

高等学校试用教材

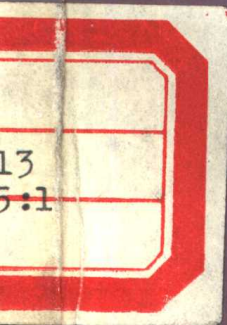
高等数学讲义

上册

南开大学

史瑞董 孙 澈 张朝池 王作友 编

高等数学讲义
上册
南开大学



本

高等教育出版社

013
45=1

高等学校试用教材

高等数学讲义

上册

南开大学

史瑞鳌 孙 激 张朝池 王作友 编

内 容 提 要

本书系参照原教育部审订的《综合大学物理专业高等数学教学大纲》编写的。

全书分上、下两册。上册包括函数与极限,微分学及其应用,不定积分,定积分及其应用,微分方程初步;下册包括无穷级数,空间解析几何,多元函数微分学,重积分,曲线积分和曲面积分,场论初步,广义积分和含参变量积分,以及傅里叶分析等。

本书可以作为综合大学、高等师范院校物理、电子、计算机与系统科学等专业的教材,也可作为其它理工科专业的参考书和自学者用书。

高等学校试用教材

高等数学讲义

上 册

南 开 大 学

史瑞鳌 孙澈 张朝池 王作友 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 12.125 字数 290 000

1989年2月第1版 1989年2月第1次印刷

印数 0 001—3,720

ISBN7-04-001009-7/O·648

定价 2.80 元

序 言

本书系参照原教育部制定的《综合大学物理学专业高等数学教学大纲》编写的,经理科数学力学教材编审委员会高等数学编审小组审核通过。

全书共分上、下册。上册包括函数与极限,微分学及其应用,不定积分,定积分及其应用,微分方程初步;下册包括无穷级数,空间解析几何,多元函数微分学,重积分,曲线积分和曲面积分,场论初步,广义积分和含参变量积分及傅里叶分析等。

考虑到当前的物理学科对高等数学教学提出了更高的要求,也考虑到某些物理学科学生学习更为高深的数学及物理课程的需要,本书在大纲范围内作了适当扩充。例如在一元微积分中,介绍了函数插值、代数方程的近似求根法,数值积分等数值分析方面的知识;对函数项级数的一致收敛性,隐函数存在定理,广义积分和含参变量广义积分,傅里叶级数和傅里叶变换等较深的数学内容都作了适度的论述。为保持数学上的系统性和科学性,书中除少数繁难的定理只述而不证外,其余绝大部分的重要定理及计算公式都给出了详细的证明。

书中带“*”号的段落是供选学的内容,教师可根据实际情况作适当的取舍。为加强对学生基本运算能力和逻辑推理能力的训练,各节后面都配置了一定数量难度不同的习题。

本书可作为综合大学和高等师范院校物理、电子、计算机及系统科学等专业的教材,也可供其它理工科有关专业参考。

在本书编写过程中得到了南开大学吴大任教授,邓汉英教授的热情关心和指导;南开大学黄玉民、郑仲三等同志校阅了下册部

分章节,并提出不少有益的建议。

参加教材审查的同志仔细地审阅了本书初稿,并提出许多宝贵意见。在此,谨向他们表示衷心的感谢。

由于编者水平有限,书中不妥和错误之处在所难免,恳请读者给予批评和指正。

编 者

目 录

序言	1
第一章 变量与函数	1
§ 1 实数系、函数概念	1
1.1 实数、集合	1
1.2 绝对值、区间与邻域	4
1.3 变量与函数	7
§ 2 函数的进一步讨论	11
2.1 函数的表示方法	11
2.2 一些特殊类型的函数	14
2.3 隐函数	18
2.4 反函数与复合函数	19
2.5 初等函数	23
2.6 函数的参数表示法	31
习题	34
第二章 函数的极限与连续	38
§ 1 数列的极限	38
1.1 数列	38
1.2 无穷小量	40
1.3 数列的极限	44
习题	57
§ 2 函数的极限	60
2.1 函数的极限定义	60
2.2 函数极限的基本性质	67
2.3 函数极限的四则运算、两个判别法则	68
2.4 复合函数与反函数的极限	71
2.5 两个重要极限	74

2.6 无穷大量, 无穷大量与无穷小量的阶	77
习题	79
§ 3 函数的连续性	83
3.1 连续函数的定义	83
3.2 连续函数的运算, 初等函数的连续性	85
3.3 函数的间断点及其分类	86
3.4 函数的一致连续概念	90
3.5 闭区间上连续函数的性质	92
习题	94
第三章 微分学	97
§ 1 函数的导数概念	97
1.1 问题的提出	97
1.2 导数的定义	99
1.3 导数的几何意义	100
1.4 左导数与右导数	101
1.5 函数的可导性与连续性的关系	104
1.6 函数求导的基本公式	105
习题	107
§ 2 求导法则	108
2.1 导数的四则运算	108
2.2 反函数的求导法则	110
2.3 复合函数的求导法则	112
2.4 隐函数的求导法则	115
2.5 由参数方程确定的函数的求导法则	118
2.6 高阶导数	120
2.7 导数的简单应用	125
习题	129
§ 3 微分及其应用	134
3.1 问题的提出	134
3.2 微分的定义	135
3.3 可微与可导的关系	137

3.4	微分的几何意义	138
3.5	微分法则	139
3.6	高阶微分	140
3.7	微分的简单应用	142
	习题	146
第四章	微分学基本定理及其应用	147
§ 1	微分学基本定理	147
§ 2	基本定理的一些应用	151
2.1	函数为常数的条件	151
2.2	函数单调性的判断	152
2.3	对证明不等式的应用	154
	习题	156
§ 3	不定式的定值	158
3.1	$\frac{0}{0}$ 型不定式	159
3.2	$\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式	161
3.3	其它类型的不定式	164
	习题	167
§ 4	泰勒(Taylor)公式	168
4.1	问题的提出	168
4.2	泰勒公式的一般形式	169
4.3	余项估计	170
4.4	例题	173
	习题	178
§ 5	函数的极值, 最大值与最小值	179
5.1	函数的极值及其必要条件	179
5.2	极值的充分条件	180
5.3	函数的最大值与最小值	184
	习题	192
§ 6	曲线的凹凸与函数的作图	194

6.1	曲线的凹凸与拐点	194
6.2	曲线的渐近线	198
6.3	函数作图	202
	习题	205
§ 7	曲率与弧微分	206
7.1	曲率的概念	206
7.2	弧微分	207
7.3	曲率的计算	208
*7.4	曲率圆(密切圆)	210
	习题	214
§ 8	方程的近似解法	214
8.1	弦截法(割线法)	215
8.2	切线法(牛顿(Newton)法)	216
8.3	收敛性, 实例	218
	习题	220
* § 9	插值法	220
9.1	拉格朗日插值法	221
9.2	埃尔米特(Hermite)插值	225
	习题	229
第五章	不定积分	230
§ 1	不定积分的概念	230
1.1	原函数与不定积分	230
1.2	基本积分表	231
1.3	不定积分的性质	232
	习题	234
§ 2	积分法	235
2.1	“凑”微分法	235
2.2	换元积分法	236
2.3	分部积分法	241
2.4	有理函数的不定积分	244
2.5	三角函数有理式的积分	251

2.6 某些无理函数的积分	255
习题	259
第六章 定积分	263
§1 定积分的概念	263
1.1 定积分概念的引进	263
1.2 定积分的定义	269
1.3 连续函数的可积性	271
§2 定积分的基本性质及牛顿-莱布尼兹公式	274
2.1 定积分的基本性质	274
2.2 牛顿-莱布尼兹公式	278
§3 定积分的换元法与分部积分法	281
3.1 定积分的换元法	281
3.2 定积分的分部积分法	284
§4 广义积分初步	286
4.1 积分区间为无穷区间的广义积分	287
4.2 被积函数为无界函数的广义积分	288
习题	290
§5 定积分的应用	295
5.1 平面上连续曲线围成图形的面积	296
5.2 体积的计算	300
5.3 曲线的弧长	303
5.4 旋转体的侧面积	308
5.5 重心(质量中心)	309
5.6 转动惯量	315
5.7 力与功	316
5.8 连续函数的平均值与均方根	321
习题	322
§6 定积分的近似计算	328
6.1 梯形公式	328
6.2 抛物线公式——辛卜生(Simpson)公式	329

*6.3 近似积分中的误差估计	331
习题	336
第七章 微分方程初步	337
§ 1 基本概念	337
§ 2 一阶微分方程	339
2.1 一阶可分离变量的微分方程	339
2.2 可化为分离变量的微分方程	343
2.3 一阶线性微分方程	348
2.4 导数未解出的某些简单方程	351
习题	355
§ 3 特殊类型的二阶微分方程	358
3.1 方程 $y'' = f(x)$	358
3.2 方程 $y'' = f(x, y')$	359
3.3 方程 $y'' = f(y, y')$	359
习题	361
§ 4 二阶线性微分方程	362
4.1 齐次线性方程的一般理论	362
4.2 非齐次线性方程的解	367
4.3 二阶常系数线性方程	370
4.4 尤拉方程	374
习题	375

第一章 变量与函数

§1 实数系. 函数概念

1.1 实数. 集合

有尽小数及无尽循环小数,称为有理数,如 5.63 , $0.1666\dots$ 等都是有理数. 无尽非循环小数称为无理数,如 $\sqrt{2}$, 圆周率 π 等都是无理数. 有理数与无理数之全体构成实数系. 因为任何有尽小数(包括整数)都可用循环数为9的无尽小数来表示,如 $9.3 = 9.2999\dots$,所以也可以说,实数系是由一切无尽小数组成的数系.

我们将经常使用“集合”这一概念. 一个集合就是指具有某种共同特性的个体的全体. 集合里的各个体称为该集合的元素. 例如,由 $2, 7, 13, 27$ 四个整数构成一个数集,记为 $\{2, 7, 13, 27\}$. 平面上通过原点的所有直线构成一直线集合,每一条这样的直线都是此集合的一个元素. 前者只由四个(有限个)元素构成,称为有限集,后者由无限多个元素构成,称为无限集.

习惯上常用大写字母 A, B, C 等表示集合,用小写字母 a, b, c 等表示集合中的元素.

通常,用 N 表示全体自然数的集, Z 表示全体整数的集, Q 表示全体有理数的集, R 表示全体实数的集.

若 a 是集合 A 的元素,则称 a 属于 A ,记为 $a \in A$. 例如, $-0.25 \in Q$.

若 a 不是集合 A 的元素,则称 a 不属于 A ,记为 $a \notin A$. 例如, $2\sqrt{2} \notin Q$.

通常表示集合的方法有:

(1) 枚举法,即将集合中的元素全部列举出来. 例如,

$$A = \{-1, 2, 0.5\}$$

表示集合 A 是由 $-1, 2, 0.5$ 三个数构成的. 又如,所有正奇数构成的集合可以表示为

$$B = \{1, 3, 5, 7, \dots\}.$$

(2) 概括法,通常用

$$A = \{x | P\}$$

表示集合 A 是由满足条件 P 的所有元素 x 构成的集合. 例如

$$A = \{x | -2 < x < 3, x \in \mathbf{R}\}$$

表示所有介于 -2 和 3 之间的实数构成的集合.

又如,正奇数集合可以表示为

$$B = \{x | x = 2n - 1, n \in \mathbf{N}\}.$$

我们把不含任何元素的集合也看成一个集合,称为空集,记为 \emptyset . 例如 $\{x | x < 1 \text{ 且 } x > 3, x \in \mathbf{R}\} = \emptyset$.

设 A_1, A_2 为两个集合,如果当 $x \in A_1$,必有 $x \in A_2$,则称 A_1 包含于 A_2 ,或 A_2 包含 A_1 ,记为

$$A_1 \subset A_2 \text{ 或 } A_2 \supset A_1.$$

当 $A_1 \subset A_2$ 时, A_1 称为 A_2 的子集.

若 $A_1 \subset A_2$ 且 $A_2 \subset A_1$,则称集合 A_1, A_2 相等,记为 $A_1 = A_2$.

既属于集合 A_1 ,又属于集合 A_2 的所有元素构成的集合,称为 A_1 和 A_2 的交集,记为 $A_1 \cap A_2$,即

$$A_1 \cap A_2 = \{x | x \in A_1 \text{ 且 } x \in A_2\}.$$

例如,设 $A_1 = \{x | x > 0, x \in \mathbf{R}\}, A_2 = \{x | x \leq 1, x \in \mathbf{R}\}$,则

$$A_1 \cap A_2 = \{x | 0 < x \leq 1, x \in \mathbf{R}\}.$$

更一般地, n 个集合 A_1, A_2, \dots, A_n 的交集是同属于诸 A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 的所有元素构成的集合,记为

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x \mid x \in A_1 \text{ 且 } x \in A_2, \dots, \text{ 且 } x \in A_n\}.$$

所有那些至少属于 A_1 或 A_2 之一的元素构成的集合, 称为 A_1, A_2 的并集, 记为 $A_1 \cup A_2$, 即

$$A_1 \cup A_2 = \{x \mid x \in A_1 \text{ 或 } x \in A_2\}.$$

更一般地, n 个集合 A_1, A_2, \dots, A_n 的并集是所有那些至少属于 $A_i (i=1, 2, \dots, n)$ 之一的元素构成的集合, 记为

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \text{ 或 } x \in A_2, \dots, \text{ 或 } x \in A_n\}.$$

所有属于 A_1 而不属于 A_2 的元素构成的集合, 称为集合 A_1, A_2 的差集, 记为 $A_1 - A_2$ 或 $A_1 \setminus A_2$, 即

$$A_1 - A_2 = \{x \mid x \in A_1 \text{ 且 } x \notin A_2\}.$$

以下的结论是明显的.

(1) 若 A 是一个集合, 则

(i) $\emptyset \subset A$;

(ii) $A \subset A$ (包含的自反性).

(2) 设 A_1, A_2, A_3 是三个集合, 若 $A_1 \subset A_2, A_2 \subset A_3$, 则 $A_1 \subset A_3$ (包含的传递性).

我们不加证明地指出, 实数集 R 具有下列基本性质.

命题 1.1 设 $a, b \in R$, 则三个关系式: $a = b, a > b, a < b$ 中必有且只有一个关系式成立.

命题 1.2 设 $a, b, c \in R$, 且 $a > b, b > c$, 则 $a > c$.

以上两命题称为实数的有序性.

命题 1.3 (实数的稠密性) 设 $a, b \in R$, 且 $a < b$, 则必存在实数 r , 使得 $a < r < b$.

命题 1.4 (Archimedes (阿基米德) 公理) 对于任意给定的 $a \in R$, 必有大于 a 的自然数 n 存在.

设 l 为一给定直线, 在 l 上取一定点 O 为原点, 一定长度为单位长度, 并规定 l 的一个指向为正向(图 1-1), 这样就在 l 上建立了数轴或实数轴.

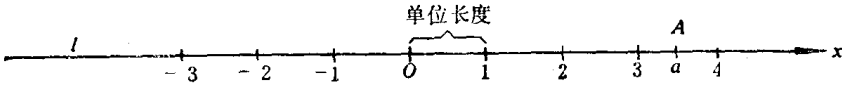


图 1-1

实数与数轴上的点是一一对应的, 即对于每一个实数 a , 在数轴 x 上必有唯一的一个点, 即坐标为 a 的点 A 与之对应; 反之, 对于数轴上的每一个点 A , 必有唯一的一个实数, 即点 A 的坐标 a , 与之对应.

因此, 实数 a 与它在数轴上所对应的点 A , 将不加区别, 点 A 也可写为点 a .

命题 1.5 实数集 \mathbf{R} 具有连续性.

对实数集的连续性概念, 我们可以这样来理解: 由于实数与数轴上的点是一一对应的, 而数轴上的点是连续分布的, 因此实数也连续而无空隙地充满整个数轴, 即 \mathbf{R} 具有连续性.

应当注意, 有理数集也具有有序性、稠密性, 但由于有理数点之间存在着许许多多的空隙——无理数点, 使得有理数点集不能充满数轴, 因而有理数集不具有连续性.

1.2 绝对值. 区间与邻域

设 $a \in \mathbf{R}$, 数 a 的绝对值 $|a|$ 定义为

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{若 } a \geq 0, \\ -a, & \text{若 } a < 0. \end{cases}$$

绝对值有下列基本性质. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 则

- (1) $|a| \geq 0$.
- (2) $|-a| = |a|$.

$$(3) -|a| \leq a \leq |a|.$$

$$(4) |a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$$

一般地,对于任意有限多个实数 a_1, a_2, \dots, a_n , 有

$$|a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot \dots \cdot |a_n|.$$

$$(5) \text{ 若 } b \neq 0, \text{ 则 } \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

$$(6) |a+b| \leq |a| + |b|.$$

此式常称为三角不等式. 更一般地,有

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|.$$

$$(7) |a-b| \geq ||a| - |b||.$$

(8) 对于正数 δ , 不等式 $|x-a| < \delta$ 等价于不等式

$$a - \delta < x < a + \delta.$$

为了描述变量的变化范围, 我们引进区间概念. 如无特别声明, 我们总假定 $x \in \mathbf{R}$.

设 a, b 为常量, $a < b$.

称集合 $\{x | a < x < b\}$ 为由 a, b 确定的开区间, 记为 (a, b) 或 $a < x < b$.

称集合 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 为由 a, b 确定的闭区间, 记为 $[a, b]$ 或 $a \leq x \leq b$.

集合 $\{x | a \leq x < b\}$ 及集合 $\{x | a < x \leq b\}$ 均称为由 a, b 确定的半开区间, 分别记为 $[a, b)$ 及 $(a, b]$, 也常记为 $a \leq x < b$ 及 $a < x \leq b$.

a, b 称为上述各区间的端点.

开、闭及半开区间, 可如图 1-2 表示, 其中端点上的空圈“ \circ ”表示区间不包含该点, 黑点“ \cdot ”表示包含该点.

因 a, b 为有限实数, 区间 $(a, b), [a, b], [a, b)$ 与 $(a, b]$ 都称为有限区间

今后还将用到下述无限区间.

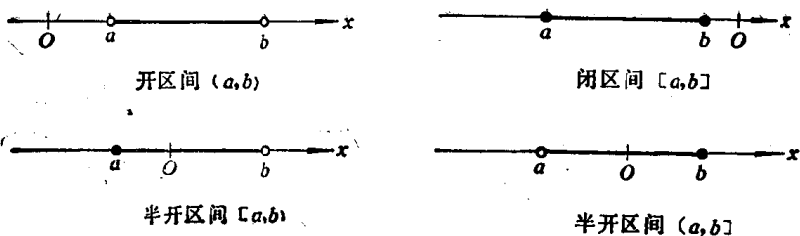


图 1-2

(1) 实数系全体即整个数轴, 记为 $(-\infty, +\infty)$ 或 $-\infty < x < +\infty$, 符号“ ∞ ”读为无穷大.

(2) 集合 $\{x | x \geq a\}$, 其中 a 为一实数, 记为 $[a, +\infty)$ 或 $a \leq x < +\infty$; 类似地, 还有 $(a, +\infty)$, $(-\infty, a]$, $(-\infty, a)$ 等等(图 1-3).

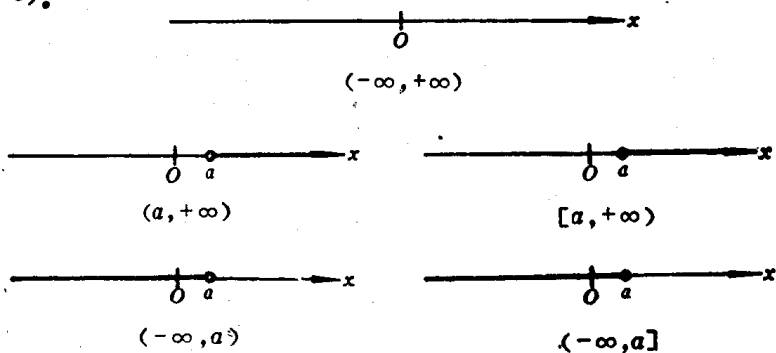


图 1-3

设 $a \in \mathbf{R}$, δ 为给定正数. 称集合 $\{x | |x - a| < \delta\}$ 为点 a 的邻域. 在数轴上它是一个以 a 为中心, 长度为 2δ 的开区间 $(a - \delta, a + \delta)$, 如图 1-4 所示. 以后我们还常用到集合 $\{x | 0 < |x - a| < \delta\}$, 称为点 a 的去心邻域.



图 1-4