应用数学丛书

罗伯勋 编

投入产出分析及其数学基础

华中工学院出版社

投入产出分析及其数学基础

罗伯勋 编

责任编辑 孙加可 龙纯曼

*

华中工学院出版社出版发行

(武昌喻家山)

新华书店湖北发行所经销

华中工学院出版社印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：7.25 字数：154 000

1987年11月第1版 1987年11第1次印刷

印数：1—2 000

ISBN 7—5609—0002—X/O·1

统一书号：13255—076 定价：1.26元

内 容 提 要

投入产出分析是经济学的一个重分支，它已在世界各国得到广泛的应用。

投入产出分析是利用数学考察和研究经济系统的投入与产出之间数量关系的一种方法，是进行经济分析、经济预测和计划管理的有效工具。本书主要阐述投入产出分析的原理、方法、应用及其有关的数学基础。

本书可作为大专院校经济、经济管理、财贸等专业师生的教学参考书，也可供经济管理人员、研究生、和其他工程技术人员参考。

前　言

现代化的经济要求有现代化的管理。社会主义经济的特点更是要求在生产计划和管理的过程中，采用科学、有效的方法和手段。在这方面，经过不断完善和提高的投入产出分析，已成为一种十分有效的进行经济分析、经济预测和计划管理的工具。

经济概念中的“投入”和“产出”，分别是指经济活动的消耗与结果。投入产出分析，就是通过编制经济系统的投入产出表，及建立相应于该系统各部门间相互联系的平衡关系式，用以反映经济系统各部门间直接联系和间接联系的数量关系的一种方法。

美国著名经济学家，诺贝尔经济奖获得者Wassily Leontief 是投入产出分析的创始人。他于三十年代利用美国国情普查资料，从宏观上研究了美国经济的均衡问题。1953年在他的著作《美国经济结构研究》一书中，阐述了投入产出分析的基本原理及发展。目前，这种方法已在世界90多个国家和地区得到普遍的推广和应用。投入产出分析经过将近50年的实践和完善，无论在理论的深度和应用的广度两个方面，较之当初，都不可同日而语了。

从六十年代起，投入产出分析与社会主义的经济理论及我国的实践相结合，经过消化和创造已逐渐成为我国实现现代化管理的一个重要工具。

随着我国四化建设的需要，大专院校中各类经济专业应运而生。作者深感在阐述投入产出分析的原理和应用的同时，适当地强调这种方法的数学基础，已成为迫切的需要。只有这

样，才能使投入产出分析扎根于坚实的基础之上，并希望以此为出发点，去窥探这门学问发展的未来，这就是本书的写作目的。

本书如能出现在经济、管理专业的研究生、本科生、工程技术人员和对现代管理有兴趣的其他人员的案头边，而且较之同类的书读起来还有所得，这对作者来说，就是一种极大的精神满足了。至于读者，只要有一些微积分和线性代数的知识，这本书读起来就不会产生很大的困难。

在编写本书时，直接和间接地受到不少前辈和同行的指教，武汉大学卢焕忠副教授为本书进行了审阅，对此，作者当然铭记在心。如果在文中出现谬误或不妥之处，敬请读者不吝赐教。

罗伯勋

1987年

目　　录

第一章　投入产出分析的原理

§1.1　概　　述

经济活动中的生产部门、产品、劳动力、原料、动力、资金、厂房、价格等称为经济要素。一组有联系的经济要素构成的集合称为**经济系统**。投入产出分析是利用数学和电子计算机，考察和研究经济系统的投入和产出间数量关系的一种方法。在苏联和东欧各国，它被称为部门联系平衡法，日本称它为产业关联法，一般称为投入产出分析，投入产出技术或投入产出法。

投入产出法的“投入”是指从事经济活动的消耗；“产出”是经济活动的结果。如果进行的是生产活动，那么生产过程中对各种原材料、燃料、动力、固定资产折旧和劳动力的消耗，就是这项生产活动的投入；而“产出”是指产品生产出来后产品的使用方向和数量，又称流向。例如用于生产消费、生活消费和积累等。

应用投入产出分析研究经济系统的主要内容是，编制棋盘式的投入产出表和建立相应的线性方程组，形成一个模拟现实经济系统结构和产品再生产过程的经济数学模型，用定量的方法研究和分析该经济系统。

在一个经济系统中，有许多技术经济部门，这些部门之间存在着错综复杂的生产技术联系和经济联系。这些联系可分为直接联系和间接联系。例如，煤炭部门为电力部门提供燃料，而电力部门为煤炭部门提供动力，这些均表现为直接联系。简

言之，在经济活动中，如果一个部门直接消耗另一个部门的产品的联系称为直接联系，由于直接联系所产生的产品消耗称为直接消耗．所谓间接联系，就是通过一系列中间环节（其他部门）而发生的联系，由于间接联系所产生的产品消耗，称为间接消耗．譬如，煤炭部门需要消耗机械制造部门生产的采煤设备，而采煤设备的制造需要消耗电力部门的电力，这时煤炭部门和电力部门的联系则表现为间接联系，它们之间发生产品的间接消耗．部门间产品的直接消耗和间接消耗的总和称为完全消耗．读者会发现，这些内容将成为我们讨论投入产出分析的关键所在．

经济系统中各部门间的联系，可以用棋盘式表格反映出来，称之为**投入产出表**，其最简化表式如表1.1．

在表1.1中，最终产品 Y_i(或称最终需求）是本期内第 i 部门生产活动的最终成果，它用作社会的积累（国家储备、新增固定资产、出口等）和消费（个人消费和社会集团消费）．中间产品 X_{ij} 是本期内为进行生产活动第 j 部门消耗第 i 部门的产品量，总产品X_i则是最终产品与中间产品之和．投入产出表一般分为Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ四大部分，显见，第一部分（标号为Ⅰ）是表的核心，它反映经济系统中各部门间的技术经济联系．如果经济系统处于平衡状态，那么，表中的数值就应满足如下的关系：

从左到右，中间产品＋最终产品＝总产品，

从上到下，中间投入＋最初投入＝总投入．

这两组关系式实质上是两组方程组，它构成了投入产出的数学模型．

因此，可以确切地说，投入产出分析，就是通过编制投入产出表并建立相应的反映部门间联系的平衡关系式（方程组），用

表1.1　　　　　　　　　　　　　　　　单位：（价值单位）

产品的分配去向（产出）. 产品的消耗来源（投入）		中间产品					最终产品			总产品
		部门1	部门2	⋮ 部门 j	⋮ 部门 n	合计	积累…	消费…	合计	
中间投入	部门1									
	……									
	部门 i			X_{ij}					Y_i	X_i
	……			Ⅰ			Ⅱ			
	部门 n									
	合计									
最初投入	固定资产折旧									
	劳动报酬			Ⅲ			Ⅳ			
	社会纯收入									
	合计									
总投入										

以反映经济系统各部门间直接联系和间接联系的数量关系的一种方法。

既然投入产出法是用数学方法研究经济系统的平衡问题，国家、地区、部门和企业都可以应用，所以投入产出法已成为应用较为广泛的一种数量经济分析方法。

§1.2　静态投入产出模型

投入产出模型按照分析时期的不同，可分为**静态模型**和**动态模型**两大类。静态模型主要分析与研究某一个时期的再生产过程。动态模型则分析与研究若干时期的再生产过程，并研究

各个时期再生产过程的相互联系。本书主要阐述静态模型的原理和一些值得探讨的理论和方法。

投入产出模型按照计量单位的不同，可分为**价值型**和**实物型**，在投入产出表中，前者均按价值单位(元)计量，后者按各种实物单位(担、吨、米等)计量。这两种模型是最基本的而又能反映投入产出分析特征的模型，因此，我们从这两种模型入手阐述投入产出分析的基本原理。

一、价值型投入产出模型

价值型投入产出表是以经济系统中的产品部门为单位来编

表1.2 单位：元

投入＼产出		中间使用						最终产品			总产品
		部门1	部门2	⋮	部门j	⋮	部门n	消费	积累	合计	
中间投入	部门 1	X_{11}	X_{12}	⋯	X_{1j}	⋯	X_{1n}			Y_1	X_1
	部门 2	X_{21}	X_{22}	⋯	X_{2j}	⋯	X_{2n}			Y_2	X_2
	……	⋮	⋮		⋮		⋮			⋮	⋮
	部门 i	X_{i1}	X_{i2}	⋯	X_{ij}	⋯	X_{in}			Y_i	X_i
	……	⋮	⋮		⋮		⋮			⋮	⋮
	部门 n	X_{n1}	X_{n2}	⋯	X_{nj}	⋯	X_{nn}			Y_n	X_n
最初投入	固定资产折旧	D_1	D_2	⋯	D_j	⋯	D_n				
	新创造价值 劳动报酬	V_1	V_2	⋯	V_j	⋯	V_n				
	新创造价值 社会纯收入	M_1	M_2	⋯	M_j	⋯	M_n				
总投入		X_1	X_2	⋯	X_j	⋯	X_n				

制的，即表中的“中间投入”与“中间使用”栏只能列示产品部门，而不能列示产品，这是其一；其二，表中所有的指标都是以价值单位来计量的。

在利用投入产出方法制定经济计划和进行经济分析工作之前，首先要根据某一年份的实际统计资料编制一个投入产出表。价值型投入产出表的结构如表1.2。

综观表1.2，可以看到两条双线将表分成四个象限$\dfrac{\mathrm{I}\,\|\,\mathrm{II}}{\mathrm{III}\,\|\,\mathrm{IV}}$。

第一象限是投入产出表的基本部分。它的主栏（中间投入栏）和宾栏（中间使用栏）都是各个生产部门，主、宾栏中生产部门的名称和排列顺序完全相同。对于同一个生产部门，当它排在主栏时是生产者，排在宾栏时是消费者。

注意，表中所指的部门是所谓“纯部门”，即假定每个部门只按一种技术生产一种同类产品，因此，“部门”与“产品”构成一一对应关系。如果我们将第Ⅰ象限的数据排成一矩阵

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{pmatrix},$$

它称为投入产出**流量矩阵**。矩阵的列表示投入数，其行表示产出数。

第二象限，主栏是各生产部门，宾栏是最终产品。横向观察，Y_i表示第 i 部门的总产出中用作最终产品的产品量（价值形式），纵向观察其构成是提供最终产品的部门。这一象限通常简称最终产品部分。

第三象限，主栏是最初投入，宾栏是生产部门，横向观察是折旧基金和新创价值的部门构成；纵向观察是各部门提取的折

旧基金和新创价值的数额；它说明新创价值在劳动报酬和社会纯收入两个方面是如何分配的。这部分常简称为最初投入部分。

第四象限表明国民收入的再分配情况，因为这一部分的资料难以获得，所以这一栏往往空着。

从表1.2的水平方向观察，第 i 行行向量是

$$(X_{i1},\ X_{i2},\ \cdots,\ X_{ij},\ \cdots X_{in},\ Y_i,\ X_i),$$

它表示了第 i 部门的总产出量为 X_i，X_i 依次分配给第1、第2、第 j、…及第 n 部门的产品量为 X_{i1}，X_{i2}，…，X_{ij}，…，X_{in}。我们也可以说该行向量反映了产品的实物运动，即第 i 部门产品的产出和使用方向，而 Y_i 为 X_i 中不再参加本期生产周转的最终产品量。

从表 1.2 的垂直方向看，第 j 列列向量是

$$(X_{1j},\ X_{2j},\ \cdots,\ X_{ij},\ \cdots,\ X_{nj},\ D_j,\ V_j,\ M_j,\ X_j)^T,$$

它反映了生产部门在生产中的投入（消耗）和产品的价值运动形态。它表明第 j 部门在生产活动中投入的第 1 个部门的产品为 X_{1j}，第 2 个部门的产品为 X_{2j}，…，第 n 个部门的产品为 X_{nj}，而 D_j、V_j、M_j 则构成 j 部门的最初投入。如果生产是处于均衡状态，那么该部门中间投入与最初投入之和应等于总投入量 X_j，也应等于该部门的总产出量。

这样，从投入产出表 1.2 的水平和垂直两个方向可以建立如下两组平衡关系式：

（1）中间产品＋最终产品＝总产品，

即 $$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} + Y_i = X_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)。 \qquad (1.1)$$

（2）中间投入＋最初投入＝总投入，

即 $$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} + D_j + V_j + M_j = X_j \qquad (j=1,\ 2,\cdots,n)。 \qquad (1.2)$$

我们引入下面的重要系数

$$a_{ij}=\frac{X_{ij}}{X_j}\qquad (X_j\neq 0;\ i,j=1,\ 2,\ \cdots n),$$

它称为(价值型)**直接消耗系数**或**技术系数**，其经济意义是，生产一个单位的第 j 种产品所消耗的第 i 种产品的产品量。将 a_{ij} 分别代入式(1.1)和式(1.2)，得

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}X_j+Y_i=X_i\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\tag{1.3}$$

和

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}X_j+D_j+V_j+M_j=X_j\quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n).\tag{1.4}$$

再引入下列的向量和矩阵：

(1) 最终产品列向量 $\mathbf{Y}=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)^T$,

(2) 总产品列向量 $\mathbf{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^T$,

(3) 固定资产折旧列向量 $\mathbf{D}=(D_1,D_2,\cdots,D_n)^T$,

(4) 劳动报酬列向量 $\mathbf{V}=(V_1,V_2,\cdots,V_n)^T$,

(5) 社会纯收入列向量 $\mathbf{M}=(M_1,M_2,\cdots,M_n)^T$,

(6) (价值型)直接消耗系数矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}=(a_{ij}),$$

(7) 中间投入系数矩阵

$$\hat{\mathbf{C}}=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}a_{i1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sum_{i=1}^{n}a_{i2} & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \sum_{i=1}^{n}a_{in}\end{pmatrix}.$$

利用这些向量和矩阵，式(1.3)和式(1.4)分别可写成如下的矩阵形式：

$$\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}, \tag{1.5}$$

$$\hat{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{D}+\boldsymbol{V}+\boldsymbol{M}=\boldsymbol{X}, \tag{1.6}$$

也可写为

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}, \tag{1.7}$$

$$(\boldsymbol{I}-\hat{\boldsymbol{C}})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{D}+\boldsymbol{V}+\boldsymbol{M}. \tag{1.8}$$

在以后的讨论中，上两个方程组和直接消耗系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 将起着非常重要的作用．还要提到的是，中间投入系数矩阵 $\hat{\boldsymbol{C}}$ 也有重要的经济意义，其主对角线上的元素 $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$，表明在第 j 部门产值中消耗的劳动对象(原材料、燃料、电力等)所占的比重。

价值型投入产出模型中的直接消耗系数矩阵 $\boldsymbol{A}$，其元素 a_{ij} 由于 $\boldsymbol{A}$ 的经济意义有以下两条重要性质：

性质1.1 $\boldsymbol{A}$ 所有元素是非负的，即

$$a_{ij}\geqslant 0 \qquad (i,j=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

性质1.2 $\boldsymbol{A}$ 各列元素之和小于 1，即

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}<1 \qquad (j=1,2,\cdots,n).$$

第一条性质是显然的，因为投入不可能为负值．关于第二条性质，我们作如下的经济证明．

如果存在部门 k，使得

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\geqslant 1,$$

由 $a_{ik}=X_{ik}/X_k$，所以有

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ik}\geqslant X_k.$$

这式说明，k 部门的总产出X_k小于或等于该部门进行生产活动的消耗，显然，这个部门的生产活动是无法进行的，从而引起矛盾。

直接消耗系数矩阵 **A**的这两条经济性质，将成为我们今后讨论的重要依据。利用它我们先讨论投入产出方程组（1.7）和（1.8）解的存在唯一性。在此之先，我们证明一个一般性的代数结论。

定理1.1 设有 n 阶方阵$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，若$|b_{jj}|>\sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}|b_{ij}|(j=1,2,\cdots,n)$，则矩阵$\boldsymbol{B}$ 是非奇异的。

证 假设不然，设 $\boldsymbol{B}$ 是奇异的，则存在非零行向量 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$，使得

$$\boldsymbol{XB}=0.$$

令
$$|x_k|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|>0,$$

考虑方程组$\boldsymbol{XB}=0$中的第 k 个方程，我们有

$$\sum_{i=1}^{n}b_{ik}x_i=0$$

或者
$$b_{kk}x_k=-\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}b_{ik}x_i.$$

对上式取绝对值后，有

$$|b_{kk}||x_k|=|-\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}b_{ik}x_i|\leqslant\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}|b_{ik}||x_i|,$$

因此
$$|b_{kk}|\leqslant\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}|b_{ik}|\frac{|x_i|}{|x_k|}\leqslant\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}|b_{ik}|,$$

这与定理之假设矛盾。证毕。

推论1.1.1 投入产出模型中，对于任意的最终产品向量

Y，方程组 $(I-A)X=Y$ 存在唯一总产品向量 X 的解：$X=(I-A)^{-1}Y$。

令 $B=I-A$，利用 A 的两条经济性质即可验证 B 满足定理 1.1 之条件，故 $I-A$ 是非奇异的，因而总产品向量解是存在唯一的。

推论1.1.2 投入产出模型中，方程组 $(I-\hat{C})X=D+V+M$ 存在唯一解 $X=(I-\hat{C})^{-1}(D+V+M)$。

证法同推论1.1.1，利用矩阵 $\hat{C}$ 的定义及令 $B=I-\hat{C}$，即可验证 $I-\hat{C}$ 满足定理1.1之条件。

例 假设(1)××地区1984年的价值表（部分）如表 1.3；(2)该地区1985年各部门总产出增长10%；(3)经1985年直接消耗系数与1984年相同。求该地区1985年各部门的中间投入量。

表1.3 单位：万元

投入 \ 产出		中间产品			最终产品	总产出
		农业	工业	其他	合计	
中间投入	农业	200	500	100	1200	2000
	工业	400	2000	300	2300	5000
	其他	200	500	0	300	1000

解 （1）求1984年直接消耗系数矩阵。

$$A_{84}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{X_{11}}{X_1} & \dfrac{X_{12}}{X_2} & \dfrac{X_{13}}{X_3} \\ \dfrac{X_{21}}{X_1} & \dfrac{X_{22}}{X_2} & \dfrac{X_{23}}{X_3} \\ \dfrac{X_{31}}{X_1} & \dfrac{X_{32}}{X_2} & \dfrac{X_{33}}{X_3} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{200}{2000} & \frac{500}{5000} & \frac{100}{1000}\\ \frac{400}{2000} & \frac{2000}{5000} & \frac{300}{1000}\\ \frac{200}{2000} & \frac{500}{5000} & \frac{0}{1000}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.1 & 0.1 & 0.1\\ 0.2 & 0.4 & 0.3\\ 0.1 & 0.1 & 0\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}_{85}.$$

（注：$\boldsymbol{A}_{84}$之下标“84”，表示1984年，下同）

（2）求1985年的总产出 $\boldsymbol{X}_{85}$。由假设

$$\boldsymbol{X}_{85}=\boldsymbol{X}_{84}\times(1+10\%)=\begin{pmatrix}2000\\5000\\1000\end{pmatrix}\times 110\%=\begin{pmatrix}2200\\5500\\1100\end{pmatrix}$$

（3） 若以$\hat{\boldsymbol{X}}$表示以 $\boldsymbol{X}$ 元素为主对角线元素的对角矩阵，$\boldsymbol{Q}$ 为流量矩阵，利用直接消耗系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与$\hat{\boldsymbol{X}}$，有

$$\boldsymbol{Q}_{85}=\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12} & X_{13}\\ X_{21} & X_{22} & X_{23}\\ X_{31} & X_{32} & X_{33}\end{pmatrix}_{85}=\boldsymbol{A}_{85}\hat{\boldsymbol{X}}_{85}$$

$$=\begin{pmatrix}0.1 & 0.1 & 0.1\\ 0.2 & 0.4 & 0.3\\ 0.1 & 0.1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2200 & & \\ & 5500 & \\ & & 1100\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}220 & 550 & 110\\ 440 & 2200 & 330\\ 220 & 550 & 0\end{pmatrix}.$$

该矩阵表示了1985年各部门的总产出按直接消耗系数的比例分配给每个生产部门的消耗量。

例 设1984年的价值表及1984年、1985年直接消耗系数与上例相同，假设1985年最终产品的增长率为10%，试预测1985年的总产出和最初投入。