学习快餐

同步精讲精练

初中 3 年级

数学 全一册

TONGBUJINGJIANGJINGLIAN

主编 黄兆芳

南方出版社

使用说明

《同步精讲精练》是按照国家大力提倡的中小学“减负”政策，促使基础教育由应试教育向素质教育转轨的精神，依据国家教育部最新教学改革内容分年级分学科编写的。每年级分上学期、下学期两册。考虑到教学实际，其中初中二年级地理、生物以及初中三年级各学科编成全一册。其体例按照教学内容，文科分单元、理科分章节编写。每单元或每章节分为四大块：“**知识要点**”给出教学内容；“**精讲精练**”是本书的重点，包括例题、分析、解答、小结、跟踪练习等；“**难题选解**”主要选解教材中的难题，供学有余力的学生阅读；“**阶梯自测题**”帮助学生在理解的基础上进一步巩固知识要点。本书在此次修订再版时，特别针对小学一、二年级的语文和数学，初中一、二年级的语文、数学和英语等教材变动较大的科目进行了重点修改，以使其内容更新、更准，符合教学改革的要求和辅导学生的实际。

本书适合作为中小学学生的学习辅导书和教师的教学参考书。使用本书时请注意：一是不可忽略“同步性”，应严格与教学进度保持一致，及时强化、巩固所学知识和技能；二是因人而异、灵活取舍，基础不同的学生，对其体例的四大块内容除重点的“精讲精练”部分外，其余部分可根据自身情况有所侧重。

编　者

2001 年 6 月 8 日

目　　录

代数部分

第六章　解直角三角形

6·1　正弦和余弦

知识要点

1. 正弦和余弦的意义
2. 特殊角的正弦和余弦值
3. 互余的两角三角函数的关系
4. 正弦、余弦值的增减性
5. 同一锐角的正弦、余弦之间的关系
7. 正弦、余弦表

精讲精练

【例 1】（1）已知 α 为锐角，求证：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；

（2）已知 $\sin A=\frac{5}{13}$，且 A 为锐角，求 $\cos A$ 的值.

分析：（1）利用正弦、余弦的定义来证.

（2）利用（1）的结论，或构造直角三角形再利用正弦、余弦的定义来解.

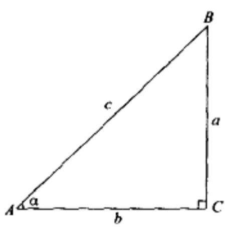

图 6－1

（1）证明：构造直角三角形，使 $\angle C=90°$，$\angle A=\alpha$，如图 6－1，由正

弦定义得：$\sin\alpha=\frac{a}{c}$，

由余弦定义得：$\cos\alpha=\frac{b}{c}$，

$\therefore\quad \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{c^2}$

$\because\quad a^2+b^2=1$，

$\therefore\quad \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

（2）**解**：作 Rt$\triangle ABC$，使$\angle C=90°$，如图 6－2，因为 $\sin A=\frac{5}{13}$，所以可设 $AB=13k$，$BC=5k$，$(k>0)$，由勾股定理得，

$$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}$$
$$=\sqrt{(13k)^2-(5k)^2}=12k,$$

$\therefore\quad \cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{12k}{13k}=\frac{12}{13}$.

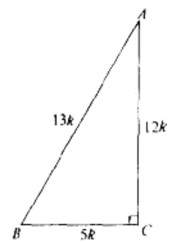

图 6－2

小结：（1）已知一个锐角的正弦（余弦）函数值，求这个锐角的余弦（正弦）值，一般构造一个直角三角形，根据三角函数定义，设相关边长，用勾股定理求出第三边长，再应用三角函数定义求出要求的三角函数值；

（2）当 α 为锐角时，还有一个不等关系：$\sin\alpha+\cos\alpha>1$.请同学们自行证明.

【例 2】求下列各式的值.

（1）$(1+\sin45°-\cos30°)(1-\sin45°-\cos30°)+\cos45°\sin60°$；

（2）$\sqrt{\sin^2 60°+\sin^2 35°-2\sin60°+\cos^2 35°}$；

（3）$\frac{4\sin30°\cos72°}{\sin18°+\cos72°}+\frac{1}{\cos(45°-\alpha)}-\frac{1}{\sin(45°+\alpha)}$

$(0° < \alpha < 45°)$

分析：(1) 将特殊角的三角函数值代入计算；或先化简再代入. (2) 与 (3) 为非特殊角的三角函数；可利用互为余角的三角函数关系及同角三角函数关系来解.

解： (1) 原式 $=[(1-\cos30°)+\sin45°][(1-\cos30°)-\sin45°]+\cos45°\sin60°$

$$=(1-\cos30°)^2-\sin^2 45°+\cos45°\sin60°$$

$$=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=1\frac{1}{4}-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

(2) 原式 $=\sqrt{(\sin^2 35°+\cos^2 35°)+\sin^2 60°-2\sin60°}$

$$=\sqrt{1+\sin^2 60°-2\sin60°}$$

$$=\sqrt{(1-\sin60°)^2}$$

$$=1-\sin60°$$

$$=\frac{2-\sqrt{3}}{2}.$$

(3) 原式 $=\frac{4\sin30°\cdot\sin18°}{\sin18°+\sin18°}+\frac{1}{\sin(45°+\alpha)}-\frac{1}{\sin(45°+\alpha)}$

$$=\frac{4\times\frac{1}{2}\sin18°}{2\sin18°}+0$$

$$=1.$$

小结：(1) 三角函数式的化简与计算，当所给的角是特殊角时，只要把特殊角的三角函数值代入计算即可.

(2) 当所给的角是非特殊角的三角函数式，对其进行化简与计算，要灵活运用同角三角函数关系和互为余角的三角函数关系. 本题第 (3) 小题要善于发现 $45°+\alpha$ 与 $45°-\alpha$ 是互为

余角．$\sin(45^\circ+\alpha)=\cos(45^\circ-\alpha)$，$\cos(45^\circ+\alpha)=\sin(45^\circ-\alpha)$．

(3) 有些三角式的化简还要注意代数公式的运用．如第(1)、(2)小题．

【例 3】 求适合于下列各式0°到90°之间的角 A：

(1) $\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$；　　(2) $2\sin^2A-3\cos A=0$

分析：(1) 考查特殊角的余弦值的逆运用；

(2) 利用 $\sin^2A+\cos^2A=1$，求出 $\cos A$ 的值，再求 A．

解：(1) $\because$ A 为锐角，又 $\because$ $\cos45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore$ $A=45^\circ$

(2) $\because$ $\sin^2A+\cos^2A=1$，

$\therefore$ $\sin^2A=1-\cos^2A$

又 $\because$ $2\sin^2A-3\cos A=0$

$\therefore$ $2(1-\cos^2A)-3\cos A=0$，即 $2\cos^2A+3\cos A-2=0$

$\therefore$ $\cos A=\frac{1}{2}$ 或 $\cos A=-2$

$\because$ A 为锐角 $\cos A>0$，

$\therefore$ $\cos A=-2$，舍去．

$\therefore$ $\cos A=\frac{1}{2}$．$\because$ A 为锐角，

$\therefore$ $A=60^\circ$．

小结：(1) 根据三角函数值求出适合条件的角可以培养逆向思维能力；

(2) 当给出条件是同一个角的正弦与余弦关系式时，要利用关系式 $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$，或 $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$，消去 $\sin^2\alpha$ 或 $\cos^2\alpha$，得到一个关于 $\cos\alpha$（或 $\sin\alpha$）的一元方程，再解方程得出三角函数值，以便求角．当角为锐角时，正弦和余弦值都大于 0 且小于 1．如果解出的三角函数值为负或绝对值大于 1，

那么必须舍去.

【例 4】查表计算

(1) $\sin 37°26'$；　(2) 已知 $\cos A=0.7857$，求锐角 A.

解：(1) $\because$　$\sin 37°24'=0.6074$

$(+2')$　$(+0.0005)$

$\therefore$　$\sin 37°26'=0.6079$

(2) $\because$　$\cos 38°12'=0.7860$

$(+1')$　(-0.0001)

$\therefore$　$\cos 38°13'=0.7859$

$\therefore$　锐角 $A=38°13'$

这里修正值与 0.0001 最接近的是 0.0002，对应的角是 $1'$

小结：(1) 查表的根据是三角函数在 $0°\sim 90°$间的变化规律。查正弦表时，“角加（+）值加（+），角减（－）值减（－）”；查余弦表时，“角加（+）值减（－），角减（－）值加（+）”

(2) 如果表中修正值没有待查的数据时，取较近的那个数值作为待查的数据。

【例 5】如图6－3，在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$ 于 D，$AC=\sqrt{6}$，$BC=\sqrt{3}$，求$\angle ACD$ 的正弦值.

分析：$\angle ACD$ 在 $Rt\triangle ACD$ 中，因为 $AC=\sqrt{6}$，只需求 AD. 利用$\angle ADC$、$\angle B$，都与$\angle A$ 互余这个关系，可求 $\sin B$. 于是可得 $\sin\angle ACD$.

解：如图 6－3，在 $Rt\triangle ABC$ 中，

$\because$　$BC=\sqrt{3}$，$AC=\sqrt{6}$，$\angle BCA=90°$

$\therefore$　$AB=\sqrt{BC^2+AC^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{6})^2}=3$

$\therefore$　$\sin B=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\because$ $CD \perp AB$ 于 D

$\therefore$ $\angle ACD + \angle A = 90^\circ$

又$\because$ $\angle B + \angle A = 90^\circ$

$\therefore$ $\angle ACD = \angle B$.

$\therefore$ $\sin\angle ACD = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

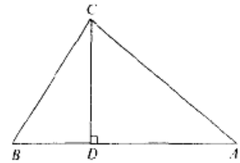

图 6－3

小结：利用直角三角形两锐角互余来证角相等是常用方法之一．如证出$\angle ACD = \angle B$后，求$\sin\angle ACD$就转化为求$\sin B$．另外，还可由$\angle DCA + \angle A = 90^\circ$，$\sin\angle DCA = \cos A$．求$\sin\angle ACD$转化为求$\cos A$．

〔跟踪练习〕

一、选择题

1．Rt△ABC中，$\angle C = 90^\circ$，$\cos B = \dfrac{2}{3}$，则 $a:b:c =$ （　　）

(A) $2:\sqrt{5}:3$　　(B) $1:2:3$

(C) $1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$　　(D) $2:\sqrt{5}:\sqrt{3}$

2．下列各式中命题正确的有几个 （　　）

①$\cos47^\circ < \cos48^\circ$　　②$\cos70^\circ > \cos69^\circ$

③$\sin44^\circ < \cos44^\circ$　　④$\sin\alpha < 1$ 总成立

(A) 1个　(B) 2个　(C) 3个　(D) 4个

3．在Rt△ABC中，$\angle C = 90^\circ$，$\angle A = 60^\circ$，$BC = 1$，则 $AB =$ （　　）

(A) 2　(B) $\sqrt{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(D) $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$

二、填空题

1．△ABC中，$\angle C = 90^\circ$，若 $a = 21$，$b = 20$，则 $\sin B =$ ________．

2. 若 $\sin A=\dfrac{1}{5}$，$\angle A+\angle B=90^\circ$，则 $\cos B=$ ______.

3. 等腰三角形 ABC 中，底边 $BC=20$，$\sin C=\dfrac{3}{5}$. 则 $\triangle ABC$ 的周长 = ______.

三、解答题

1. 不查表求下列各式的值.

(1) $\dfrac{1}{2}\sin60^\circ+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos45^\circ+\sin30^\circ\cos30^\circ\cdot\sin90^\circ\cdot\cos0^\circ$

(2) $\sin^2(30^\circ+\alpha)+\cos^2(30^\circ+\alpha)-\dfrac{\sin(30^\circ+\alpha)}{\cos(60^\circ-\alpha)}$ $(0^\circ<\alpha<60^\circ)$

2. 已知 α 为锐角，$\cos\alpha=\dfrac{15}{17}$，用两种方法求 $\sin\alpha$ 值.

3. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$a:b=\sqrt{3}$，求 $\sin A$ 及 $\angle B$.

难题选解

例 已知 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的斜边长为 10cm，它的锐角的正弦 $\sin A$、$\sin B$ 是关于 x 的方程 $(m+5)x^2-(2m-5)x+12=0$ 的两个实根.

求 m 的值.

解：(1) $\because\ A+B=90^\circ$

$\therefore\ \sin B=\cos A$

由已知，得

$\sin A+\cos A=\dfrac{2m-5}{m+5}$ ①　　$\sin A\cdot\cos A=\dfrac{12}{m+5}$ ②

①式两边平方，得　$1+2\sin A\cos A=\left(\dfrac{2m-5}{m+5}\right)^2$ ③

将②代入③，得

$$1+2\times\frac{12}{m+5}=\frac{(2m-5)^2}{(m+5)^2}$$

解得　$m_1=-2$，$m_2=20$

讨论：当 $m_1=-2$ 时，原方程为：

$$3x^2+9x+12=0$$

此方程的根的判别式△<0，方程无实根.

∴　$m_1=-2$ 不合题意，舍去

当 $m_2=20$ 时，原方程为：

$$25x^2-35x+12=0.$$

解得　$x_1=\frac{3}{5}$，$x_2=\frac{4}{5}$

∴　m 的值为 20

小结：三角函数有关问题，常常需要结合代数中的方程来解，本题隐含 $sin^2A+sin^2B=1$ 是解这个题的关键. 本题 m 的范围如果由 $\frac{2m-5}{m+5}>0$ 且 $\frac{12}{m+5}>0$ 且 $\triangle\geqslant0$ 解得，解法较繁. 采用对 m 的两个具体值逐一筛选是一种较好的方法.

6·2　正切和余切

知识要点

1. 正切和余切的定义
2. 特殊角的正切值和余切值
3. 互余的两角的正切函数与余切函数关系
4. 正切、余切函数的增减性
5. 同一锐角的正切、余切之间的关系

6. 正切表、余切表

精讲精练

【例1】 已知 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ $(0°<\alpha<90°)$，求 α 角的其他三角函数的值.

分析： 要求 $\sin\alpha$、$\mathrm{tg}\alpha$、$\mathrm{ctg}\alpha$ 的值，或构造直角三角形. 运用三角函数的定义；或利用同一锐角的三角函数关系式.

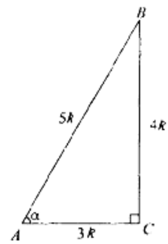

图 6－4

解： 作 Rt△ABC，使∠$C=90°$，如图 6－4，设∠$A=\alpha$，∵ $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，∴ 可设 $AC=3k$，$AB=5k$，其中 $k>0$.

∵ ∠$C=90°$，∴ $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}$ $=\sqrt{(5k)^2-(3k)^2}=4k$.

∴ $\sin\alpha=\frac{BC}{AB}=\frac{4k}{5k}=\frac{4}{5}$，$\mathrm{tg}\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{4k}{3k}=\frac{4}{3}$，

$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{AC}{BC}=\frac{3k}{4k}=\frac{3}{4}$

小结： 已知一个锐角的正弦（或余弦）值，求其余三个三角函数值的方法有：一般构造直角三角形，利用三角函数的定义求值；也可应用同角间的三角函数关系即：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$来解.

【例2】 求值.

$\mathrm{tg}^260°-2\cos45°+\sin^225°+\sin^265°-3\mathrm{ctg}^260°+\sqrt{2}\,\mathrm{tg}10°\cdot\mathrm{tg}80°$

分析： 本题目的在于考查特殊角三角函数值的记忆，互为

余角的三角函数关系和同角的三角函数知识的应用能力。

解：原式 $=(\sqrt{3})^2-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin^2 25^\circ+\cos^2 25^\circ-3\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\sqrt{2}\mathrm{tg}10^\circ\cdot\mathrm{ctg}10^\circ$

$=3-\sqrt{2}+1-1+\sqrt{2}$

$=3.$

小结：涉及到特殊角三角函数值的计算问题，只要把特殊角的三角函数值代入计算即可；当所给的角是非特殊角而又不查表求值时，要充分运用同角三角函数关系和互为余角的三角函数关系．如：$\sin 65^\circ=\cos 25^\circ$，$\sin^2 27^\circ+\sin^2 63^\circ=\sin^2 27^\circ+\cos^2 27^\circ=1$，一般地 $\sin^2\alpha+\sin^2(90^\circ-\alpha)=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$

【例 3】不查表比较大小

（1）$\sin 54^\circ 17'$和 $\cos 35^\circ$；（2）$\mathrm{ctg}44^\circ$和 $\mathrm{tg}44^\circ$

（3）$\sin 75^\circ$和 $\mathrm{tg}75^\circ$　　（4）$\sin\alpha$ 和 $\mathrm{tg}\alpha(0^\circ<\alpha<90^\circ)$

分析：（1）、（2）化同名函数．（3）、（4）找中间值或求差，化弦．

解：（1）$\because$ $\cos 35^\circ=\sin 55^\circ$，当 $0^\circ<A<90^\circ$时，$\sin A$ 的值随 A 的增大而增大．$\therefore$ $\sin 54^\circ 17'<\sin 55^\circ$，即 $\sin 54^\circ 17'<\cos 35^\circ$.

（2）$\because$ $\mathrm{ctg}44^\circ=\mathrm{tg}46^\circ$，当 $0^\circ<A<90^\circ$时，$\mathrm{tg}A$ 的值随 A 的增大而增大．$\therefore$ $\mathrm{tg}46^\circ>\mathrm{tg}44^\circ$，即 $\mathrm{ctg}44^\circ<\mathrm{tg}44^\circ$.

（3）解 $\because$ $\sin 75^\circ<1$，$\mathrm{tg}75^\circ>\mathrm{tg}45^\circ=1$.

$\therefore$ $\sin 75^\circ<\mathrm{tg}75^\circ$.

（4）解 $\sin\alpha-\mathrm{tg}\alpha$

$=\sin\alpha-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$= \frac{\sin\alpha\ (\cos\alpha - 1)}{\cos\alpha}.$$

$\because\quad 0° < \alpha < 90°$，$\therefore\quad \sin\alpha > 0$，$0 < \cos\alpha < 1$

$\therefore\quad \dfrac{\sin\alpha\ (\cos\alpha - 1)}{\cos\alpha} < 0.$

$\therefore\quad \sin\alpha - \mathrm{tg}\alpha < 0$，即　$\sin\alpha < \mathrm{tg}\alpha$.

小结：比较两个三角函数的大小，常用方法有以下几种：

(1) 将不同名函数化为同名函数，应用三角函数的增减性；

(2) 将各函数值与同一个值进行比较；

(3) 利用三角函数定义或将正切与余切函数化为正弦与余弦函数求差.

【例 4】 已知：$\mathrm{tg}\alpha = 3$，求$\dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{3\sin\alpha + 5\cos\alpha}$ 的值.

分析：将 $\mathrm{tg}\alpha = 3$，转化为 $\sin\alpha$ 与 $\cos\alpha$ 之间的关系，或将原式化为含有 $\mathrm{tg}\alpha$ 的式子.

解：$\because\quad \mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 3$，$\therefore\quad \cos\alpha \neq 0$，将所求的式子分子、分母同除以 $\cos\alpha$，得：

$$原式 = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{3\sin\alpha}{\cos\alpha} + 5\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}$$

$$= \frac{\mathrm{tg}\alpha - 1}{3\mathrm{tg}\alpha + 5}$$

$$= \frac{3-1}{3\times 3+5} = \frac{1}{7}.$$

小结：已知一个角的正切或余切函数值，要求含有正弦及余弦函数式的值只需将所求的式子化为含正切（或余切）函数的表达式.

〔跟踪练习〕

一、选择题

1. 当 A 为锐角，且 $\mathrm{ctg}A<\sqrt{3}$时，A （　　）

(A) 小于 30°　　(B) 大于 30°

(C) 小于 60°　　(D) 大于 60°

2. 已知 $\mathrm{tg}30^\circ\cdot\mathrm{tg}\alpha=1$．$\alpha$ 是锐角，那么 $\sin\alpha$ 的值是（　　）

(A) $\frac{1}{2}$　(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(D) 1

3. 在$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，如果 $\sin A=\frac{3}{4}$，那么 $\mathrm{tg}B=$ （　　）

(A) $\frac{3}{4}$　(B) $\frac{\sqrt{7}}{4}$　(C) $\frac{3}{\sqrt{7}}$　(D) $\frac{\sqrt{7}}{3}$

二、填空题

1. 若 $\mathrm{tg}53^\circ48'=1.3663$，则 $\mathrm{ctg}36^\circ12'=$ ________

2. $\sqrt{\mathrm{tg}^2 30^\circ-2\mathrm{tg}30^\circ+1}+|\cos30^\circ-1|=$ ________

3. 若 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$．α 为锐角，则 $\cos\alpha\cdot\mathrm{tg}\alpha=$ ________

三、解答题

1. $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$BC=10\mathrm{cm}$，$\triangle ABC$ 的周长为 36cm，求底边上的高及底角的正切与余弦.

2. 已知 $\mathrm{tg}A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\angle A$ 是锐角，求：$\angle A$ 的其余三个三角函数值.