目　录

第一章　绪论……………………………………………………（ 1 ）

§1-1　工程系统的表示法 ………………………（ 1 ）

§1-2　工程系统的数学模型 ……………………（ 3 ）

§1-3　控制工程的方块图及其逆向转换 ………（ 6 ）

§1-4　键图的发展及其特点 ……………………（ 9 ）

第二章　键图的基本原理………………………………………（ 12 ）

§2-1　工程通口 …………………………………（ 12 ）

§2-2　子系统用文字表示的键图 ………………（ 13 ）

§2-3　键图的基本元件 …………………………（ 18 ）

§2-4　键图的增注 ………………………………（ 41 ）

§2-5　键图的变换和简化 ………………………（ 55 ）

§2-6　关于场的简介 ……………………………（ 58 ）

第三章　键图理论在液压设备中的应用………………………（ 63 ）

§3-1　液压领域建立键图的规则 ………………（ 63 ）

§3-2　某些基本液压元件的键图 ………………（ 65 ）

§3-3　某些典型液压传动系统的键图 …………（ 90 ）

§3-4　液压控制系统中液压动力机构的键图 ……（ 95 ）

第四章　键图理论在机械工程中的应用………………………（ 102 ）

§4-1　简单的机械装置键图 ……………………（ 102 ）

§4-2　复杂的机械系统键图 ……………………（ 108 ）

§4-3　采用运动参考系的机械系统键图 ………（ 112 ）

§4-4　机械系统绘制键图规则的应用实例 ……（ 117 ）

§4-5　损失和效率的键图表示 …………………（ 127 ）

§4-6　联轴节和传动机构的键图 ………………（ 130 ）

第五章　键图理论在电气工程中的应用………………………（ 134 ）

§5-1　电气工程中建立键图的规则 ……………（ 134 ）

§5-2 电动机的键图 …………………………………(139)
§5-3 电路的键图 …………………………………(142)
§5-4 电网络的键图 …………………………………(147)
§5-5 机电信号转换器 …………………………………(151)
第六章 利用键图对系统动特性的研究…………………(159)
§6-1 动力学系统的几种数学表达式 ……………(159)
§6-2 键图的增注 …………………………………(162)
§6-3 按增注的键图列写状态方程的情况之一
……………………………………………………(170)
§6-4 按增注的键图列写状态方程的情况之二
……………………………………………………(178)
§6-5 按增注的键图列写状态方程的情况之三
……………………………………………………(182)
§6-6 输出变量方程 …………………………………(187)
§6-7 线性系统分析 …………………………………(188)
第七章 应用键图分析系统动特性实例…………………(215)
§7-1 应用键图分析液压元件的动特性 …………(215)
§7-2 应用键图分析液压系统的动特性 …………(227)
主要参考文献……………………………………………(232)

第一章 绪 论

§1-1 工程系统的表示法

一个部件、一台机器或一个工程系统可用各种不同的方法加以表示。键图就是表示方法之一，这将在第二章中详细叙述，这里只简要介绍其他几种工程表示法。

1. 文字表示

这种表示法是以文字说明来表示一个部件或整个工程系统，如"力反馈两级电液伺服阀"，"电液位置伺服系统"等。采用这种表示方法时，要求使用者熟悉各种相应的技术术语，否则就不可能知道它所表示的究竟是什么内容。

2. 草图或结构简图

这种表示法实际上是由真实的结构大大简化而得，它基本上保持了实物的结构动作原理及其主要特征，而忽略了许多次要方面。图1-1所示的油缸就是这种简图的实例。显然，它便于绘制、修改，因而很适宜进行初步设计或教学讲解之用。

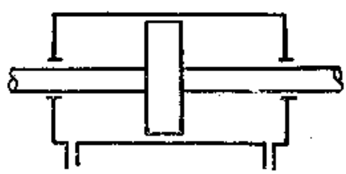

图1-1 油缸简图

3. 回路或线路

很多工程系统通常可认为是由一些连接在一起的相互作用的单个元件组成。如电气系统就可认为是由一些电阻、电容、电感及电压发生器等元件用导线连接而成，这就是电子线路，如图1-2(a)所示。液压系统则可认为是由液压泵、液压马达及一些控制阀件由油管连接而成，这就是液压回路，如图1-3(a)所示。

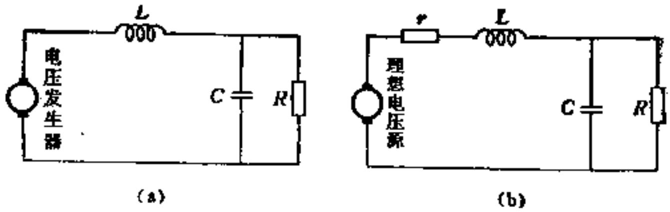

图 1-2　电子线路(a)及其等效回路(b)

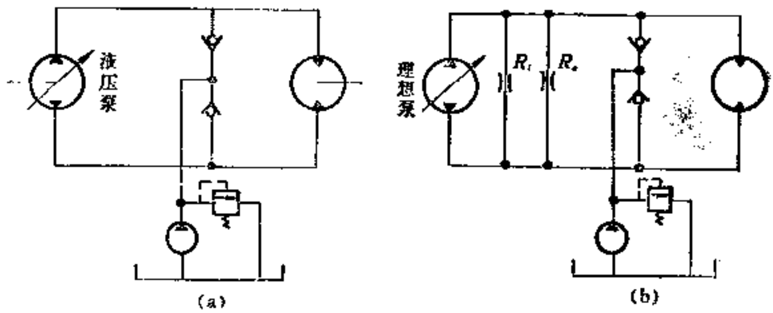

图 1-3　液压回路(a)及其等效回路(b)

由图可见，电子线路或液压回路中的符号通常是实际元件经过简化后的仿效图形，而元件之间的连接件——电线或管路，则用简单的线段表示。这些元件通常都有惯用的表示符号，或者国际上通用的符号，但在其他一些工程学科中通常没有国际上通用的符号，如轴及扭力弹簧等。

由于实际回路中的某些元件常常具有多种作用，因此，如果希望回路中的每一元件只具有一种作用，像方块图中每一元件只需要一个函数就可规定其作用的那样，那么，就需要附加虚构的元件来表示其他的作用，这时实际回路就被转化为等效回路。例如，图 1-2(a) 中电子线路的实际元件——电压发生器，就可转化为带有串联电阻(即内阻 r)的理想电压源，如图 1-2(b)所示。又如图 1-3(a)中液压回路的实际元件——液压泵，因为它除了具有压送油液的作用以外，还不可避免地具有泄漏及机械损失，因此，它可被等效为带有泄漏损失 R_l 及机械损失 R_f 的理想液压泵，如图

1-3(b)所示。

等效回路得到了广泛的应用，特别在电子学领域中更是如此。但是，这种表示法也存在下述一些缺点：

(1) 由于增加了虚构的元件，并无实物相当，因而失去了与实际设计图的相似性，装配工人不可能根据等效回路图建造一个实际的装置；

(2) 不管是实际的元件，还是理想化的元件，都需要用单一的符号分开表示，而这在除去电子学以外的工程领域中，通常难以做到；

(3) 对于每一工程领域(如电、液、机械等)都需学习许多新符号，特别在机械工程领域中应用着许多不同的符号。

4. 图解表示

它是一种高度抽象化了的表示法，比草图或结构简图要简单得多，因而画起来也省事、省时得多。方块图、键图及计算机程序流程图都属这种表示法。显然，符号越简化，越抽象，就越难记住，因此，就存在一个最佳的简化界限。

图解表示可以是同步的，即其中所有部分同时工作，也可以是连续的，即其中各部分依次工作。方块图及键图属同步图解，而计算机程序流程图则属连续图解。同步图解又可分为有因果关系及无因果关系的两种，前者的各元件之间具有一个确定的作用方向，即有确定的原因和结果的关系，而在后者的元件之间则不存在这样的特性。方块图及键图都是有因果关系的同步图解。

§1-2 工程系统的数学模型

1. 系统的实物模型

在设计出一个新的工程系统以后，常需按一定的缩小比例制造出其实物模型，据此进行必要的特性试验，以证明设计的合理性后才能正式制造，这对大型的或昂贵的工程结构更是如此。例如，

飞机的风洞模型，造波池中用的船体模型，土木工程中的结构模型等。必须指出，这些实物模型与真实实物之间除了在尺寸上按一定比例缩小以外，在很多方面还是不尽相同的。例如，造波池中用的船体模型是为了研究船体的流体动力问题，因而船舶中与流体动力特性无关的一些结构，如舱位布置、内部装修等就不必如实反映。因此，这些实物模型的特征性能只能反映真实系统的某一些特性，而不是全部。

2．系统的数学模型

什么是数学模型以及建立数学模型的重要性已越来越为人们所认识和重视。严格地说，数学模型是根据已为前人验证的定律，如电学中的基尔霍夫定律，力学中的牛顿定律，流体力学中的流体连续性方程等，针对某一部件或工程系统进行分析后所建立起来的数学方程式，这些方程式应能定量地描述该系统的动作过程，不过，式中的一些系数常需进行辅助实验加以确定。

为了确定某一系统的数学模型，通常必须先把系统分解成能够模型化或者能进行实验研究的一些较小部分，然后再把这些部分组合成系统模型。一个系统往往能方便地按几个层次分解开来，即一个系统可分解成若干子系统，而一个子系统又可分成许多元件，元件可以认为是系统的最基本组成部分。当然，元件、子系统和系统的层次决不是绝对的，因为一个元件有时也能被详细地模化，就像一个复杂的子系统那样。在一般情况下，一个元件是作为一个整体来制定模型的，不再进行分解。因此，我们必须知道一个元件怎样同其他元件相互作用，而且必须知道该元件的特性描述，至于元件内部结构及组成则不必了解，也就是说可把元件当做“黑箱”来处理。

在图 1-4 所示的振动试验系统中，当信号发生器发出一随机噪声信号，就可期望激振器台面加速度复现电噪声信号的波形。显然，这一系统是由信号发生器、控制器、电放大器、电液伺服阀、液压振动台及被试构件等子系统组成，而每一子系统又各由一些元

件组成。因此，欲建立这一系统的数学模型时，必须先求出各元件

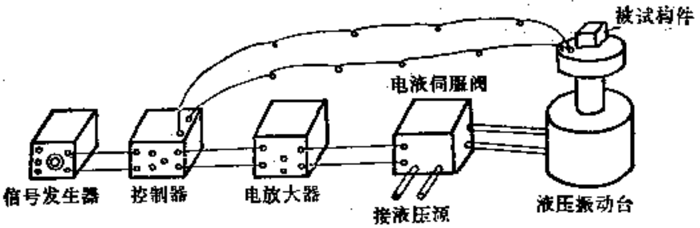

图 1-4 振动试验系统

的数学模型，从而组成各子系统的数学模型，最后再组成整个系统的数学模型。不过，如果用不着了解它们的内部结构就能规定它们同系统其余部分的相互作用的话，有时也可以把其中的某些子系统当做元件来处理。例如，电放大器显然是由许多元件组成，如电阻器、电容器、晶体管等等，但若正确选用放大器不致过载时，也可将此放大器作为一个元件处理。又如图中的另一子系统——电液伺服阀可能是由力矩马达、喷嘴挡板及圆柱滑阀、反馈杆等元件组成，对于这一子系统，通常需要在分析其组成元件的结构及动作原理的基础上，利用熟知的一些物理定律，求出伺服阀的数学模型，再与图中其他子系统的数学模型一起，构成整个系统的数学模型。经过详细分析求得的子系统数学模型不仅可用来分析整个系统的动特性，而且可用来分析子系统本身的动特性，从而揭示设计中的缺点，并进一步改进子系统的设计。当然，在个别情况下，例如当系统的频宽比伺服阀的频宽少很多倍时，也可将伺服阀这一子系统作为放大元件来处理。

由于实际的系统通常是比较复杂的，因此在根据理论定律建立数学模型时，必须进行合理的简化，否则即使求得数学模型，也会因为过份复杂而无实际应用价值。至于如何简化才算合适，这须视具体情况而定。例如，欲建立某一溢流阀的数学模型时，则需看建立的目的是研究溢流阀本身，还是研究溢流阀只是作为其中一个元件的液压系统。显然，根据前一目的所建立的数学模型当

然要比后者精确、复杂得多。此外，全部根据理论定律建立数学模型有时是不可能的，这就需要理论与实验配合起来，甚至需要全部利用实验的方法建模。

欲建立一个好的数学模型，首先必须对系统动作过程的实质有透彻的了解，抓住主要问题，忽略次要因素，再根据熟知的理论定律，初步建立数学模型，然后利用计算机算出系统的动态过程，最后用实验结果加以验证，并进一步修改完善。

所求模型的形式往往被描述成“状态确定系统”。在数学表示法中，这类系统常采用以一组状态变量表示的常微分方程和一组代数方程来描述，前者就是状态方程，后者就是输出方程，它将系统的输出变量与状态变量联系起来。所谓“状态确定系统”，其含义是，只要在某一初始时间的各状态变量已知，来自环境的各输入量的未来时间函数已知，就可完全预测与这一系统有关的全部变量的未来值。显然，工程系统的数学模型理应具有这种性质，因为它说明未来的事件不影响系统的现在状态，而这一含义与时间向一个方向流逝——从过去到将来的前提是相当的。状态确定系统的模型在近百年的科技实践中已证明是有效的。对一般工程中遇到的宏观系统而言，这种模型几乎是普遍适用的，而且这类模型还在不断发展用于社会系统和经济系统中。

在求得较为准确的数学模型后，不仅能比较正确地、定量地描述系统的动作过程，而且能预测一些参数变化对系统性能的影响，为新的改进设计提供依据。此外，一个好的数学模型还可用在大系统中以模拟实际的部件。

§1-3 控制工程的方块图及其逆向转换

在“控制理论基础”课程中，已比较详细地介绍了有关方块图的概念、简化及用它求取工程系统传递函数的方法。当研究某一工程系统的动态性能时，往往先要列写一些基本方程，据此画方块

图，再利用梅逊公式求取传递函数，从而分析系统的动态性能。

在画方块图时，假定每一方块在输出变量和输入变量之间仅仅包含有函数关系。这种关系可以是线性的或非线性的，瞬时作用的或随时间变化的，而且每一方块仅有一根输出连接线，但却可有几根输入连接线。具有随时间变化的方块的输出信号常常是输入信号的导数或时间的积分，这在方块中就用 s 或用 $1/s$ 来表示。在线性方块中，输出信号与输入信号成正比，而其比值与信号大小无关，但在随时间变化的方块中，其比值则是信号频率的函数。

应该注意的是两个方块间的连接线仅包含有一个沿着箭头方向运动的变量，可是实际上的连接总应包含有两个变量。例如，在电路中是电流和电压，在液压系统中则是油液压力和流量，这表明两者之间的连接应是功率传递的关系。此外，方块图中的每一方块对前一方块不存在返回效应，即信号是单向传递，而实际上由于连接线包含两个变量，所以在一个方向上传递一个变量的信号，在相反方向则应传递另一个变量的信号，也就是说，事实上是存在返回效应的。例如在电路中，一个方向传递电压信号，在同一连接线的相反方向则返回电流信号。

图 1-5 表示简化的方块图及其逆向转换。

由图 1-5(a)可见，其中包括输入变量 y_0，误差变量 y_1，输出变量 y_2 和反馈变量 y_3。这些变量之间存在有下述关系：

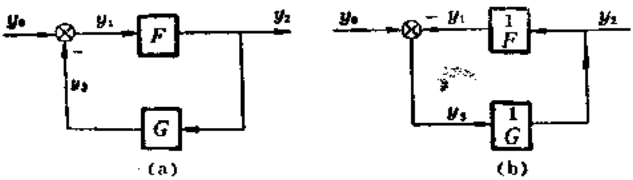

图 1-5 简化的方块图(a)及其转换(b)

$$y_1 = y_0 - y_3,\quad y_2 = Fy_1,$$

及

$$y_3 = Gy_2。$$

两个方块增益的乘积 FG 叫做开环回路增益，而其闭环传递

函数为

$$\frac{y_2}{y_0}=\frac{F}{1+FG}。$$

图 1-5(b) 即为(a)图的逆向转换，其中信号反向通过方块，而方块增益变为倒数，一些变量的关系为

$$y_3=y_0-y_1,\quad y_2=\frac{1}{G}y_3,$$

及

$$y_1=\frac{1}{F}y_2.$$

开环回路增益变为 $1/FG$，但闭环传递函数不变，仍为

$$\frac{y_2}{y_0}=\frac{1/G}{1+1/FG}=\frac{F}{1+FG}.$$

从图 1-5(a) 变到图 1-5(b) 就表示方块图的逆向转换。方块增益都变成原来的倒数。若一种回路的增益大于 1，则它在逆向方块图中就小于 1。在具有几个闭环回路的复杂的方块图中，可把每个回路逆向。

方块图的逆向对许多控制工程师来说可能是陌生的，因为实际的控制部件通常是不可逆的，但由于方块表示函数而不是表示部件，所以逆向还是可理解的。

当信号用箭头传递时，可确定原因和结果。例如在图 1-5(a) 中，y_1 是 y_2 的因，y_3 是 y_2 的果。因此，方块图属于因果关系的图解。在图 1-5(b) 中，y_3 是 y_2 的因，y_1 是 y_2 的果。因此，这种逆向方块图也是有因果关系的图解，不过它的因果关系与前相反。

因果的确定就构成了方块图的因果关系。上面所述的逆向转换实际上是由一个因果关系转换到另一个因果关系，这一关系的转换大大地改变了方块图的外貌，特别是在复杂的系统情况下。

在画一个方块图以前，必须首先选择好因果关系。因果关系不是自然地给定的，而是人们为了分析方便人为地选定的，因此，同一工程系统可有不同形式的方块图及不同的因果关系。

尽管方块图在控制工程中应用相当广泛，但它具有下述固有

的缺点：

1) 部件间的反馈作用总是必须用一根单独的反馈 连 接线指出，但在真实的部件之间仅有一个连接，如电线、管路等；

2) 对于一个给定的工程系统，由于可人为地选定不同的因果关系，因而画出的方块图可能有根本不同的外观形状。

本书所述将详细介绍的键图可以克服方块图的上述缺点。

§1-4 键图的发展及其特点

1. 键图的发展简史

键图基本理论是美国麻省理工学院的 H·Paynter 教授 在 50 年代末提出的，他是在运用方块图和信号流图深入研究伺服控制和仿真问题时，感到这些图形表示存在一些不足之处，因而提出了一种崭新的键图表示法，用以研究各个工程领域的系统动态性能。后来由加利福尼亚大学的 D.Karnopp 教 授和密夕根大学的 R.Rosenberg 教授以及瑞士的 J.Thoma 教授等人多方 面 应 用，并进一步加以发展。到了 70 年代中期已逐 步 趋于完善。现已在美、荷、澳、西德、加拿大等国一些大学中用于教学和科研。我国一些大学也早在研究应用中，并作为研究生及高年级学生选修课程的内容。

2. 键图表示法的特点

键图可以说是方块图的一种自然发展，它不仅能表示系统中元件的信号流向，而且能表明功率流向，以及控制信号的因果关系。此外，键图表示法中以一定的规则确定因果关系，因而画出的键图外观形状对同一工程系统基本相同。键图元件之间的连接线包含有两个变量，故能与真实部件类似地表明返回效应。显然，键图表示法要比方块图或信号流图前进了一步。

大家知道，工程系统是极其复杂多样的，一个系统不仅涉及一种能量范围，如纯电力、纯机械系统，而往往是多种能量范畴的耦

合，如电液伺服系统就包含有电、机及液压等范畴的能量。现有的系统分析方法大都仅适用于一种能量范畴或特定类型的系统，要根据各种能量之间的转换关系加以耦合，而键图则提供了一种能统一处理多种能量范畴的工程系统的动态分析法。它将多种物理参量统一地归纳成 4 种状态变量，即势、流、位移和动量，而且，它只需少量几个元件标记用键和一些符号把它们联系起来，就可构成电、磁、机械、液压、气动、热力等工程系统的动态模型。

键图表示法从绘制键图开始，直至列出状态方程为止，都可按事先规定好的步骤有条不紊地进行，而且由于图形及数学描述的格式都是统一的，因而对问题的解决相当有效。如果再配以专用的计算机程序，只需以画出的完整的键图模型作为计算机的输入，就可以得到在给定激励下系统动态响应的仿真结果。

最后，还须指出，为了简化忽略了一些因素所建立起来的键图模型，如果仿真结果与实际相差较大，可以很方便地改变键图及其数学描述，而这在其他系统分析方法中将增加很大困难。

当然，键图并非万能，也决非完美无缺，正因为如此，目前有些学者在应用它解决实际问题的过程中，仍在进一步发展和完善这一理论，并推广到其他新的领域。

小　结

本章首先介绍了工程系统的几种表示法，即文字表示，草图或结构简图表示，回路或线路表示，图解表示。指出键图是属于具有因果关系的同步图解表示。接着分析了一个工程系统为什么要建立实物模型与数学模型。指出了一个大型系统在建立数学模型时，必须进行合理的分解及恰当的简化，而这一切都需建立在对系统动作过程的实质有透彻了解的基础上。此外，还说明了状态确定系统的含义，以及工程系统为什么可以表示成状态确定系统的形式。

本章第三节介绍了控制工程中常用的一种图解表示——方块图及其逆向转换。关于方块图的绘制及据以求传递函数都是大家

熟知的，至于方块图的逆向转换则较为陌生，这是为了简化方块图的需要，也用以说明方块图可有不同的因果关系，因而可有不同的外观形状。

最后，介绍了键图的发展简史及这一表示法的特点。

复习思考题

1．试简要说明工程系统的几种表示法及其优缺点。

2．试说明建立模型的重要性，以及在建立数学模型时要注意哪些问题？

3．什么是状态确定系统？工程系统都可表示成状态确定系统的形式吗？为什么？

4．试分析键图表示法的特点。

第二章　键图的基本原理

§2-1　工程通口

在介绍有关键图的基本原理以前，首先介绍一下工程通口的概念，所以要这样做是因为键及键图的概念是在工程通口的基础上建立起来的。

在第一章中曾经说过，要建立一个大工程系统的数学模型往往需要将这一系统分解成若干子系统，有时还需将子系统再分解成若干元件，然后根据元件或子系统的数学模型综合成整个系统的数学模型。显然，系统中的某一子系统必然要通过传递功率的形式与系统中另外的子系统相互联系在一起，这一联系的通道就叫做通口。由于我们所研究的系统限于工程系统，如机床、飞机等,因而通口前冠以“工程”两字。

图 2-1 中表示了几种子系统，其上都标注了与它们有关的一些物理变量,如电压 e,电流 i,转矩 τ,角速度 ω，油液压力 p 和体积流量 Q。仔细观察一下就可发现，这些变量是在这些子系统可能和其他子系统连接的地方成对出现的，这些连接的地方就是通口。由于这些成对出现的变量的乘积都是功率，例如 $\tau\omega$ 是机械功率,ei 是电功率,pQ 是液压功率，所以又把这些通口称做功率通口。若将(a)图中的电动机与(c)图中传动轴的一端相连，并将(b)图中液压泵轴与传动轴的另一端相连,则电动机的转矩与转速将与传动轴一端的转矩和转速相同，而传动轴另一端的转矩与转速将与液压泵轴的转矩与转速相等。应当指出，因为传动轴不是绝对刚性的，所以其两端的角速度 ω_1 与 ω_2 不是在任何时候都是相等的。

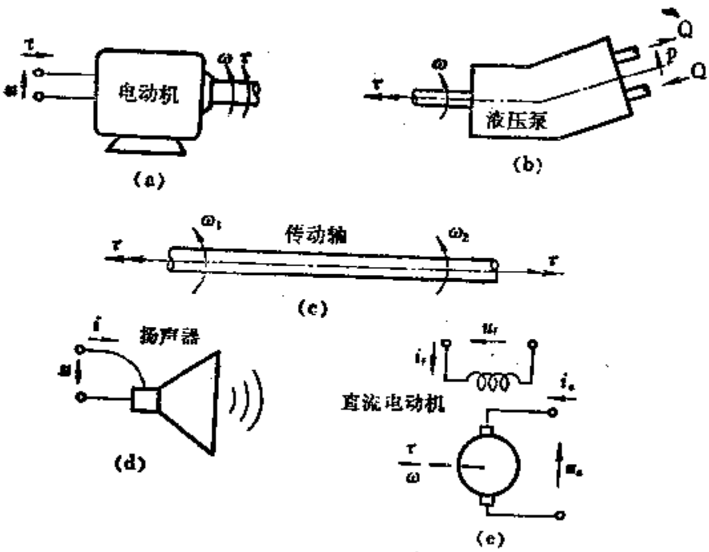

图 2-1 几种子系统

由上述可见，凡是各子系统能够相互连接的地方，也就是功率能在子系统之间流动的地方，这样的地方就称为“通口”。只有一个通口的子系统称为 1-通口，带两个通口的系统称为 2-通口，依此类推。按此定义来观察图 2-1 中所示的各个子系统可见，(a)，(b)及(c)图所示的子系统均为 2-通口，(d)图所示的扬声器若把它看作电元件而不作为电的子系统与声的子系统耦合的元件时，就是 1-通口，图(e)所示的直流电动机显然是 3-通口。

§2-2 子系统用文字表示的键图

在上节中已经说过，一个工程系统中各个子系统相互连接并用以传递功率的地方就是通口，现在将每一通口用一根短线段表示。根据工程系统的各个子系统间功率传递的实际情况，将这些子系统相互连接起来，这时，表示通口的短线段已重合在一起，就

称做键。利用键将各子系统连在一起所形成的图形就叫键图。在绘制键图时，开始可忽略一些因素，画出比较简单的键图，然后再逐步改进它，直到使它成为一个足够精确的系统模型为止。

绘制工程系统的键图时，最初可用文字表示子系统，如图 2-2 所示。

控制器 $\frac{F}{x}$驱动装置$\frac{M}{\omega}$液压泵$\frac{p}{Q}$使用处（负载）

图 2-2 文字键图

图中包含有一个可变换能量形式的驱动装置，例如一台柴油机，它带动液压泵对需要的地方输送液压油。从图中还可见到，每一根键上均有两个变量，而两者的乘积均为功率。这两个组成功率的变量在不同的工程领域有不同的物理量，但在键图表示法中则将不同的功率变量统一表示为两个变量，即一个为势变量，简称为势，另一个为流变量，简称为流。

表 2-1 上表示了常用的不同学科的势变量和流变量。例如在电工学中，势变量和流变量分别是电压和电流，在流体动力工程中分别是压力和容积流量，在力学和机械工程中则分别是力和速度，或转矩和转速。而且，不管在哪一工程学科中，势变量统一用 $e(t)$ 表示，流变量统一用 $f(t)$ 表示。所以流入或流出一个通口的功率 $P_0(t)$ 可表示为一个势变量和一个流变量的乘积，因而用广义表示法的功率表达式可写成

$$P_0(t)=e(t)f(t), \tag{2-1}$$

表 2-1 一些学科中势和流变量所代表的含义

	电工学	液压	机械		一般符号
			移动式	转动式	
势变量	电压$u(t)$	压力$p(t)$	力$F(t)$	力矩$M(t)$	$e(t)$
流变量	电流$i(t)$	容积流量$\dot{V}(t)$	速度$v(t)$或$\dot{x}(t)$	转速$\omega(t)$	$f(t)$
位移	电荷$q(t)$	容积$V(t)$	位移$x(t)$	转角$\varphi(t)$	$q(t)$
动量	电压脉冲	压动量力$p_p(t)$	动量$p(t)$	角动量$L(t)$	$p(t)$

式中 P_0，e 及 f 均写成时间 t 的函数，这是因为在动态系统中，功率、势及流变量都是随时间而变化的。

在表 2-1 中还列有两种很重要的变量，即位移和动量。应指出的是，在这里它们都具有广义的含义，在不同的工程领域它们各有不同的物理意义。例如，位移这一广义变量在电工学领域为电荷，在液压领域为容积，在机械领域为位移或转角。这两种广义变量往往又称为能量变量，因为它们与能量组成有关，详见下述。

广义位移定义为流变量的时间积分，即：

$$q(t) \equiv \int^{t} f(t)\,\mathrm{d}t = q_0 + \int_{t_0}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t, \tag{2-2}$$

式中 q_0 表示在 t_0 时的位移。

广义动量定义为势变量的时间积分，即

$$p(t) \equiv \int^{t} e(t)\,\mathrm{d}t = p_0 + \int_{t_0}^{t} e(t)\,\mathrm{d}t, \tag{2-3}$$

式中 p_0 表示 t_0 时的初始动量。

若按照微分形式书写时，(2-2) 及 (2-3) 式又可写成

$$\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = f(t), \quad \mathrm{d}q = f\mathrm{d}t, \tag{2-2a}$$

及

$$\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} = e(t), \quad \mathrm{d}p = e\mathrm{d}t。 \tag{2-3a}$$

流入或流出一个通口的能量 $E(t)$ 应是功率 $P_0(t)$ 的时间积分，即

$$E(t) \equiv \int^{t} P_0(t)\,\mathrm{d}t = \int^{t} e(t)\cdot f(t)\,\mathrm{d}t。 \tag{2-4}$$

再利用 (2-2a) 及 (2-3a) 式代入 (2-4) 式，可得

$$E(t) = \int^{t} e(t)\,\mathrm{d}q(t) = \int^{t} f(t)\,\mathrm{d}p(t)。 \tag{2-5}$$

以后将会遇到势是位移的函数以及流是动量的函数的情形，因而能量不仅可表示为时间的函数，也可用一个能量的函数来表示，即