一个直觉主义可容许的存在语句。现在让我们假设这位数学家没能直接构造出一个合乎要求的对象，但他却能从“不存在具有所求性质的对象”这一假定导出矛盾。古典的逻辑学家依然会说这位数学家已经证明了一个存在语句，而直觉主义者却否认这一点。根据直觉主义观念，这位数学家所作的不可能性证明是一个构造，表明不可能证明“每个 x 都不具所求性质”这一全称语句；但它

并不是在构造一个满足这些性质的对象。因此，一个全称语句的否定并不等价于一个存在语句.从这个例子，我们可以看出，把一条数学定理与一个构造等同看待会使我们拒绝古典逻辑的某些规律。凑巧直觉主义者所承认的那些公式在古典解释下都是真的；这样，直觉主义逻辑就是古典逻辑的一个真部分。

最先从事直觉主义逻辑形式化的是海丁[80]。他把自己的系统分成两个部分，一部分处理命题逻辑，另一部分处理量词逻辑。在这里，我们将用一种稍经修订的形式来介绍海丁的命题逻辑。

这个系统的初始概念是：析取（用$\vee$表示）、合取（用$\wedge$表示）、蕴涵（用$\rightarrow$表示）和指一假句子的常项F。关于析取和合取的公理与古典逻辑相同：

(A) $p\rightarrow(p\vee q)$，$q\rightarrow(p\vee q)$，$(p\rightarrow r)\rightarrow\{(q\rightarrow r)\rightarrow[(p\vee q)\rightarrow r]\}$，

(K) $(p\wedge q)\rightarrow p$，$(p\wedge q)\rightarrow q$，$(r\rightarrow p)\rightarrow\{(r\rightarrow q)\rightarrow[r\rightarrow(p\wedge q)]\}$；

关于联结词$\rightarrow$和常项F的公理只构成相应的古典公理的一部分：

(I) $[p\rightarrow(q\rightarrow r)]\rightarrow[(p\rightarrow q)\rightarrow(p\rightarrow r)]$，$p\rightarrow(q\rightarrow p)$，

(F) $$F\rightarrow p.$$

唯一的推论规则是古典的分离规则。等值式$p\equiv q$定义为$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$，否定式$\neg p$定义为$p\rightarrow F$.

由公理组(I)刻划的系统叫做正蕴涵逻辑；公理组(A)、(K)(I)则刻划了全部的正逻辑.并非一切只含联结词$\rightarrow$的古典真公式都是从(I)可推演的；如果(I)加上通称皮尔斯律的公理：

(P) $$[(p\rightarrow q)\rightarrow p]\rightarrow p,$$

它们就都可推演了。

公理组(A)、(K)、(I)、(F)、(P)是足以推演一切古典真的命题公式的。实际上，在(P)中以F代入q，我们便得到公式

(I) $$(\neg p\to p)\to p.$$

从(I)容易推演出公式$p\to[(p\to q)\to q]$，以F代入q之后，这个公式成了$p\to(\neg p\to \mathrm{F})$；根据(F)，又得

(ii) $$p\to(\neg p\to q).$$

最后，从(I)也容易推演三段论律

(iii) $$(p\to q)\to[(q\to r)\to(p\to r)];$$

可见众所周知的乌卡谢维奇系统的一切公理都可从(I)、(F)和(P)推演。既然从(A)、(K)以及有关→和¬的古典规律不难推演出公式$(p\vee q)\equiv(\neg p\to q)$和$(p\wedge q)\equiv\neg(p\to\neg q)$，我们就看出(A)、(K)、(I)、(F)和(P)的确足以推演古典命题逻辑的一切规律。

皮尔斯律(P)远远不是直观上显然的。相反，直觉主义公理(A)、(K)、(I)、(F)却是很清晰又很直观的。因此我们论定直觉主义逻辑要比古典逻辑更简单和更自然。

为了从命题逻辑得到量词逻辑，我们完全照古典逻辑中的办法去做，也就是补充公理组

(Q) $$\bigwedge_x \mathrm{F}x\to \mathrm{F}y,\quad \mathrm{F}y\to\bigvee_x \mathrm{F}x$$

以及下面的证明规则：

$$\frac{\mathrm{A}\to \mathrm{F}x}{\mathrm{A}\to\bigwedge_x \mathrm{F}x},\qquad \frac{\mathrm{F}x\to \mathrm{A}}{\bigvee_x \mathrm{F}x\to \mathrm{A}},$$

其中A是一个不含自由变项x的公式。

上面这种直觉主义逻辑形式化的方法与海丁提出的方法本质上没有区别。直觉主义逻辑的形式化还有一些别的办法，或许是更为优雅的办法，干岑[50]中的那种很简单的方法即是一例；不过，我们不细谈其他这些方法了。

海丁发表他的论文之后，关于这种形式化的直觉主义逻辑，立刻就有几个重要的元数学定理被发现。其中最令人感兴趣的是哥德尔[56]部分依靠格里文科[52]的一些早期结果所作的一项发现，那就是古典逻辑能在直觉主义逻辑中得到解释。哥德尔用等式$\sim p=\neg p$，$p\cdot q=p\wedge q$，$p+q=\sim(\sim p\cdot\sim q)$，$p\supset q=\sim(p\cdot\sim q)$定义了新的联结词，$\sim$，$\cdot$，$+$，$\supset$，然后表明：如果在任何公式中都用$\sim$，$\cdot$，$+$，$\supset$来替换联结词$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\to$，那么，一切古典真公式都转变成直觉主义可证公式，而非古典真公式则转变成非直觉主义可证的公式。为了对量词逻辑得到类似的结果，我们可以把存在量词解释成$\neg\bigwedge_x\neg$而让全称量词保持不变。通过这种办法，哥德尔证明了古典逻辑在直觉主义逻辑中可忠实表示。当然，直觉主义逻辑可用恒等变换在古典逻辑中解释，但这种恒等解释并不是忠实的解释。

哥德尔还表明，基于古典逻辑的与基于直觉主义逻辑的某些公理化理论之间也存在同样的关系。例如，基于古典逻辑的皮阿诺算术就能在基于直觉主义逻辑的皮阿诺算术中得到解释。这个定理使我们对基于古典逻辑的皮阿诺算术有了一个直觉主义的一致性证明。值得注意的是，虽然并不存在严格有穷主义的一致性证明，这样一个证明却竟会如此容易到手。可见，基于直觉主义逻辑的皮阿诺算术是含有很多非有穷主义成分的。

逻辑学家和数学家花了很大的气力去设法得到直觉主义逻辑的古典解释　这个方向上的结果却显然引不起直觉主义者的兴趣，在他们看来古典系统是不可理解的，他们无需在其中解释自己的逻辑。对坚持古典逻辑的人来说，解释却是唯一能够使他们理解直觉主义逻辑的方法。

科尔莫哥罗夫给出了一种十分有趣的解释，他把直觉主义逻辑解释为问题的逻辑，把联结词$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$解释为从给定的问题形成新问题的运算。例如，蕴涵式$p \rightarrow q$是一问题，所问的是问题$q$能不能归纳为问题$p$。这样一来，用联结词和变项$p, q, r, \cdots$建立的直觉主义恒真式就表示一些问题模式，它们是容许有不依赖$p, q, r, \cdots$的具体选择的解的。这种解释完全符合数学定理与（理论上的）构造是一回事的直觉主义观念。

比这种解释更有影响的是塔斯基［225］设计的另一种解释。大致同时，斯通[218]也发表了一个十分相似的想法。

古典命题演算与类演算之间的密切联系是自布尔时代以来就为人所知的。当我们用同样的一些符号来表示命题联结词和集合上的运算时，这两种演算之间的类似看得最分明；这时，我们就会有一些等值式，例如，$[x \in (\mathbf{X} \vee \mathbf{Y})] \equiv [(x \in \mathbf{X}) \vee (x \in \mathbf{Y})]$，$(x \in \neg \mathbf{X}) \equiv \neg (x \in \mathbf{X})$，等等。于是，只要把命题变项解释成以任意集合$\mathbf{V}$的全体子集为变元的集合变项，我们就可以使每个命题公式与一个布尔多项式对应。古典逻辑的恒真式则与不论变项取什么值其值均为$\mathbf{V}$的那些多项式对应。对于直觉主义逻辑，这种解释却不再有效了，因为，例如说吧，$p \vee \neg p$这个直觉主义不可证公式也与一多项式对应，对于每个p，该多项式的值均为$\mathbf{V}$。塔斯基提出的问题就是要找出$\mathbf{V}$的子集的一个类$\mathbf{G}$，找出可在这些子集上施行的适当运算，使得以下条件为真：如果把联结词解释成集合上的这些运算，把命题变项解释成$\mathbf{G}$中的任意集合，从而使一个命题公式与所得的一个布尔多项式相关，些么，我们得到一恒等于$\mathbf{V}$的多项式当且仅当原先那个公式是直觉主义可证的。塔斯基表明，可以取一个适当的拓扑空间（例如一个欧几里得平面）作$\mathbf{V}$，取$\mathbf{V}$的开子集组成的类作$\mathbf{G}$，再把$\mathbf{F}$解释为空集，把联结词$\vee, \wedge, \rightarrow$分别解

释为并、交和运算Int[(V－X)∪Y]。所谓开集当然是指V内的那种其任何一点p，都包含p的一个充分小的邻域的子集。Int(A)则是A的内部，即包含在A中的最大开集。

我们讨论一个拓扑空间的例子。令T是一有穷的有向树，即一些被称作顶点的点的集合，其中有些顶点由有向的边相连而并无封闭的圈（见图1和图2）。

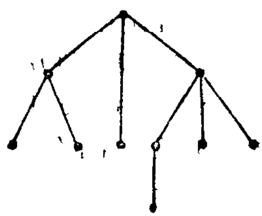


图1

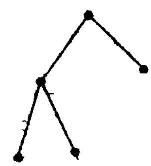


图2

这种树全都有一个或更多的初始顶点，即不是任何边的终点的顶点①。

点p的邻域是所有点q的集合：q要能由一条道路$pp'p''\cdots p^{(n)}=q$与p相连，此处边pp'，$p'p''$，$\cdots$，$p^{(n-1)}p^{(n)}$是属于树的。由此可见，一个开集具有这样的性质：对其每一点p，它都包含着能由一条道路与p相连的一切点q。

下面的注释（原则上是由维尔[224]提出的）表明了拓扑解释的直观来源。我们来考虑形如$x\in$ X的句子，其中X是V的子集。每一个这样的句子可能是真的，也可能是假的。如果这个句子对充分接近于x的一切点x'仍然是真的（或假的），就称之为强真的（强假的）。因而，如果x位于X的内部，则句子$x\in$ X强真；如果x位于V－X的内部，则强假。对位

① 按正式的讲法，树是这样的一对多关系R的图象，对于任何x和任何整数n，xR^nx这一关系都不成立。

于X的边界上（也就是在集合$\overline{X}\cap\overline{V-X}$中，这里横线表示闭包运算）的$x$，该句子既不强真又不强假。所有这些都是与直觉主义对集合的观念相合的，按这种观念，关于x的有穷数量的信息就该足以判定x属于不属于一个集合了。当然，尽管这个注释指出了拓扑与直觉主义逻辑之间的联系，但它本身并不足以说明塔斯基所作的解释何以成功。

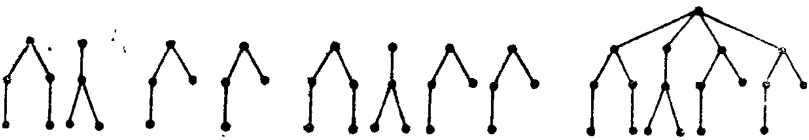
按正式的讲法，塔斯基的结果是说，一个拓扑空间V的开子集形成一个值阵，一切直觉主义可证公式在其中都是有效的；对于适当的V（例如说，如果V是一欧几里得空间），这个值阵就确切适合于直觉主义逻辑。诚然，远在塔斯基有关直觉主义逻辑的工作以前，值阵的一般概念就早已知道了，但在他的工作以前从未实际使用过有这么多元素的值阵，也没有任何人考虑过有拓扑空间结构的值阵。

直觉主义逻辑和其他多值系统的几项稍晚的研究从塔斯基的文章吸取了灵感。

我们再对塔斯基结果的证法补充一些注释。其中一个方向的证明是很容易的：这只是例行公事地核实一下，在任意拓扑空间V的开子集所组成的值阵中公理(A)、(K)、(I)、(F)总是有效的，而在这个值阵中分离规则也总是保存有效性。可见，一切直觉主义定理在这些值阵中都是有效的。至于要表明只有直觉主义可证的公式才在值阵中有效（假如V满足某些条件），就困难得多了。为了得到这一结果，塔斯基用了雅希科夫斯基[85]的下述结果：存在一个有穷值阵的可数序列M_n，使得命题公式A是直觉主义可证的，当且仅当它至少在其中的一个值阵内有效。

描述雅希科夫斯基的值阵倒不难。这些值阵每一个都是由一棵树决定的有穷空间的开子集所组成的。第一个值阵相当于

一棵只有一个顶点的树，后继值阵都从在前的值阵经两种运算得到，我们称这两种运算为O′和O″.运算O′不过是把这两棵树并拢（不在其中任何一棵上加新的边）；O″是把两棵树T_1，T_2彼此并拢，给它们加一个新顶点，用边将它与T_1的和T_2的初始顶点相连，图3提供了实例.



T_1　　T_2　　$O'(T_1, T_2)$　　$O''(T_1, T_2)$

图 3

对雅希科夫斯基值阵的这种清晰的描述出自格热高契克[170]；雅希科夫斯基定理的证明收入了罗斯[186]和斯科特[197]。

以后的发展给塔斯基原来的证明带来了一些根本的简化；见麦金赛和塔斯基[142]。塔斯基不再用雅希科夫斯基的值阵，而用了以公式为元素的另一些值阵。使用这类值阵的思想可上溯到林登包姆。

直觉主义逻辑只是为数众多的非古典逻辑中的一种。此外还有几种这样的逻辑，最先由乌卡谢维奇和波斯特，稍后又由其他逻辑学家规定出来了。其中有些是出于纯形式理由而发明的，但另外几种——例如模态逻辑——则有真正的哲学价值。在我们看来，这些系统中直觉主义逻辑拥有一种独一无二的地位：它是迄今建立的唯一正被相当大一群干练的科学家实际使用着的逻辑。它也是唯一已被推广到命题逻辑和量词逻辑之外而用来叙述数学的某些部分的逻辑。头一个想出一种不同寻常的逻

辑的乌卡谢维奇曾希望有一天会出几种象非欧几何那样被人实际使用的逻辑。迄今发明的非古典逻辑大多数却并没有实际使用，尽管其中的几种在二值逻辑基础上以元数学方式得到了研究。看来，直觉主义逻辑是唯一还有机会实现乌卡谢维奇计划的一个。同时，这种逻辑是建立在一种别出心裁始终如一的数学观之上的。这两个情况说明直觉主义逻辑为什么从创立之时起就引起强烈的兴趣。

第 二 讲

算 术 的 不 完 全 性

在这一讲里，将涉及三十年代早期对数学基础研究的另一个重要贡献，尤其是哥德尔[54]的所谓第一不完全性定理，它说通常的整数算术公理化系统不完全。为了说明这个结果的重要性，我们插一点简短的历史注解。

自弗雷格、罗素和怀德海的著作发表以后，逻辑学家就相信，每个直观上正确的演绎都能在古典逻辑演算中重新构造出来。他们还相信，给逻辑演算加上适当的公理，我们就能构造一些公理化系统，每个直观上正确的数学语句在其中都是可证的，即使对公理（例如集合论的公理）该如何选择有怀疑。皮阿诺的那些公理完满地描述了整数概念却没有人（除了直觉主义者以外）觉得有丝毫可疑之处。因此，人们普遍相信，一切直观上正确的算术语句都可从这些公理形式地推演出来。这种信念就是希尔伯特学派哲学观点的基础。这个学派的代表人物确信真实性（算术语句的真实性）概念已经有了定义，因为真的语句与从皮阿诺公理可形式推演的语句是一回事。所以，他们把重点从给真理下定义的问题（这一直被看作是哲学的中心问题）移到了用很简单的组合论推理来建立皮阿诺公理的一致性这个更形式的问题。顺便说一点意见：不论直观算术能否归约为皮阿诺公理，这样一个证明，如果存在的话，总会是有趣的。

哥德尔的发现表明，第一，把真公式与皮阿诺算术可形式推演的公式等同看待是站不住脚的。第二，象希尔伯特所要求