高等学校试用教材

高等数学讲义

上册

南开大学

史瑞鳌　孙　澈　张朝池　王作友　编

高等教育出版社

高等学校试用教材

高等数学讲义

上 册

南 开 大 学

史瑞鳌 孙 澈 张朝池 王作友 编

内 容 提 要

本书系参照原教育部审订的《综合大学物理专业高等数学教学大纲》编写的.

全书分上、下两册. 上册包括函数与极限，微分学及其应用，不定积分，定积分及其应用，微分方程初步；下册包括无穷级数，空间解析几何，多元函数微分学，重积分，曲线积分和曲面积分，场论初步，广义积分和含参变量积分，以及傅里叶分析等.

本书可以作为综合大学、高等师范院校物理、电子、计算机与系统科学等专业的教材，也可作为其它理工科专业的参考书和自学者用书.

高等学校试用教材

高等数学讲义

上 册

南 开 大 学

史瑞鳌 孙澈 张朝池 王作友 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 12.125 字数 290 000

1989 年 2 月第 1 版 1989 年 2 月第 1 次印刷

印数 0 001—3,720

ISBN7-04-001009-7/O·648

定价 2.80 元

序　言

本书系参照原教育部制定的《综合大学物理学专业高等数学教学大纲》编写的，经理科数学力学教材编审委员会高等数学编审小组审核通过.

全书共分上、下册．上册包括函数与极限，微分学及其应用，不定积分，定积分及其应用，微分方程初步；下册包括无穷级数，空间解析几何，多元函数微分学，重积分，曲线积分和曲面积分，场论初步，广义积分和含参变量积分及傅里叶分析等.

考虑到当前的物理学科对高等数学教学提出了更高的要求，也考虑到某些物理学科学生学习更为高深的数学及物理课程的需要，本书在大纲范围内作了适当扩充．例如在一元微积分中，介绍了函数插值、代数方程的近似求根法，数值积分等数值分析方面的知识；对函数项级数的一致收敛性，隐函数存在定理，广义积分和含参变量广义积分，傅里叶级数和傅里叶变换等较深的数学内容都作了适度的论述．为保持数学上的系统性和科学性，书中除少数繁难的定理只述而不证外，其余绝大部分的重要定理及计算公式都给出了详细的证明.

书中带“*”号的段落是供选学的内容，教师可根据实际情况作适当的取舍．为加强对学生基本运算能力和逻辑推理能力的训练，各节后面都配置了一定数量难度不同的习题.

本书可作为综合大学和高等师范院校物理、电子、计算机及系统科学等专业的教材，也可供其它理工科有关专业参考.

在本书编写过程中得到了南开大学吴大任教授，邓汉英教授的热情关心和指导；南开大学黄玉民、郑仲三等同志校阅了下册部

分章节，并提出不少有益的建议.

参加教材审查的同志仔细地审阅了本书初稿，并提出许多宝贵意见. 在此，谨向他们表示衷心的感谢.

由于编者水平有限，书中不妥和错误之处在所难免，恳请读者给予批评和指正。

编　　者

目　录

第一章　变量与函数

§1　实数系．函数概念

1.1　实数．集合

有尽小数及无尽循环小数，称为有理数，如5.63，0.1666…等都是有理数．无尽非循环小数称为无理数，如$\sqrt{2}$，圆周率π等都是无理数．有理数与无理数之全体构成实数系．因为任何有尽小数(包括整数)都可用循环数为9的无尽小数来表示，如$9.3=9.2999\cdots$，所以也可以说，实数系是由一切无尽小数组成的数系．

我们将经常使用“集合”这一概念．一个集合就是指具有某种共同特性的个体的全体．集合里的各个体称为该集合的**元素**．例如，由2、7、13、27四个整数构成一个数集，记为$\{2,7,13,27\}$．平面上通过原点的所有直线构成一直线集合，每一条这样的直线都是此集合的一个元素．前者只由四个(有限个)元素构成，称为有限集，后者由无限多个元素构成，称为无限集．

习惯上常用大写字母A、B、C等表示集合，用小写字母a、b、c等表示集合中的元素．

通常，用$\boldsymbol{N}$表示全体自然数的集，$\boldsymbol{Z}$表示全体整数的集，$\boldsymbol{Q}$表示全体有理数的集，$\boldsymbol{R}$表示全体实数的集．

若a是集合A的元素，则称a属于A，记为$a\in A$．例如，$-0.25\in\boldsymbol{Q}$．

若a不是集合A的元素，则称a不属于A，记为$a\overline{\in}A$．例如，$2\sqrt{2}\overline{\in}\boldsymbol{Q}$．

通常表示集合的方法有：

(1) 枚举法，即将集合中的元素全部列举出来．例如，

$$A=\{-1,2,0.5\}$$

表示集合 A 是由 $-1,2,0.5$ 三个数构成的．又如，所有正奇数构成的集合可以表示为

$$B=\{1,3,5,7,\cdots\}.$$

(2) 概括法，通常用

$$A=\{x\mid P\}$$

表示集合 A 是由满足条件 P 的所有元素 x 构成的集合．例如

$$A=\{x\mid -2<x<3, x\in\boldsymbol{R}\}$$

表示所有介于 -2 和 3 之间的实数构成的集合．

又如，正奇数集合可以表示为

$$B=\{x\mid x=2n-1, n\in\boldsymbol{N}\}.$$

我们把不含任何元素的集合也看成一个集合，称为**空集**，记为 $\varnothing$．例如 $\{x\mid x<1$ 且 $x>3, x\in\boldsymbol{R}\}=\varnothing$．

设 A_1, A_2 为两个集合，如果当 $x\in A_1$，必有 $x\in A_2$，则称 A_1 **包含于** A_2，或 A_2 **包含** A_1，记为

$$A_1\subset A_2 \quad 或 \quad A_2\supset A_1.$$

当 $A_1\subset A_2$ 时，A_1 称为 A_2 的**子集**．

若 $A_1\subset A_2$ 且 $A_2\subset A_1$，则称集合 A_1，A_2 **相等**，记为 $A_1=A_2$．

既属于集合 A_1，又属于集合 A_2 的所有元素构成的集合，称为 A_1 和 A_2 的**交集**，记为 $A_1\cap A_2$，即

$$A_1\cap A_2=\{x\mid x\in A_1 且 x\in A_2\}.$$

例如，设 $A_1=\{x\mid x>0, x\in\boldsymbol{R}\}$，$A_2=\{x\mid x\leqslant 1, x\in\boldsymbol{R}\}$，则

$$A_1\cap A_2=\{x\mid 0<x\leqslant 1, x\in\boldsymbol{R}\}.$$

更一般地，n 个集合 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 的交集是同属于诸 A_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 的所有元素构成的集合，记为

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x \mid x \in A_1 \text{ 且 } x \in A_2, \cdots, \text{且 } x \in A_n\}.$$

所有那些至少属于 A_1 或 A_2 之一的元素构成的集合，称为A_1，A_2 的**并集**，记为 $A_1 \cup A_2$，即

$$A_1 \cup A_2 = \{x \mid x \in A_1 \text{ 或 } x \in A_2\}.$$

更一般地，n 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并集是所有那些至少属于 $A_i (i=1,2,\cdots,n)$ 之一的元素构成的集合，记为

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \text{ 或 } x \in A_2, \cdots, \text{ 或 } x \in A_n\}.$$

所有属于 A_1 而不属于 A_2 的元素构成的集合，称为集合 A_1，A_2 的**差集**，记为 $A_1 - A_2$ 或 $A_1 \setminus A_2$，即

$$A_1 - A_2 = \{x \mid x \in A_1 \text{ 且 } x \overline{\in} A_2\}.$$

以下的结论是明显的.

(1) 若 A 是一个集合，则

(i) $\varnothing \subset A$;

(ii) $A \subset A$(包含的自反性).

(2) 设 A_1, A_2, A_3 是三个集合，若 $A_1 \subset A_2$，$A_2 \subset A_3$，则 $A_1 \subset A_3$(包含的传递性).

我们不加证明地指出，实数集 $\boldsymbol{R}$ 具有下列基本性质.

命题 1.1 设 $a, b \in \boldsymbol{R}$，则三个关系式：$a=b$，$a>b$，$a<b$ 中必有且只有一个关系式成立.

命题 1.2 设 $a, b, c \in \boldsymbol{R}$，且 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$.

以上两命题称为实数的**有序性**.

命题 1.3(实数的稠密性) 设 $a, b \in \boldsymbol{R}$，且 $a<b$，则必存在实数 r，使得 $a<r<b$.

命题 1.4(Archimedes(阿基米德)公理) 对于任意给定的 $a \in \boldsymbol{R}$，必有大于 a 的自然数 n 存在.

设 l 为一给定直线，在 l 上取一定点 O 为原点，一定长度为单位长度,并规定 l 的一个指向为正向(图 1-1)，这样就在 l 上建立了数轴或实数轴.

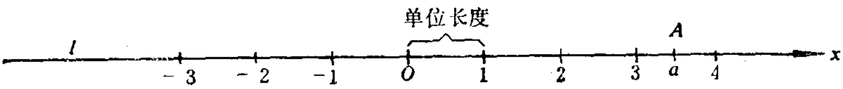

图 1-1

实数与数轴上的点是一一对应的,即对于每一个实数 a，在数轴 x 上必有唯一的一个点,即坐标为 a 的点 A 与之对应；反之,对于数轴上的每一个点 A,必有唯一的一个实数，即点 A 的坐标 a,与之对应.

因此,实数 a 与它在数轴上所对应的点 A,将不加区别，点 A 也可写为点 a.

命题 1.5 实数集 $\boldsymbol{R}$ 具有连续性.

对实数集的连续性概念,我们可以这样来理解:由于实数与数轴上的点是一一对应的,而数轴上的点是连续分布的,因此实数也连续而无空隙地充满整个数轴,即 $\boldsymbol{R}$ 具有连续性.

应当注意,有理数集也具有有序性、稠密性，但由于有理数点之间存在着许许多多的空隙——无理数点，使得有理数点集不能充满数轴,因而有理数集不具有连续性.

1.2 绝对值. 区间与邻域

设 $a\in\boldsymbol{R}$,数 a 的绝对值 $|a|$ 定义为

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{若 } a\geqslant 0, \\ -a, & \text{若 } a<0. \end{cases}$$

绝对值有下列基本性质. 设 $a,b\in\boldsymbol{R}$,则

(1) $|a|\geqslant 0$.

(2) $|-a|=|a|$.

(3) $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$.

(4) $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$.

一般地,对于任意有限多个实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,有

$$|a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n|=|a_1|\cdot|a_2|\cdot\cdots\cdot|a_n|.$$

(5) 若 $b\neq 0$,则 $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$.

(6) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

此式常称为**三角不等式**. 更一般地,有

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.$$

(7) $|a-b|\geqslant\big||a|-|b|\big|$.

(8) 对于正数 δ,不等式 $|x-a|<\delta$ 等价于不等式

$$a-\delta<x<a+\delta.$$

为了描述变量的变化范围,我们引进区间概念. 如无特别声明,我们总假定 $x\in\boldsymbol{R}$.

设 a,b 为常量,$a<b$.

称集合 $\{x|a<x<b\}$ 为由 a,b 确定的**开区间**,记为 (a,b) 或 $a<x<b$.

称集合 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 为由 a,b 确定的**闭区间**,记为 $[a,b]$ 或 $a\leqslant x\leqslant b$.

集合 $\{x|a\leqslant x<b\}$ 及集合 $\{x|a<x\leqslant b\}$ 均称为由 a,b 确定的**半开区间**,分别记为 $[a,b)$ 及 $(a,b]$,也常记为 $a\leqslant x<b$ 及 $a<x\leqslant b$.

a,b 称为上述各区间的**端点**.

开、闭及半开区间,可如图 1-2 表示,其中端点上的空圈"∘"表示区间不包含该点,黑点"•"表示包含该点.

因 a,b 为有限实数,区间 (a,b),$[a,b]$,$[a,b)$ 与 $(a,b]$ 都称为**有限区间**

今后还将用到下述无限区间.

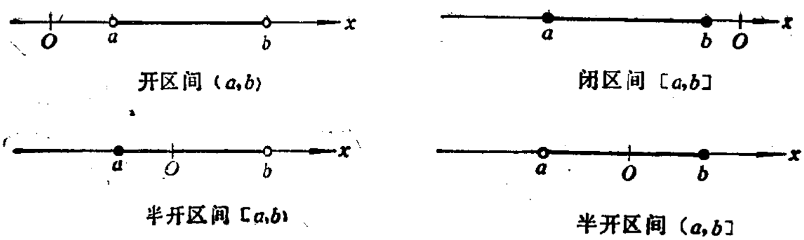

图 1-2

(1) 实数系全体即整个数轴，记为$(-\infty,+\infty)$或$-\infty<x<+\infty$,符号“∞”读为无穷大.

(2) 集合$\{x|x\geqslant a\}$,其中a为一实数，记为$[a,+\infty)$或$a\leqslant x<+\infty$；类似地，还有$(a,+\infty)$，$(-\infty,a]$，$(-\infty,a)$等等(图1-3).

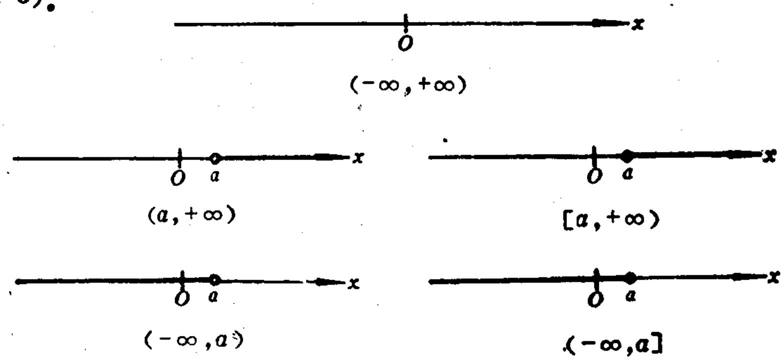

图 1-3

设$a\in \boldsymbol{R}$、δ为给定正数. 称集合$\{x||x-a|<\delta\}$为点a的**邻域**. 在数轴上它是一个以a为中心，长度为2δ的开区间$(a-\delta,a+\delta)$,如图1-4所示. 以后我们还常用到集合$\{x|0<|x-a|<\delta\}$,称为点a的**去心邻域**.

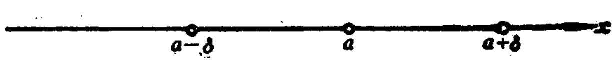

图 1-4