

中国科学院
水利电力部 水利水电科学研究院

科学研究论文集

第 19 集

（结构、材料）

水利电力出版社

内 容 提 要

本书是继水利水电科学研究院论文集第9集(结构、材料)以后的结构材料研究所的部分科研成果,共计论文18篇。内容包括水工混凝土的力学性能试验、强度理论,沥青止水原理,水工结构模型试验、原型观测分析,混凝土坝的优化设计,温度应力,水库水温,闸门滚轮计算,大洞室施工应力以及渗流的计算方法等。

本书可供水利水电科研、设计、施工人员及高等院校水利水电专业师生参考。

中国科学院
水利电力部 水利水电科学研究院

科学研究论文集

第 19 集

(结构、材料)

*

水利电力出版社出版

(北京三里河路 6 号)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

水利电力印刷厂印刷

*

787×1092毫米 16开本 12.5印张 281千字

1984年11月第一版·1984年11月北京第一次印刷

印数 0001—3640 册 定价2.35元

书号 15143·5485

目 录

渗流问题的边界点方法·····	张有天	王 镭	陈 平	(1)
混凝土试件V型切口的断裂韧度 K_{Ic} ·····	于晓中	曹建国	郭桂兰	(11)
混凝土的二轴强度及其在拱坝设计中的应用·····	于晓中	曹建国	郭桂兰	(17)
大坝基础处理传力洞塞回填混凝土的温度控制				
研究·····	丁宝瑛	王国秉	黄淑萍	(24)
水库水温的调查研究·····	丁宝瑛	王国秉	黄淑萍	(37)
宽缝重力坝最优断面选择的非线性规划法·····	盛德举	王燮山		(51)
安康重力坝坝基抗滑稳定性的试验研究·····			刘致彬	(61)
岩石结构的光测应力分析·····			李伯芹	(71)
闸门滚轮计算方法的探讨·····			宋许成	(85)
水工建筑物变形缝沥青止水键工作原理和设计方法·····			付元茂	(93)
大掺量粉煤灰混凝土的徐变·····		惠荣炎	易冰若	(103)
混凝土应力松弛的试验研究·····	惠荣炎	金学龙	易冰若	黄国兴 (113)
关于水工混凝土的抗冻性·····			关英俊	(124)
水工混凝土抗冻性能的试验研究·····			方 璟	(136)
单支墩大头坝上游面垂直裂缝的初期发展过程和稳定性分析·····			张彦秋	(148)
非对称变厚度三心拱坝优化设计·····			厉易生	(161)
金属蜗壳及其外围钢筋混凝土原型观测资料分析·····			张进平	(175)
大洞室新奥法施工应力与围岩稳定问题及各种支护措施对应力				
影响的研究·····			胡惠昌	(186)

渗流问题的边界点方法

张有天 王 镭 陈 平

【提要】 本文用域外的有限个辅助点代替边界单元, 在这些辅助点上作用有未知集中虚点源, 它们所产生的势函数应满足相同数目边界控制点上的边界条件。于是, 二维和三维渗流问题的边界元方法都转换为点与点之间的简单几何关系问题, 从而大大简化了计算过程。且经算例表明, 对于渗流问题, 这种方法的精度比传统的边界元方法计算精度略有提高。

一、前 言

由于边界元方法有着一系列优点, 近年来它受到理论界和工程界最广泛的注意。1978年在英国召开了第一届国际边界元方法讨论会^[1], 1980年(在英国)、1981年(在美国)、1982年(在英国)相继召开了第二、三、四届国际边界元方法讨论会^[2,3,4], 大大推动了边界元方法在理论和应用上的进展。近年来国内外文献中关于边界元方法的文章日益增多, 边界元方法在许多复杂工程问题中已经得到实际应用。这种趋势的形成不仅在于边界元方法有着严密的理论基础, 更为主要的原因是它仅需对边界建立方程, 空间问题用面单元、平面问题用线单元, 与有限元方法相比, 单元的维数低了一阶。这种特点在许多情况下使得算题的数据信息几乎减少了一个量级, 因而计算人员有可能把自己从数据准备的浩繁工作中解放出来, 同时也减少了数据错误的可能性, 大大提高工作效率。

边界元方法所采用的基本解的奇异性使得某些数值积分出现了困难, 例如, 对于渗流问题边界元间接列式法, 沿单元分布虚源作用下单元端点切向流速分量是奇异的。为了解决这一困难, 提出了所谓正则积分方程法^[4,5] (Regular Integral Equation Method), 即在边界以外设任一辅助边界, 将辅助边界剖分为若干个单元, 虚源沿单元分布, 对边界上若干个点建立方程式, 这就避免了积分的奇异性。

无论是通常的边界元方法或是正则积分方程法都需要将求解域边界(或其辅助边界)剖分为单元。对于三维问题虽然用的是面单元, 而这个面仍是三维中的曲面或平面, 计算仍是很复杂的。有人用域外点代替域外单元来求解弹性应力问题, 称之为改进 Trefftz 方法^[6], 并得出结论, 这种方法的精度比边界元方法要差。我们用域外集中源作为未知量, 对边界点建立方程的方法解渗流问题, 发现当域外点的位置选择适当时, 其计算精度比边界元方法略高。这种方法把二维及三维问题全化成点与点之间的关系, 而且又是从边界元方法引伸出来但又完全不再有单元的概念, 所以我们称它为边界点方法以体现它与边界元方法的相同点和不同点。

二、渗流问题边界元方法的间接列式法

设求解域为 V , 其边界 S 由 S_1 及 S_2 两部分所组成。在 S_1 上给定流速势 $\bar{\Phi}$, 在 S_2 上则给定法向流速 u (图1)。在域内, 流速势分布符合于方程^[1]

$$\nabla^2 \Phi = Q \quad (1)$$

式中 $\Phi = -kH$,

Q ——域内源密度;

k ——渗透系数;

H ——水头。

偏微分方程(1)的解为

$$\Phi = \tilde{\Phi} + \Phi' \quad (2)$$

此式中 Φ' 为方程(1)的特解, $\tilde{\Phi}$ 为调和函数。显然, 满足边界条件的 $\tilde{\Phi} + \Phi'$ 即为所求之解。

若干调和函数的线性组合仍为调和函数, 无限域中点源函数除其本点外均为一调和函数。若能找到满足给定边界条件的沿边界分布的分布虚源, 这些沿边界分布虚源在域内所产生的势加上特解即为所求解。

设无限域中在 j 点有一单位点源, 它在域内 i 点产生的势 Φ^* 及在 $j-i$ 方向流速 u^* 为(参见图2)。

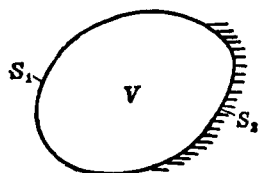


图1 计算域及边界条件

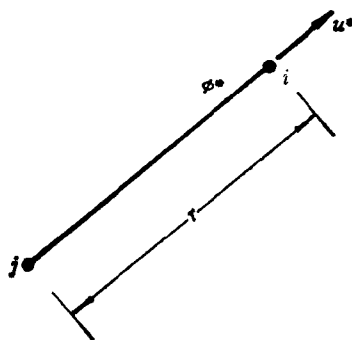


图2 点源函数

$$\left. \begin{aligned} \Phi^*(i, j) &= -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{d}{r} \\ u^*(i, j) &= \frac{1}{2\pi r} \quad (\text{二维问题}) \\ \Phi^*(i, j) &= -\frac{1}{4\pi r} \\ u^*(i, j) &= \frac{1}{4\pi r^2} \quad (\text{三维问题}) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

设沿边界分布虚源为 $T(j)$, 在 $T(j)$ 作用下, 域内任一点的流速势为

$$\bar{\Phi}(i) = \int_S \Phi^* T(j) dS(j) + \int_V \Phi^* \bar{Q}(R) dV(R) \quad (4)$$

域内任一点的 m 方向的流速为

$$u_m(i) = \int_S u_m^* T(j) dS(j) + \int_V u_m^* \bar{Q}(R) dV(R) \quad (5)$$

式中 u_m^* —— u^* 在 m 方向的投影。

若 $T(j)$ 已知, 则由式 (4) 可求域内流速势、由式 (5) 可求域内流速场。

设 i 点由域内移到 S_1 边界上, 式 (4) 为

$$\bar{\Phi}(i) = \int_S \Phi^* T(j) dS(j) + \int_V \Phi^* \bar{Q}(R) dV(R) \quad (6)$$

当 i 点在 S_2 边界上, 则有

$$\bar{u}_n(i) = \int_S u_n^* T(j) dS(j) + \int_V u_n^* \bar{Q}(R) dV(R) + \frac{1}{2} T(i) \quad (7)$$

式中 n —— 边界的外法线方向,

$\frac{1}{2} T(i)$ —— i 点与 j 点重合时的积分值 (设 i 点为光滑边界)。

将边界剖分为有 N 个结点的 N_1 个单元, 并将域内剖分为 N_2 个内部单元, 则式 (6)、(7) 可化为对 N_1 及 N_2 个单元积分的求和, 即

$$\bar{\Phi}(i) = \sum_{e=1}^{N_1} \int_{S_e} \Phi^* T(j) dS(j) + \sum_{e=1}^{N_2} \int_{V_e} \Phi^* \bar{Q}(R) dV(R) \quad (6')$$

$$\bar{u}_n(i) = \sum_{e=1}^{N_1} \int_{S_e} u_n^* T(j) dS(j) + \sum_{e=1}^{N_2} \int_{V_e} u_n^* \bar{Q}(R) dV(R) + \frac{1}{2} T(i) \quad (7')$$

式 (6')、(7') 对内部单元的积分均为已知值, 构成代数方程组的右端项。假定 $T(j)$ 在单元内按结点值呈某种函数分布, 即可求得积分值。按柯西准则, 式 (6') 的积分是收敛的^[7], 但式 (7') 的积分对单元的法向流速有值, 当求单元端点的切向流速时无值, 当边界在该点光滑时, 可以求切向流速主值。

将结点未知值表示为未知向量 x , 则式 (6')、(7') 可表示为如下 N_1 阶代数方程组

$$Ax = B \quad (8)$$

由式 (8) 可解得 N_1 个结点上的分布虚源强度值。

三、正则积分方程

为了避免 i 与 j 点重合而出现奇异积分, 可在 V 域以外设某一辅助面 S' , 将 S' 离散为有 N_1 个结点的 N 个单元 (图 3)。 j 点在 S' 上, 而 i 点在 S 上, 沿 S' 的积分方程是正则的, 这样就避开了奇异积分的问题。采用这种方法后, 可以求解 V 域内任何一点的流速势 Φ 和任一点任意方向的流速 u_m 而不必进行任何数学处理。

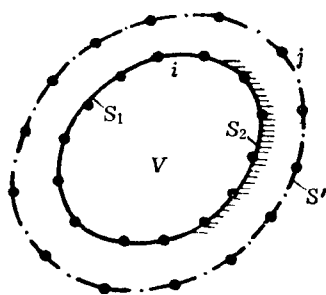


图3 辅助边界示意

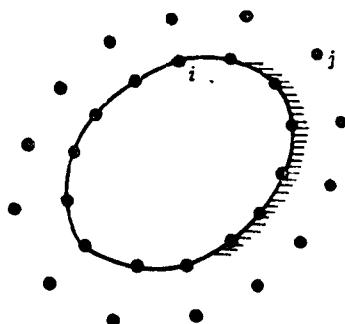


图4 边界控制点及辅助点

四、边界点方法

为了处理积分奇异性,在式(6)及式(7)中采用了分布虚源强度而不用集中虚源,这种办法类似于用分布力代替集中力。如果把待求虚源不设在边界上而是设在边界以外,就可以不用分布虚源而直接用集中虚源,从而问题就大为简化。根据问题的几何、物理性质,可在给定的边界上选定 N_1 个控制点,在域外相应地选择 N_1 个辅助点,每个辅助点上有强度为 X_j 的集中虚源(参见图4)。 X_j 产生势场的集合在选定边界控制点上应符合给定的边界条件,对于 S_1 上的控制点,可列出方程

$$\overline{\Phi}(i) = \sum_{j=1}^{N_1} \Phi^* X(j) \quad (9)$$

对 S_2 上的控制点,则有

$$\bar{u}_n(i) = \sum_{j=1}^{N_1} u_n^* X(j) \quad (10)$$

综合式(9)、(10)可得 N_1 阶线性代数方程组

$$Ax = B \quad (11)$$

由式(11)即可求得 N_1 个 X_j 值,则域内各点的 Φ 及 u 为

$$\left. \begin{aligned} \Phi(i) &= \sum_{j=1}^{N_1} \Phi^* X(j) \\ u_m(i) &= \sum_{j=1}^{N_1} u_m^* X(j) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

当控制点 N_1 无限增多而构成整个域的边界 S 时,由微分方程解的性质可知式(12)将逼近于真实解。

五、边界点方法算例

(一) 求解图5的二维渗流场

在边界上选择16个控制点,在各控制点外法线方向选择相同数目的辅助点。辅助点距

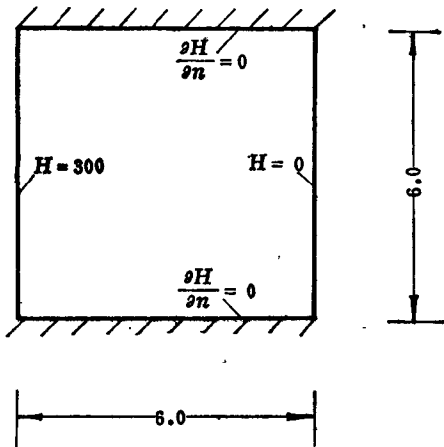


图 5 渗流场边界条件

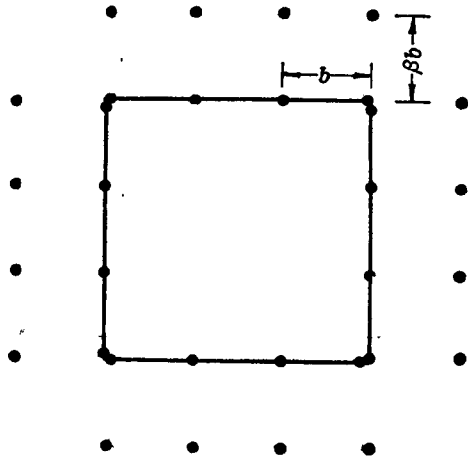


图 6 辅助点布置

控制点的距离为 βb (b 为边界上控制点间距, 见图6), 共选择了六组方案 ($\beta=0.2, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$) 进行了边界点方法渗流场计算。

为了比较边界点方法的精度, 在相同剖分条件下, 对同一问题与同常单元、线性单元、双角点控制线性单元的计算结果进行了比较 (参见图7, 8, 9), 现将各种方法计算边界水头列入表1。

 表 1 H (米) 值 的 不 同 计 算 法

计 算 方 法		点 号				最 大 误 差
		1	2	3	4	
理 论 值		300	200	100	0	
边界元法	常 单 元	273.42	199.46	100.35	26.36	26.58
	线单元(一角点)	300.00	203.30	96.70	0.00	3.30
	线单元(两角点)	298.00	200.00	99.97	2.07	2.07
边界点法	$\beta = 0.2$	300.00	180.64	100.38	0.00	19.36
	$\beta = 0.5$	300.00	192.36	100.32	0.00	7.64
	$\beta = 1.0$	300.00	198.58	100.00	0.00	1.42
	$\beta = 1.5$	300.00	200.06	99.78	0.00	0.22
	$\beta = 2.0$	300.00	200.33	99.74	0.00	0.33
	$\beta = 2.5$	300.00	200.30	99.77	0.00	0.30

计算所得流速分布见图10~图14 (理论值为50)。

由计算结果可以看出, 当 $\beta > 1$ 时, 边界点方法的计算精度均高于同一剖分的边界元方法, $\beta = 1.5$ 时最好, $\beta \geq 1.5$ 与 $\beta = 1.5$ 效果基本相同。可见边界点方法具有足够的计算精度。

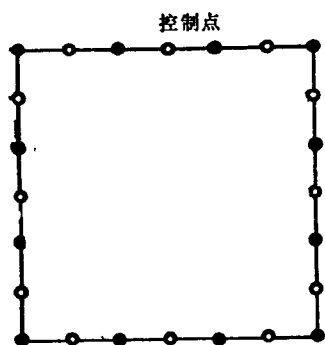


图 7 常单元

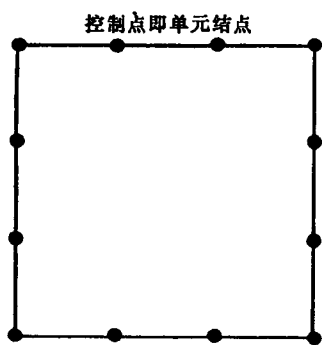


图 8 线性单元

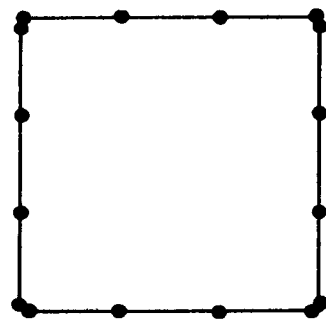


图 9 双角点线性单元

30.4	50.4	45.1	46.0	44.3	47.7	68.2
36.9	49.0	47.6	47.0	46.7	47.1	37.6
71.2	50.1	48.4	47.6	47.5	48.3	64.1
36.5	48.6	48.4	47.9	47.6	47.3	37.7
对 称 轴						

图 10 流速分布 ($\beta = 0.5$)

55.3	50.8	48.9	49.5	48.7	50.1	51.8
46.9	49.9	49.6	49.5	49.4	49.4	46.9
53.6	50.0	49.7	49.6	49.5	49.7	52.5
46.7	49.7	49.7	49.6	49.5	49.4	47.0

图 11 流速分布 ($\beta = 1.0$)

47.5	50.3	50.7	50.1	50.5	50.3	48.1
49.8	50.0	50.2	50.2	50.2	50.0	49.8
50.0	49.9	50.1	50.1	50.1	50.0	50.0
49.5	49.9	50.0	50.1	50.0	49.9	49.6
对 称 轴						

图 12 流速分布 ($\beta = 1.5$)

48.2	50.5	50.3	50.1	50.1	50.3	48.5
49.2	49.9	50.1	50.1	50.0	50.0	49.2
50.5	50.0	50.0	50.0	50.0	49.9	50.4
49.1	49.9	50.0	50.0	49.9	49.9	49.2

图 13 流速分布 ($\beta = 2.0$)

47.9	50.2	50.6	50.1	50.4	50.2	48.4
49.9	50.0	50.2	50.2	50.2	50.0	50.0
49.9	50.0	50.1	50.1	50.1	50.0	49.9
49.6	49.9	50.0	50.1	50.0	49.9	49.7
对 称 轴						

图 14 流速分布 ($\beta = 2.5$)

(二) 求解如图15的平面渗流场

在图15的计算边界上选择16个控制点(图16),按 $\beta = 1.0$ 、 1.5 选两组辅助点,用边界点方法进行了计算。对同一问题同样剖分还进行了边界元方法的比较计算,计算结果列于表2。

由表2可以看出,边界点方法比同一剖分的边界元常单元计算精度高。由于内圆边界是凹边界, β 过大时使辅助点集中在圆心附近,效果反而变差; $\beta = 1.0$ 时效果较好。

从上述两个平面渗流问题算例可以看出:对于全凸边界, β 值可选为 $1.0 \sim 1.5$;对于凹边界,选 $\beta = 1.0$;对于任意边界来说,选 $\beta = 1.0$ 均可满足工程要求的计算精度。

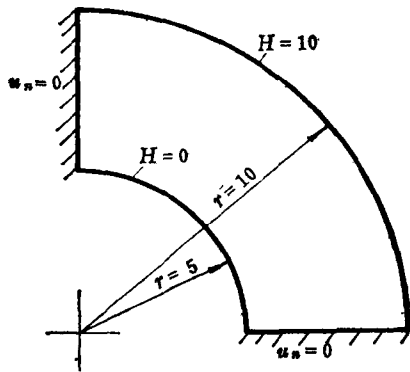


图 15 圆筒渗流场边界条件

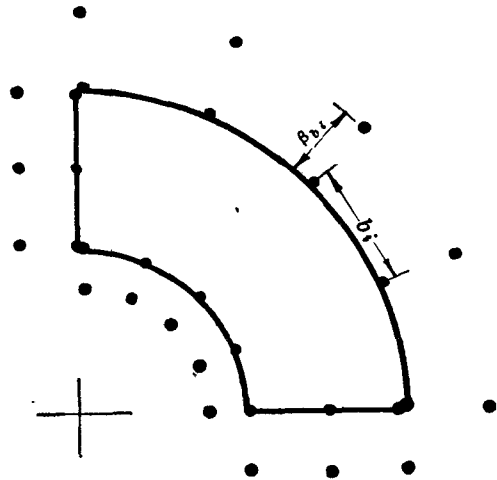


图 16 辅助点布置

表 2

轴对称渗流水头计算值 (米)

计 算 方 法		$y = 0$					
		$x = 5$	$x = 6$	$x = 7$	$x = 8$	$x = 9$	$x = 10$
理 论 值		0.00	2.63	4.85	6.78	8.48	10.00
边界元法(常单元)		1.16	3.14	4.94	6.94	8.16	8.57
边界点法	$\beta = 1.0$	0.00	2.66	4.89	6.82	8.51	10.00
	$\beta = 1.5$	0.00	2.28	4.65	6.81	8.57	10.00

(三) 三维问题

如图17三维立方体, 边长 2 米, 顶面水头 10 米, 底面为 0, 四侧为流线面, 每面仅取四个角点作为控制点建立方程 (24 阶), 计算结果列于表 3。

对于全凸三维问题, β 越大, 精度越高, 当 $\beta = 1.0$ 时水头最大误差为 1.5%, 流速最大误差 8.0%。可以看出, 这样稀的控制点就可以满足工程精度要求。如果再增加一些控制点, 计算精度还能显著提高。

(四) 轴对称及球对称空间问题

轴对称圆环柱, 内径 0.3 米, 外径 0.6 米, 高度 0.1 米, 内环水头为 10 米, 外环水头为零, 其它各面为流线面。取中心角 12.8° 的三维体进行计算, 总控制点 102 个 (内环、外环各 9 个, 上、下、左、右各 21 个) $\beta = 0.67 \sim 3$ (各点的数值不相同)。

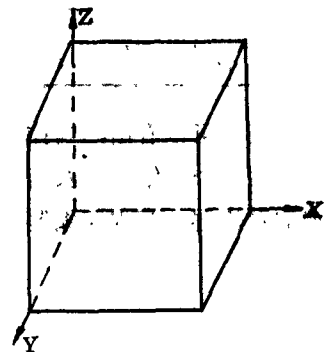


图. 17 立方体计算域

表 3 三维立方体(24阶)渗流场(水头 H 及流速 v)计算值

点 坐 标			项 目	β							理论值
X	Y	Z		0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	
1	1	2	H	9.466	9.921	10.004	10.014	10.013	10.010	10.007	10
			v	4.352	4.841	4.932	4.952	4.963	4.971	4.977	5
2	1	2	H	9.468	9.916	10.015	10.033	10.031	10.026	10.020	10
			v	4.629	4.734	4.744	4.784	4.832	4.873	4.905	5
2	2	2	H	10	10	10	10	10	10	10	10
			v	6.106	4.790	4.579	4.614	4.692	4.764	4.821	5
1	1	1	H	4.863	5.004	5.031	5.031	5.026	5.020	5.015	5
			v	4.627	4.961	5.029	5.036	5.030	5.023	5.017	5
2	1	1	H	4.799	5.012	5.059	5.059	5.048	5.037	5.028	5
			v	4.604	5.023	5.122	5.123	5.101	5.078	5.059	5
2	1	1	H	4.766	5.012	5.066	5.066	5.054	5.042	5.032	5
			v	4.798	5.151	5.193	5.162	5.124	5.092	5.069	5

球对称圆环球, 内径0.3米, 外径0.6米, 内环水头为10米, 外环水头为零。取经纬度各为 $\pm 6.4^\circ$ 的三维体进行计算, 总控制点102个(内环、外环各9个, 上、下、左、右各21个), $\beta = 0.67 \sim 1.34$ (各点数值不相同)。

计算结果列于表4。

表 4 轴对称及球对称三维例题计算结果

计算情况	项 目		r						
			0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6
轴 对 称	近 似 解	H	10.00	7.76	5.83	4.13	2.62	1.25	0.00
		v	49.80	41.35	36.00	31.99	28.76	26.11	23.81
	理 论 解	H	10.00	7.78	5.85	4.15	2.63	1.26	0.00
		v	48.09	41.22	36.07	32.06	28.85	26.23	24.04
球 对 称	近 似 解	H	10.00	7.19	5.06	3.37	2.02	0.92	0.00
		v	64.45	48.89	37.66	29.91	24.28	20.04	16.78
	理 论 解	H	10.00	7.14	5.00	3.33	2.00	0.909	0.00
		v	66.67	48.98	37.50	29.63	24.00	19.83	16.67

由表4可以看出, 当控制点选用稍多时, 计算精度显著提高。

上面两个二维算例及两个三维算例表明, 用较少的边界控制点即可得到满足工程精度要求的数值解。其程序编制十分简便, 这种方法特别适用于三维问题。

六、结 语

(1) 为什么用集中虚源的边界点方法反而比常单元及线单元的边界元方法的精度

要高？

边界元方法未知量是分布虚源强度，它应比集中虚源更能适应于连续变化的边界条件。从例1的计算可以明显看出，当辅助点很接近控制点时，精度就越来越差。这是因为点源函数的奇点性质所决定的。一般边界元方法辅助面与边界面重合，虽然采用了分布源作为未知量，仍不足以完全挽回由奇异性引起的精度损失。

(2) 锐角边界的处理

图18, 19中的A点处边界均为凹角，如仍采用上述将辅助点沿其法向向外推移，其结果是控制点A'或是离另一边界太近(图18)而大大影响计算精度，或是跑到计算域内(图19)而使计算结果不能用。对于这种问题，可以有以下两种办法处理：

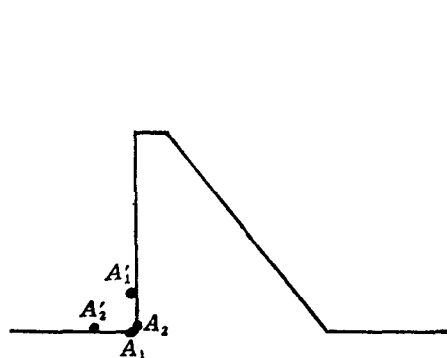


图 18 凹角处辅助点不合理布置(一)

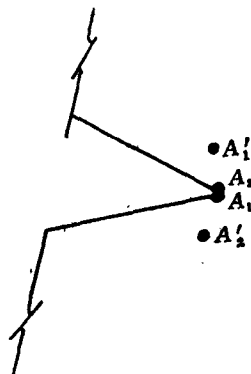


图 19 凹角处辅助点不合理布置(二)

①将计算域分为几个全凸边界的子域(图20)，分别对每个子域进行计算，在交界面处水头及法向流速均为未知数，是未知边界条件，可补充建立如下方程求解

$$\bar{\phi}_I = \bar{\phi}_{II}$$

$$(u_n)_I + (u_n)_{II} = 0$$

②对于90°以上的凹边界，也可以设一个收缩点，类似于圆边界的圆心。虚源点位于边界控制点与收缩点的连线上即可(图21)。这种方法程序处理比较方便，但角点只能设立一个结点。

(3) 积分的奇异性也有它突出的优点，它对场内函数梯度较大的区域比较适应，计算精度较高。因此，对于这类问题，还宜采用奇异积分的方法为好。

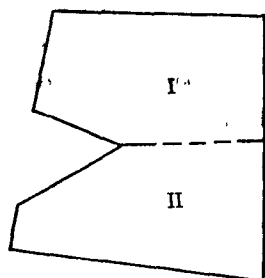


图 20 在凹角处分成两个计算域

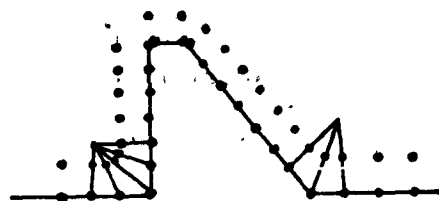


图 21 凹角处辅助点合理布置

参 考 文 献

- [1] Brebbia, C.A. (ed.), Recent Advances in Boundary Element Methods, Proc. 1st Int. Conference on Boundary Element Methods, Southampton University, 1978.
- [2] Brebbia, C.A. (ed.), New Developments in Boundary Element Methods, Proc. 2nd Int. Conference on Boundary Element Methods, Southampton University, 1980.
- [3] Brebbia, C.A.(ed.), Proc 3rd Int Seminar on Boundary Element Methods, California, 1981.
- [4] Patterson, C and Sheikh, M.A., Regular Boundary Integral Equation for stress Analysis, Boundary Element Methods, Brebbia, C.A. (ed)1981.
- [5] Vable, M. and Sikarskie, D.L., An Efficient Algorithm for the Numerical Evaluation of Boundary Integral Equations. Boundary Element Methods, Brebbia, C.A. (ed.)1981.
- [6] Patterson, C and Sheikh, M.A., A Modified Trefftz Method for stress Analysis, Proc. Int. Conference on Finite Element Method,1982.
- [7] 张有天、张武功, 半无限域渗流问题边界元方法, 水利学报, 1981年5月。

Boundary Point Method for Seepage Flow

Zhang Youtian, Wang Lei,
Chen Ping

Abstract

Instead of boundary elements finite numbers of points outside the studied region are selected. On each of the points acts an unknown fictitious concentrated source, its magnitude is determined by the condition that the composed potential field induced by all of the sources must satisfy the given boundary condition at the same number of controlled points on the boundary. Converted to simple geometrical points to points relations, boundary element method for seepage flow becomes more simple and convenient not only for two but for three dimensional problems as well. As proved by numerical example, the accuracy of the proposed method is a little higher than that of traditional boundary element method.

混凝土试件V型切口的断裂韧度 K_{Ic}^*

于晓中 曹建国 郭桂兰

【提要】 本文利用格劳司(B. Gross)等人提出的计算三点弯曲梁V型切口 K_{Ic} 的公式, 通过试验求得了切口角度 $\theta = 0^\circ \sim 90^\circ$ 时混凝土的断裂韧度 K_{Ic} 。 $\theta = 90^\circ$ 时混凝土切口的断裂韧度比 $\theta = 0^\circ$ 时的大12%。

一、前言

线裂纹可看作是V型切口的极限情况, 即V型切口二边的夹角等于零的情况。对于混凝土断裂韧度试验来说, 在试件上模拟线裂纹是很困难的。这主要是因为不能用预制金属裂纹的方法来预制混凝土裂纹。因此, 常采用 $10^\circ \sim 30^\circ$ 的切口来代替线裂纹, 这就需要估计由此而造成的误差。另外, 实际工程结构中也存在着这种切口, 如混凝土重力坝或拱坝上游坝踵, 上游面向上游的折角处、坝内方型廊道或孔口等。这些切口端部应力的奇异性比线裂缝要低。为判断这种切口的开裂问题, 必须知道与其相应的断裂韧度。

本文利用格劳司等求出的计算三点弯曲梁切口 K_{Ic} 的公式^[1], 通过混凝土梁的断裂试验, 得到了混凝土切口的断裂韧度 K_{Ic} , 并对其进行了讨论。

二、试验方法和结果

(一) 具有不同角度的I型V型切口的应力强度因子

弹性力学平面问题应满足双调和方程

$$\nabla^4 \psi = 0 \quad (1)$$

式中 ψ 是复变函数, 其实部满足方程(1); 忽略三点弯曲梁的体力, 设

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n} F(\lambda_n, \varphi) \quad (2)$$

取 $F(\lambda_n, \varphi) = [a_{1n} \cos \lambda_n \varphi + a_{2n} \cos(\lambda_n - 2)\varphi]$, 利用函数(2), 由弹性力学可求出应力 σ_r 、 σ_φ 和 $\tau_{r\varphi}$ 。

设切口的角度 $\alpha = 360^\circ - \theta$, θ 为切口二边的夹角(见图1), 根据切口边界上 $\sigma_\varphi = \tau_{r\varphi} = 0$, 求得 λ_n 应满足如下特征方程

$$\sin(\lambda_n - 1)\alpha = -(\lambda_n - 1)\sin\alpha \quad (3)$$

式中 $\lambda_n = \eta_n + i\xi_n$, $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$ 。当 $\eta_1 = \frac{3}{2}$ 及 $r \rightarrow 0$ 时, σ_φ 有 $\frac{1}{2}$ 阶奇点。类似线

* 华北水电学院1982年毕业班学生王钟宁、薛守义和穆贵书参加了部分试验工作。

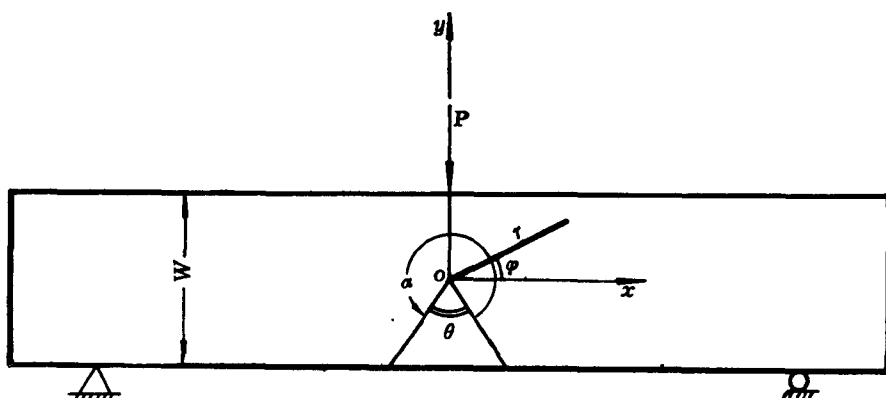


图 1 三点弯曲梁

裂纹应力强度因子的定义, 则定义切口应力强度因子

$$K_I = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} r^{2-\eta_1} \sigma_y(r, 0) \quad (4)$$

格劳斯等利用上述结果, 用边界配置法算出了三点弯曲梁的 K_I , 其结果见表1 (表中 b 是梁厚, a 是切口高度)。

表 1

带切口的三点弯曲梁的 η_1 和 $\frac{K_I b W^{\eta_1}}{6PW}$

角 度 α°	360	330	310	290	270	180
切 口 角 度 θ°	0	30	50	70	90	180
η_1	1.500000	1.501455	1.506933	1.519854	1.544484	2.000000
$k = \frac{K_I b W^{\eta_1}}{6PW}$	$\frac{a}{W} = 0.5$	1.767	1.775	1.830	1.944	2.118
	$\frac{a}{W} = 0.3$	1.013	1.021	1.055	1.123	1.226

(二) 试验方法及结果

混凝土试件的配比为水泥:水:砂:石子=1:0.52:2.35:3.93, 此中水泥为河北省琉璃河水泥厂生产的325号普通矿渣水泥, 石子为二级配的河卵石, 其中5~20毫米的小石子与20~40毫米的中石子各半。

试验中采用的切口角度有 $\theta = 0^\circ$ 、 30° 、 50° 、 70° 和 90° 五种, 试模为钢模。先将上述角度的钢楔粘在试模上, 再浇注混凝土, 48小时后拆模, 取出钢楔后就形成了带切口的梁, 然后将试件移至 20°C 雾室养护, 28天龄期进行试验。切口高度 a 有3厘米和5厘米二组, 试件分4次成型, 为便于比较, 对每批试件均浇注了一组带线裂纹的试件和10个 $10 \times 10 \times 10$ 厘米的立方体试件。

试验在1吨电子拉力机上进行, 加荷速度为1毫米/分钟, 用500公斤拉压传感器测定荷

载值,用电阻式位移计测加载点位移,用开口位移计测切口的开口位移。上述量测值均通过YD-15型动态应变仪用X-Y记录仪记录。采用极限荷载,利用表1中的公式计算的试验结果见表2和图2所示。

对上述试验结果进行回归,得到如下的方程

$$\frac{K_{Ic}}{(K_{Ic})_{\theta=0}} = 0.985 + 0.0015\theta \quad (5)$$

表 2 试 验 结 果

切口高度 厘 米	试件浇注 盘 号	切口夹角 θ°	计算角度 α°	平均极限 荷 载 (公斤力)	K_{Ic} (公斤/ 厘米 η_1)	$\frac{K_{Ic}}{(K_{Ic})_{\theta=0}}$ (厘米 η_1) $_{\theta=0-\eta_1}$	立 方 强 度 (公斤/厘米 η_2)
5	D	0	360	167.4	56.1	1.0	259
		50	310	174.1	59.5	1.06	
	E	0	360	181.4	60.8	1.0	273
		70	290	186.4	65.8	1.08	
		90	270	186.8	70.2	1.15	
	H	30	330	357.8	69.1		281
		50	310	356.8	70.3		
3	K	0	360	453.5	87.2	1.0	304
		70	290	472.0	96.1	1.10	
		90	270	453.1	95.2	1.09	

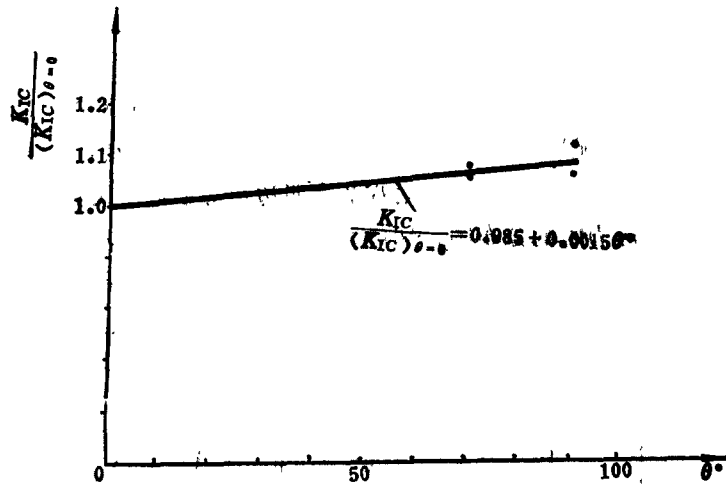


图 2 试验成果图

三、结 语

(1) 从表2可见,各种角度切口的混凝土的 K_{Ic} 均大于线裂纹的 K_{Ic} 。现根据计算 K_{Ic} 的公式进行分析:

$$\frac{K_{Ic}}{(K_{Ic})_{\theta=0}} = \frac{6Pk}{bW^{(\eta_1-1)}} \bigg/ \frac{6P_{\theta=0}k_{\theta=0}}{bW^{(\eta_1)_{\theta=0}-1}} = \frac{P}{P_{\theta=0}} \beta(\theta) \quad (6)$$

$$\text{式中 } \beta(\theta) = \frac{k}{k_{\theta=0}} \cdot W^{(\eta_1)}_{\theta=0-\eta_1};$$

系数 k 、 η_1 见表1; 算出的 $\beta(\theta)$ 值见表3。

表 3 β (θ) 值

α°	360	330	310	290	270
θ°	0	30	50	70	90
$\beta(\theta)$	1.000	1.001	1.019	1.051	1.082

从式(6)可见, 切口断裂韧度 K_{Ic} 与线裂纹的断裂韧度 K_{Ic} 的比值取决于它们的极限荷载的比值和 $\beta(\theta)$ 。随切口角度 θ 的增加, 切口端部的奇异性逐渐降低, $\beta(\theta)$ 值逐渐增大。 $\theta = 30^\circ$ 的 $\beta(\theta)$ 值比线裂纹的大0.1%。

极限荷载的变化, 应当受缝端奇异性的变化和梁截面的变化这二种因素的影响。缝端奇异性降低会使极限荷载增加; 切口角度的增加使梁的刚度降低, 因而, 极限荷载应当降低。但试验结果证明, 具有切口的梁的极限荷载均大于具有线裂纹的极限荷载。因此, 当切口的角度等于或小于 90° 时, 奇异性是影响极限荷载的主要因素。

综上所述, 用带有切口的三点弯曲梁求得的切口断裂韧度 K_{Ic} , 主要受缝端奇异性变化的影响。根据试验结果, 切口为 30° 时混凝土的 K_{Ic} 比线裂纹的大3%。因此, 在试验中用 30° 的切口代替线裂纹是完全可行的。在结构分析中, 采用线裂纹的断裂韧度作为I型V型切口($\theta [0^\circ, 90^\circ]$)的断裂标准是偏于安全的。

(2) 在一些研究混凝土断裂韧度的论文中, 常从根据极限荷载按切口顶点处的截面计算出的应力等于同高度无切口的梁的抗折强度这点出发, 说明混凝土是切口不敏感材料^[2]。这种看法值得商榷。图3是我们用八节点四边形等参数单元算得的, 具有切口为 30° 的三点弯曲梁的正应力 σ_x 的分布图。切口角度 θ 为零度时, 缝端用的是奇异性蜕化三角形单元, 其最小边尺寸为2毫米; θ 不为零时, 用一般四边形等参数单元, 其最小边尺寸为0.5~2毫米。从图3可见, 如不考虑缝端形成微裂纹区, 与无裂纹梁相比中性轴向下

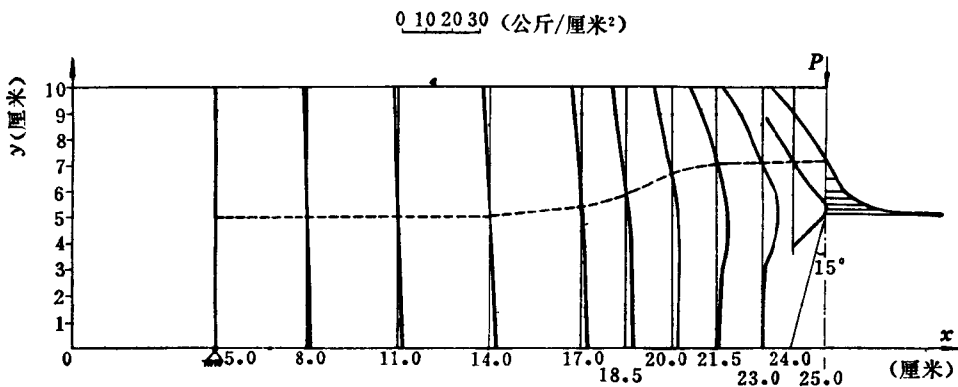


图 3 梁的正应力 σ_x 的分布图