全国高等农业院校教材

概率基础与数理统计

西北农学院主编

农业经济管理专业用

农业出版社

主编 袁志发 顾天骥

全国高等农业院校教材

概率基础与数理统计

西北农学院主编

· · ·

责任编辑 冯鼎复 倪国培

农业出版社出版（北京朝阳区枣营路）

新华书店北京发行所发行 农业出版社印刷厂印刷

787×1092毫米 16开本 20.25印张 430千字

1988年5月第1版 1988年5月北京第1次印刷

印数 1—3,400册 定价 3.40 元

ISBN 7-109-00068-0/O·1

统一书号 4144·647

前　言

概率论与数理统计是一门研究和揭示大量随机现象统计规律性的数学科学。

由于随机现象的普遍存在，概率统计方法已被广泛应用到国民经济各部门以及自然科学、技术科学、社会科学和各种管理科学。

为适应农业现代化建设的需要，农业经济管理必须逐步运用现代数学方法。在经济数量分析和统计工作中使用概率统计方法是运用数学方法进行经济管理的基本环节。1981年全国农业经济学科研讨会在制订新的教学计划中，列入了“概率论与数理统计”课程，并建议编写相应的教材和举办全国农业院校“概率统计”师资培训班。

本教材的编写工作，一直是在农牧渔业部教育司的关怀和支持下进行的。1982年在部委托下，我们举办了“概率统计”师资培训班并编写了《概率基础与数理统计》讲义。农牧渔业部教育司（84）农（教高）字第201号文件“关于编写《家畜生态学》、《数理统计》两门教材的通知”又决定委派西北农学院组织编写这本教材。这本教材是在原讲义基础上，根据几年的教学实践并广泛征询意见后两次修改而成的。在编写过程中，我们作了如下尝试：

（1）鉴于概率统计方法实用性较强，因此较为注意从直观角度建立基本概念，不拘泥于抽象而严密的数学定义和论证，尽量用比较通俗的语言阐述清楚概念、定理、公式的客观实际意义。

（2）为便于读者掌握和运用常用的数理统计方法，在介绍这些方法时以具体例子为主，着重讲清楚解题的思路和实用方法、步骤，不作数学上的严格推导，如在第八章假设检验中，介绍了一些简捷的非参数方法的运用等。

（3）考虑到经济数量分析中经常需要应用回归模型、预测技术、动态规划、对策、决策等数学方法，在第十章回归分析中，除介绍一元、多元回归分析外，还增加了相关分析、逐步回归分析、D·W检验和时间序列分析的内容。第五章对随机过程作了初步介绍，简要论述了马尔可夫（Марков）链和平稳随机过程。

讲授全书约需70—90学时，鉴于各院校专业情况不同，在选取教材内容时留有一定余地。如学时不够，除前四章基本内容外，其它各章都可以略去一部分。十章的内部联系是：

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\quad\ \nearrow \text{五} \\
\text{一} \longrightarrow \text{二} \longrightarrow \text{三} \longrightarrow \text{四} \qquad\qquad\qquad\quad \nearrow \text{九} \\
\qquad\qquad\qquad\quad\ \searrow \text{六} \longrightarrow \text{七} \longrightarrow \text{八} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \searrow \text{十}
\end{array}
$$

教学时可以根据情况，酌行选读。

本教材的第一、二、三、四、五章由顾天骥编写，第六、七、八、九、十章由袁志发编写，郭辅民参加了第四章的部分编写工作，刘光祖参加第九章编写，并且在两次修改和图表方面作了不少工作。参加审稿的主要有四川农学院夏珍、南京农学院陶美芳和北京农学院宋启沦同志。

南京农学院、北京农学院、四川农学院和西北农学院，对本书编写给予了热情支持。在本书编写过程中我们始终得到西北农学院王广森教授的支持和帮助。编者向他们表示衷心感谢！

另外，我们参考了许多概率统计专著和教材，吸收了其中不少材料，在此谨致谢忱。

由于编者水平，书中不妥或错误一定不少，恳请读者批评指正。

编 者

1984年11月于西北农学院

目　录

第一章 随机事件及其概率

§ 1 随机事件

1—1 随机现象

自然界有很多现象，我们完全可以预言它们在一定条件下是否会出现。例如："同性电互相排斥"，"在标准大气压下，水加热到100℃时必定沸腾"等等是一定会出现的，而上述现象的反面，即"同性电互相吸引"，"在标准大气压下，水加热到100℃时不沸腾"等等是必然不会出现的。这类现象称为确定性现象。

然而自然界还有许多现象，在一定条件下，有多种可能的结果发生，事前人们不能预言将出现哪种结果，即呈现出不确定性。例如在相同条件下抛同一枚硬币，其结果可能是字面向上，也可能是花面向上；在相同条件下播种玉米种子后，每粒种子可能发芽，也可能不发芽；一分钟内，一个电话交换台是否接到呼唤以及有多少次呼唤也是事先无法断定的。人们经过长期实践和深入研究之后，发现尽管对某一次试验或观察的结果是无规律的，但大量重复试验或观察时，却呈现某种规律性，如多次重复抛一枚硬币得到花面向上大致有半数等。这类现象称为随机现象。

概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学科学。

在一定条件下必然出现的事情叫必然事件；在一定条件下必然不出现的事情叫不可能事件。在一定条件下可能出现也可能不出现的事情叫随机事件，简称事件。

我们常常通过随机试验来观察随机事件，例如：事件"出现正面"是随机试验"抛硬币"的一个可能结果；而事件"一分钟内，某电话交换台接到五次呼唤"是随机试验"观察这个交换台在一分钟内接到呼唤次数"的一个可能结果。

一般地，设 E 为一试验，如果不能事先准确地预言它的结果，而且在相同条件下可以重复进行，就称为随机试验。以 ω 表它的一个可能结果，称 ω 为它的一个基本事件，全体基本事件的集合 $\Omega=\{\omega\}$ 称为基本事件集。在具体问题中，十分重要的是：认清基本事件集是由什么构成的。下面举一些例子。

〔例 1〕 设 E——将一枚硬币连抛两次，观察出现的面；ω_1——正面，ω_2——反面。于是 Ω 由四个基本事件（四个可能结果）组成，即 $\Omega=\{(\omega_1,\ \omega_1),\ (\omega_1,\ \omega_2),(\omega_2,\omega_1),(\omega_2,\ \omega_2)\}$，其中 $(\omega_1,\ \omega_2)$ 表示第一次出现正面，第二次出现反面，余类推。

〔例 2〕 设 E——从一袋玉米种籽中抽取50粒作样本，作发芽试验，观察发芽种

子的粒数。于是$\Omega=\{\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_{50}\}$，其中$\omega_i$——有$i$ ($i=0, 1, \cdots, 50$) 粒种子发芽。有51个基本事件组成基本事件集。

〔例3〕 设E——记录某电话交换台一分钟内接到的呼唤次数，并记ω_i——接到i次呼唤 ($i=0, 1, \cdots$)，则$\Omega=\{\omega_0, \omega_1, \cdots\}$。

〔例4〕 考虑一个农村社会调查，设E——随机地从某乡农户中抽三户，并记录每户的年收入，基本事件由 (x_1, x_2, x_3) 构成，其中x_1, x_2, x_3分别是三农户的收入（货币），则$\Omega=\{(x_1, x_2, x_3): x_1>0, x_2>0, x_3>0\}$。

〔例5〕 在育种研究中，考查四个小麦新品种的单位面积产量，假定它们的生长条件大致相同，基本事件由 (y_1, y_2, y_3, y_4) 构成，其中$y_i (i=1,2,3,4)$表示第i种小麦品种的单位面积产量，则$\Omega=\{(y_1, y_2, y_3, y_4): y_1\geqslant0, y_2\geqslant0, y_3\geqslant0, y_4\geqslant0\}$。

基本事件是事件中的一种并且不可再分割了。一般事件（或称复合事件）是由若干个基本事件组合而成的，因而是Ω的子集。譬如说，在例2中，事件A——"发芽种子数不少于10"是由41个基本事件组成，即$A=\{\omega_{10}, \omega_{11}, \cdots, \omega_{50}\}$。在例4中，事件$B$——"三农户年收入总和超过3000元"，即$B=\{(x_1, x_2, x_3): x_i>0, i=1,2,3; x_1+x_2+x_3>3000\}$。在例5中，事件$C$——"$y_2, y_3, y_4$比当地新品种单位面积产量$y_1$至少多50斤"，即$C=\{(y_1, y_2, y_3, y_4): y_j\geqslant y_1+50, j=2,3,4; y_1\geqslant0\}$。由此可见，每一事件对应$\Omega$的一个子集。而且仅当事件$A$所含的一个基本事件发生时，事件$A$才发生。

1—2 事件的运算

我们仅仅一个个地来研究事件是不够的，在实际生活中，往往要求我们同时研究若干个在同样条件下的事件及它们之间的联系等。如在电话交换台的问题中，我们常要考虑"在一分钟内接到一次呼唤"，"在一分钟内接到二次呼唤"以及"在一分钟内接到不多于五次呼唤"，"在一分钟内接到多于五次呼唤"等等事件，显然，这些事件是有联系的。

下面，我们引进事件间的几种主要关系及对事件的运算。用A, B, A_i, B_i表示事件。

1. 若事件A发生必然导致事件B发生，则称事件B包含事件A，记作$A\subset B$；若$A\subset B$而且$B\subset A$，就说A与B相等，并记作$A=B$。例如，设A——"有10粒种籽发芽"，B——"有偶数粒种籽发芽"，则$A\subset B$。又如，设A——"在一分钟内接到呼唤次数不大于10"，B——"在一分钟内接到呼唤次数小于15"，则$A\subset B$。

2. "二事件A、B中至少有一个发生"也是一事件，称此事件为A与B的并(或和)，记作$A\cup B$。类似地，"事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$中至少有一个发生"称为$A_1, A_2, \cdots, A_n$的和，记作$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$或$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$。例如，在例1中，事件"有正面出现"是基本事件$(\omega_1, \omega_1)$，$(\omega_1, \omega_2)$，$(\omega_2, \omega_1)$的并。

3. “事件 A 与 B 同时发生”也是一事件，称为 A 与 B 的交，记作 $A\cap B$ 或 AB。类似地，可以定义 n 个事件的交：$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$。譬如说，在例 4 中，事件“呼唤次数不超过 6 ”与事件“呼唤次数是 6 的倍数”的交是事件“呼唤次数是 6 ”。

4. “A 发生而 B 不发生”也是一事件，称为 A 与 B 的差，记作 $A-B$。如“呼唤次数不小于 9 ”与“呼唤次数不小于10”的差是“呼唤次数为9”。

5. 不可能事件与必然事件通常也看成随机事件，分别用记号 ϕ 和 Ω 表示。若二事件满足关系。

$$AB=\phi$$

即 A 与 B 不能同时发生，就说 A 与 B 互不相容（或互斥）。如“呼唤次数大于10”与“呼唤次数为 5 ”是互不相容的。

二事件 A，B 若满足关系

$$A\cup B=\Omega,\quad AB=\phi$$

即 A，B 中必发生其一，但 A，B 不能同时发生，就说 A 与 B 互逆，或者说 A 是 B（或 B 是 A）的对立事件，记作 $A=\bar{B}$。如“呼唤次数大于10”“是呼唤次数不大于 10”的对立事件。

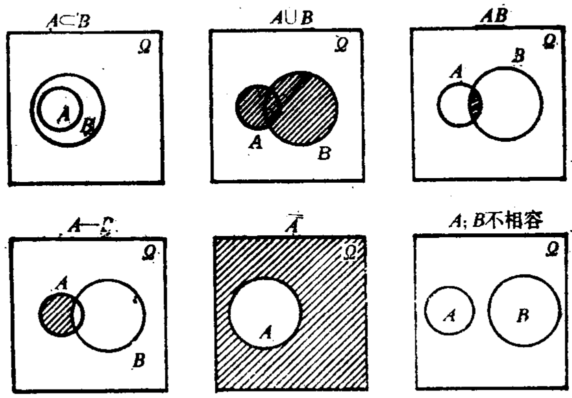
我们可以从集合论的观点来看待事件，用一个只包含一个元素 ω 的单点集 ω（为了方便起见，我们用 ω 表示单点集 $\{\omega\}$）表示随机试验的每一基本事件，用包含若干元素的集合表示一般事件（复合事件），用所有基本事件对应的全部元素组成的集合（空间）表示基本事件集（样本空间），由于任一随机试验的结果必然出现全部基本事件之一，从而，基本事件集作为一个事件就是必然事件。这样一来，集合论的知识就可以全部用来解释事件和事件的运算。

我们把它们的术语对照列表如下：

表 1—1

符　号	集　合　论	概　率　论
Ω	空　间	基本事件集（样本空间）；必然事件
ϕ	空　集	不可能事件
$\omega\in\Omega$	Ω中的元素，单点集	基本事件
$A\in\Omega$	Ω的子集A	事件A
$A\subset B$	集合A包含在集合B中	事件B包含事件A
$A=B$	集合A与B相等（等价）	事件A与B相等（等价）
$A\cup B$	集合A与B之并（或和）	事件A与B至少有一个发生（事件A与B的并）
$A\cap B$	集合A与B之交	事件A与B同时发生（事件A与B之交）
$\bar{A}$	集合A之余集	事件A的对立事件
$A-B$	集合A与B之差	事件A发生而事件B不发生（事件A与B之差）
$A\cap B=\phi$	集合A与B没有公共元素	事件A与B互不相容

如果以平面上的某一矩形表示样本空间，矩形内的每一点表示基本事件，则事件的运算可通过下图来表示。



（$A\cup B$, $A-B$. $\bar{A}$分别为图中阴影部分）

图 1—1

§ 2 随机事件的概率

日常生活中，概率的通常含义是不确定性或机会，它代表发生特定事件的机会。

对于随机事件，在一次试验中是否发生，我们虽然不能预先知道，但当我们多次做这一试验时，常常会察觉某些事件发生的可能性要大些，即这事件出现的次数要多，而另一事件发生的可能性小些。例如“掷一颗骰子”，“出现偶数点”要比“出现 2 点”的可能性大。既然各事件发生的可能性有大小之分，自然使人想到该用一个数 $P(A)$来表示事件 A 发生的可能性，较大的可能性用较大的数字来表示，较小的可能性就用较小的数字来表示。这数字 $P(A)$ 就称为随机事件 A 的概率。

2—1 古典概型

我们讨论一类最简单但却常见的随机现象。先考虑两个例子。

〔例 1〕 自标号为 1, 2, …, 50 个灯泡中任取其一，则每个灯泡被取出的可能性应该是相同的，也就是说，一切基本事件 ω_i—— “取得第 i 号灯泡”都是等可能的。在此例中，只有 50 个不同的基本事件。

〔例 2〕 掷一颗质地均匀的骰子，1, 2, 3, 4, 5, 6点出现的可能性应该是相同的，即一切基本事件 ω_i—— “出现 i 点”都是等可能的，此例中只有 6 个不同的基本事件。

一般地，如果随机试验 E 具有下列特征：

1）只有有限个不同的基本事件 ω_1, ω_2, …, ω_n;

2）一切基本事件的发生都是等可能的。

就说 E 是古典型的随机试验。

上述两个例子中的 E 都是古典型的随机试验。

对古典型的随机试验 E, $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，设事件 A由 $m(\leqslant n)$ 个不同的基本事件

组成，我们定义 A 的概率 $P(A)$ 为

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{1—2—1}$$

这种定义称为概率的古典定义。

显然不可能事件 ϕ 的概率为

$$P(\phi)=0$$

〔例 3〕　在例 1 中求事件 $A=\{$取得偶数号灯泡$\}$ 的概率。

解　$A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6,\cdots\omega_{50}\}$

$$P(A)=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}$$

〔例 4〕　盒中装有五个白球，三个黑球，从中任取一个，求取到白球的概率。

解　设想将 8 个球编上号，其中白球为 ①，②，③，④，⑤；黑球为 ⑥，⑦，⑧，$\Omega=\{$①，②，③，④，⑤，⑥，⑦，⑧$\}$，$A=\{$①，②，③，④，⑤$\}$

$$P(A)=\frac{5}{8}$$

古典型概率具有下列性质：

(i)　对任意事件 A，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(ii)　$P(\Omega)=1$；

(iii)　设 A、B 互不相容，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B) \tag{1—2—2}$$

证　由(1—2—1)及 $P(\phi)=0$ 可见(i)是显然的。由于 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，由(1—2—1)

$$P(\Omega)=\frac{n}{n}=1$$

下证(iii)。设 $A=\{\omega_{k1},\omega_{k2},\cdots,\omega_{kr}\}$，$B=\{\omega_{l_1},\omega_{l_2},\cdots,\omega_{ls}\}$，因此

$$P(A)=\frac{r}{n},\qquad P(B)=\frac{s}{n}$$

由于 A 与 B 没有公共基本事件，故

$$A\cup B=\{\omega_{k1},\omega_{k2},\cdots,\omega_{kr};\ \omega_{l_1},\omega_{l_2},\cdots,\omega_{ls}\}$$

从而

$$P(A\cup B)=\frac{r+s}{n}=\frac{r}{n}=\frac{s}{n}=P(A)+P(B)$$

公式(1—2—2)不难推广到 m 个事件的情形。设 A_1，A_2，$\cdots$，A_m 互不相容，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_m) \tag{1—2—3}$$

2—2　几何概率

概率的古典定义是在一种特殊情形下给出的，这就是假定了试验 E 的基本事件只有有限个。对于试验 E 的基本事件为无穷多个的情形，概率的古典定义显然是不适用的。为了克服这个局限性，我们仍以等可能性为基础把这个定义作必要推广，使推广后的定义适用于试验 E 的基本事件是无穷多个的情形。

例如在平面上有某一区域 G，而区域 g 是它的某一部分，在区域 G 内任意投掷一点 M，求这点 M 落在区域 g 内的概率。这里，点 M 落在区域 G 内任一点处都是等可能的，并且落在区域 G 的任何部分内的概率只与这部分的面积成比例而与其位置和形状无关。于是，在区域 G 内任意投掷一点 M 而落在区域 g 内的概率可以定义为

$$P(A)=\frac{g\text{ 的面积}}{G\text{ 的面积}}$$

其中事件 A——“随机点 M 落在 g 内”。

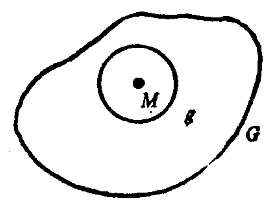


图 1—2

一般地，设试验 E 的基本事件有无穷多个，但是可用某种数量特征（如长度、面积、体积等）来表示其总和，设为 S；并且其中的一部分，即有利于事件 A 的基本事件数，也可用同样的数量特征来表示，设为 s，则随机事件 A 的概率定义如下：

$$P(A)=\frac{s}{S}\qquad(1—2—4)$$

〔例 5〕　（约会问题）二人约定于 0 到 T 时间内在某地点会面，先到者等 t($t\leqslant T$) 时后离去，试求二人能会面的概率。

解　以 x，y 分别表二人到达时刻，

$$0\leqslant x\leqslant T,\ 0\leqslant y\leqslant T$$

这样的 $(x,\ y)$ 构成边长为 T 的正方形，其面积 $S=T^2$。而二人能会面的充要条件是 $|x-y|\leqslant t$ 这样，试验 E 的所有基本事件可以用边长为 T 的正方形内的点来表示，而有利于事件 A——“二人相会”的基本事件可用这个正方形内介于二直线 $x-y=\pm t$ 之间的区域（图1—3）的点来表示。因此，所求的概率

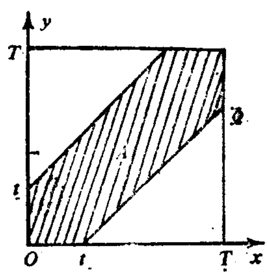


图 1—3

$$P(A)=\frac{T^2-(T-t)^2}{T^2}=1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^2$$

类似古典概型，几何概率亦具有下列性质：

(i)　对任一事件 A，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(ii)　$P(\Omega)=1$；

(iii)　设 A_1，A_2，… 互不相容，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots\cdots \tag{1—2—5}$$

2—3　频率　概率的统计定义

概率的古典定义是以等可能性为基本假设的，故称为先验概率。当由最简单的古典概型的例子(抛硬币、掷骰子等)转入复杂问题时，特别是考虑现代自然科学、社会科学等方面的问题时，古典概率就遇到了不可克服的困难，例如，陕西关中地区出现春旱与不出现春旱的概率，就不是等可能的。因此，又有所谓的统计概率。

设 E 为任一随机试验，A 为其中任一随机事件。在条件不变的情况下，把 E 独立地重复做 n 次，以 r 表示事件 A 在这 n 次试验中发生的次数，则比值 r/n 叫做随机事件 A 在这 n 次试验中出现的频率，记作

$$W(A)=r/n \tag{1—2—6}$$

显然，任何随机事件 A 在 n 次试验中发生的频率总是介于 0 与 1 之间的一个数，即

$$0\leqslant W(A)\leqslant 1$$

若 A 是必然事件，则 $r=n$，故必然事件的频率等于 1。若 A 是不可能事件，则 $r=0$，故不可能事件的频率等于 0。

经验表明，当试验 E 重复很多次时，随机事件 A 出现的频率具有一定的稳定性。就是说，当试验次数充分大时，随机事件 A 的频率常在某个确定的数 p 附近摆动。

历史上，有些人作过成千上万次投掷硬币的试验，下表列出他们的试验记录

表 1—2　掷一枚硬币出现“正面”的试验结果

实　验　者	投掷次数 (n)	出现“正面”的频数 (r)	频率 $W=r/n$
Demorgan (德摩根)	2048	1061	0.518
Buffon (蒲丰)	4040	2048	0.5069
Pearson (皮尔逊)	12000	6019	0.5005
Pearson (皮尔逊)	24000	12012	0.5005

容易看出，投掷次数越多，频率越接近于 0.5。

从一大批玉米种子中抽取 10 批种子做发芽试验，其结果记录如表 1—3：

表 1—3　种子发芽试验的频率

种子粒数	2	5	10	70	130	310	700	1500	2000	3000
发芽粒数	2	4	9	60	116	282	639	1339	1806	2715
发芽率	1	0.8	0.9	0.857	0.892	0.910	0.913	0.893	0.903	0.905

发芽率在 0.9 附近摆动。

频率具有稳定性这一事实，说明了刻划事件 A 发生可能性大小的数量指标——概率的客观存在性。

显而易见，事件 A 出现的可能性愈大，频率也愈大；反之，频率愈大，A 出现的可能性也愈大。因此，频率与概率之间应有紧密的联系，的确，在第四章将证明，在相当广泛的条件下，当 $n\to\infty$ 时，在一定意义下，频率 $W(A)$ 趋于 A 的概率 $P(A)$。

于是，在一般情形下，我们引进下面的概率的统计定义：

若随着试验次数 n 的增大，事件 A 出现的频率 r/n 在区间〔0，1〕上的某个数字 p 附近摆动，那么事件 A 的概率定义为：

$$P(A)=p$$

因此，当 n 充分大时，可以取频率作为概率的近似值，在许多实际问题中，当概率不易求出时，往往就是这样做的。统计概率是在试验或观测之后才能得到，故又称经验概率。

由概率的统计定义，也可以推得概率的下列性质：

(i) 对任一事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(ii) $P(\Omega)=1$， $P(\phi)=0$；

(iii) 设 A_1，A_2，…，A_m 两两互斥，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_m) \qquad (1\text{—}2\text{—}7)$$

证 由于频率 $W(A)=r/n$ 总是在区间〔0，1〕上，故相应的 p 也在〔0，1〕上；必然事件 Ω 的频率为 1，不可能事件 ϕ 的频率为 0，故相应的 $P(\Omega)=1$，$P(\phi)=0$；由于 A_1，A_2，…，A_n 两两互斥，事件 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m$ 和 A_1，A_2，…，A_m 的频率 $\frac{r}{n}$ 及 $\frac{r_1}{n}$，$\frac{r_2}{n}$，…，$\frac{r_m}{n}$ 应满足关系：

$$\frac{r}{n}=\frac{r_1}{n}+\frac{r_2}{n}+\cdots+\frac{r_m}{n}$$

故相应的概率有（1—2—7）。

2—4 概率的数学定义

上述概率的古典定义及其推广的几何定义都带有局限性，因为它们都是以等可能性为基础的，而实际问题中所遇到的更多情况并非如此。概率的统计定义虽然一般而且直观，然而，在进行理论研究时，我们不可能对每一个事件，都做大量的试验，从中得到频率的稳定值；再者，这个定义的依据主要是试验次数很大时，频率所呈现的稳定性这一事实．究竟次数应大到何等程度，摆动应如何理解，都没有确切的说明。于是，建立一个一般的概型，以便更广泛更确切地描述随机现象，从而更好地满足自然科学提出来的要求就显得十分必要了。

从前面的讨论可以看到，随机事件的概率从各自的定义出发都有共同的属性(i)、(ii)、(iii)。这是建立概率数学定义的基础。

〔定义〕 设 E 是一随机试验，对于 E 的每一事件 A（基本事件集的子集）赋予一个非负的实数 $P(A)$，它具有性质：

(i) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$; (1—2—8)

(ii) $P(\Omega) = 1$; (1—2—9)

(iii) 若 $A_i \cap A_j = \phi$ $(i \neq j)$ 则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots \tag{1—2—10}$$

称 $P(A)$ 为事件 A 的概率。

这样，无论古典概率，几何概率或统计概率，它们都具有一般定义中概率的三条性质，因此，它们都是一般定义范围内的特殊情形。从而，由一般定义推出的任何规律对它们都是适用的。

2—5 一些重要推论

由概率的基本属性可以导出下面的诸推论。这些推论对计算事件的概率是很有用的。

〔推论 1〕 不可能事件的概率为 0，即

$$P(\phi) = 0$$

证 因 $\phi = \phi \cup \phi \cup \cdots \cup \phi \cup \cdots$，由 (1—2—10) 得

$$P(\phi) = P(\phi) + P(\phi) + \cdots$$

于是 $P(\phi) = 0$。

〔推论 2〕 若 $A_i \cap A_j = \phi (i \neq j)$，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) \tag{1—2—11}$$

证 因 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \phi \cup \phi \cup \cdots$，故

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n)$$

〔推论 3〕 对任何事件 A 有

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \tag{1—2—12}$$

证 因 $A \cup \bar{A} = \Omega$，且 $A \cap \bar{A} = \phi$，故

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

〔推论 4〕 若 $A \supset B$，则

$$P(A - B) = P(A) - P(B) \tag{1—2—13}$$

证 当 $B \subset A$ 时 $A = B \cup (A - B)$，从而

$$P(A) = P(B) + P(A - B)$$

〔推论 5〕 对任意二事件 A、B，有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{1—2—14}$$

证 由 $A\cup B=A\cup(B-AB)$，且 $AB\subset B$，故

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)$$
$$=P(A)+P(B)-P(AB)$$

利用数学归纳法可以证明，对于有限多个随机事件，有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{j=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)$$
$$+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n) \qquad (1\text{—}2\text{—}15)$$

〔例 1〕 设有一批产品共 100 件，其中有 5 件次品，现从其中任抽 50 件，问：

i ）无次品的概率是多少？

ii）恰有两件次品的概率是多少？

解 i）首先从 100 件产品中任取 50 件，共 C_{100}^{50} 种不同的取法，每一种取法就是一个基本事件，显然，这些基本事件构成等概基本事件集，事件 A＝“任取 50 件其中无次品”，要所取的 50 件无次品，必须是从那 95 件正品中取来的，可见，这种无次品的取法共有 C_{95}^{50} 种，即事件 A 包含 C_{95}^{50} 个基本事件。由（1—2—1）

$$P(A)=C_{95}^{50}\Big/C_{100}^{50}=\frac{95!/50!(95-50)!}{100!/50!(100-50)!}=\frac{50\cdot49\cdot48\cdot47\cdot46}{100\cdot99\cdot98\cdot97\cdot96}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{47}{99}\cdot\frac{46}{97}=\frac{1081}{38412}=2.8\%$$

ii）等概基本事件集同 i)，若 B＝“恰有两件次品”，取出的 50 件中，恰有两件次品，即有 48 件正品，两件次品。这 48 件正品必从 95 件正品中取出，共有 C_{95}^{48} 种取法，而两件次品必从 5 件次品中取出，共有 C_5^2 种取法，因此，事件 B 包含 $C_{95}^{48}\cdot C_5^2$ 个基本事件，于是由（1—2—1）

$$P(B)=C_{95}^{48}\cdot C_5^2/C_{100}^{50}$$

$$=\frac{95!}{48!\,47!}\cdot\frac{5!}{2!\,3!}\Big/\frac{100!}{50!\,50!}=0.32$$

一般地，若 N 件产品中有 M 件次品，从中任取 n 件，恰有 m 件次品的概率为

$$C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}/C_N^n$$

〔例 2〕 电话号码由五个数字组成，每个数字可以是 0，1，2，…，9 中的任一个数，问：

① 若某户的电话号码是 51710，当不知道这个电话号码时，一次拨号就能拨对该号码的概率是多少？

② 由 5 个不同的数字组成的电话号码的概率是多少？

解 ①全部电话号码有 10^5 个（可重复排列），当不知道电话号码时，拨 10^5 个电话中

任一个是等概的，令 A=“一次拨号就能拨对该用户号码”，则基本事件集包含 10^5 个基本事件，即 $n=10^5$，而事件 A 只包含一个基本事件，即 $m=1$，由（1—2—1）

$$P(A)=\frac{1}{10^5}=0.00001$$

可见，当不知道该用户电话号码时，一次拨号就能拨对该电话号码的可能性是很小的。

②基本事件集同①，令 B=“由不同的五个数字组成电话号码”，则事件 B 包含 A_{10}^5 个（选排列）基本事件，由（1—2—1）

$$P(B)=\frac{A_{10}^5}{10^5}=\frac{10!}{5!\cdot 10^5}\approx 0.3024$$

〔例 3〕 一只袋内装白球 45 个，黑球 5 个，从口袋中任取 3 个球，求其中有黑球的概率。

解 I 令 A=“任取三球，其中有黑球”。

A_i=“任取三球，其中有 i 个黑球”（$i=1, 2, 3$）。显然，$A=A_1\cup A_2\cup A_3$，且 $A_i\cap A_j=\phi(i\neq j)$，由(1—2—11)

$$P(A)=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3) \text{ 而，}$$

$P(A_1)=C_5^1\cdot C_{45}^2/C_{50}^3=0.2525$ $P(A_2)=C_5^2\cdot C_{45}^1/C_{50}^3=0.023$

$P(A_3)=C_5^3/C_{50}^3=0.0005$。从而

$$P(A)=0.2525+0.0230+0.0005=0.2760$$

解 II 事件 A 的对立事件 $\bar{A}$=“任取三球全是白球”，显然，

$$P(\bar{A})=C_{45}^3/C_{50}^3=0.7240$$

于是，由（1—2—12）

$$P(A)=1-P(\bar{A})=0.2760$$

§ 3 条件概率 乘法公式 独立性

3—1 条件概率

首先研究两个例子

〔例 1〕 设有某产品一盒共十只，已知其中有三只次品。接连从中取二次，每次任取一只，作不放回抽样，问第一次取到次品后第二次取到次品的概率是多少？

解 令事件 A=“第一次取到次品”，B=“第二次取到次品”，第一次取出一只后，盒中还剩 9 只，其中有二只是次品，这时 B 发生的概率为 2/9，因为这时是在 A 已发生的条件下求 B 发生的概率，故称它为 A 发生条件下 B 发生的条件概率，记为 $P(B/A)$，即有 $P(B/A)=2/9$。

在这个问题中，第一次抽样的基本事件集 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{10}\}$，其中 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 为