线性规划学习指导

戴宗儒　李志煦　郑郁文　主编

科学技术文献出版社

线性规划学习指导

主编　戴宗儒　李志煦　郑郁文

编写　李建平　姜印中　徐国元

　　　章　朔　张永明

主审　崔福荫　王尚文

科学技术文献出版社

内 容 简 介

本书内容包括：线性规划问题的数学模型及其标准形式；线性规划问题的解法及原理；对偶线性规划；管理决策与信息分析；特殊线性规划的不同解法。各章均按主要内容、基本要求、答疑解惑、典型题分析、部分习题与解答、自测题及参考答案等部分编写。文字叙述简练，通俗易懂，便于自学。

本书可作为财经类大专院校、职业大学、管理干部学院、业大、电大以及函授学员的指导书，也可作为教师教学的参考书。

线性规划学习指导

戴宗儒等 主编

科学技术文献出版社出版

国防工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

*

787×1092毫米　32开本　7.375印张　158千字

1989年5月北京第一版第一次印刷

印数：1— 6380册

社科新书目：228—183

ISBN 7-5023-0804-0/O·56

定价：2.75元

前　　言

为了适应财经类大专学生学习和教学的需要，我们编写了这套经济应用数学基础系列学习指导丛书。全套从书包括《微积分学习指导》《概率论与数理统计学习指导》《线性代数学习指导》《线性规划学习指导》共四册。

每一册分章编写，每一章都包括如下六个部分：

（一）主要内容部分：用精练的语言分条分款概述本章主要内容，目的使读者对本章的内容理出一个系统和层次；

（二）基本要求部分：把本章的学习要求分几点说清，指出读者应掌握什么，了解什么，理解什么，并指出重点和难点；

（三）答疑解惑部分：指出读者学习过程中可能会提出的问题或易混淆的概念，拟出题目并作出解答；

（四）典型题分析部分：每章都有针对性地举出一定数量的例题进行分析详解，以帮助读者正确理解基本概念，提高解题能力；

（五）部分习题与解答部分：每章配有习题（本习题选自高教出版社出版的大专教材《线性规划》），并给出了解答；

（六）自测练习题部分：各章后面都有反映本章内容的自测练习题，并给出了参考答案。

全书最后均附 A，B，C 三组综合自测试题，并附有参考答案。

《线性规划学习指导》是根据高等财经院校专科层次，以及函授、职大、业大、电大的经济应用数学基础《线性规划》的教学要求而编写的，是学员的学习指导书，也可作为教师的教学参考书。全书共分五章，内容包括：线性规划的数学模型，解法及原理，对偶线性规划，管理决策与信息分析，运输问题的表上作业法、图上作业法以及简单的整数规划问题。

这套学习指导书是由北京经济管理学院（原人大一分校），金陵职业大学，江汉大学，西安基础大学，辽宁税务专科学校等院校联合编写的，编者都是在教学第一线有多年教学经验的教师，并由崔福荫、曹承宾、何蕴理、王尚文主审。

对这套学习指导书的结构和编写形式，我们做了新的尝试，由于水平有限，在内容的取舍，结构的安排，以及体例形式等各方面难免存在问题与不妥之处，敬请读者批评指正。

编者

1988年2月15日

目　录

第一章　线性规划问题的数学模型及其标准形式

一、主要内容

1. 线性规划简介

线性规划是运筹学的一个重要分支，在工农业生产、交通运输、生产管理、军事活动等方面都有广泛的应用。为了解线性规划问题的特点及实质，我们先看下面引例。

引例：某工厂计划生产甲、乙、丙三种产品。生产甲产品1件需要原材料3公斤，占用劳动工时2小时，盈利4元；生产乙产品1件需要原材料2公斤，占用劳动工时1小时，盈利5元；生产丙产品1件需要原材料4公斤，占用劳动工时3小时，盈利3元。若每天可供应原材料120公斤，劳动工时数为100小时，在工时必须完全利用的条件下，问该厂应如何安排日生产，使总利润最大？

解决这一实际问题，我们应把它归结为数学问题，一般可分以下步骤：

（1）把问题的相关条件列成表格形式，如表：

产品 / 单位消耗 / 资源	甲	乙	丙	资源供给数量
原材料	3	2	4	120 公斤
劳动工时	2	1	3	100 小时
单位利润（元/件）	4	5	3	

（2）选择决定因素做为未知量

设 x_1，x_2，x_3 分别表示生产甲、乙、丙产品的数量（件）。

（3）确定问题中的所有限制条件，用方程组或不等式组表示。

该厂每天消耗原材料的数量不能超过 120 公斤，即

$$3x_1+2x_2+4x_3\leqslant 120$$

该厂提供的日劳动工时数 100 小时，必须用完，即

$$2x_1+x_2+3x_3=100$$

由未知量 x_1、x_2、x_3 的实际意义，有：

$x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$，$x_3\geqslant 0$，且均取整数。

（4）确定该问题所寻求的目标，是

目标 求总利润 $S(X)=4x_1+5x_2+3x_3$ 取得最大值。

综上所述，该问题的数学表达式（数学模型）为

求：x_j，$j=1，2，3$

满足约束条件

$$\text{s.t.}\quad\begin{cases}3x_1+2x_2+4x_3\leqslant 120\\ 2x_1+\ \ x_2+3x_3=100\\ x_1\geqslant 0，x_2\geqslant 0，x_3\geqslant 0\ \text{均取整数}\end{cases}$$

并使总利润 $S(X)=4x_1+5x_2+3x_3$ 最大。

由以上引例我们可以看到，线性规划问题的实质是：在一组线性的约束条件下，求一个线性函数的极值（最大值或最小值）。

2．线性规划的数学模型

所谓数学模型就是用数学形式描述实际问题。线性规划的数学模型主要由目标函数和约束条件两个部分组成。

（1）目标函数：

目标函数就是用数学形式描述实际问题中想要达到的目标。在目标函数前冠以“max”或“min”表示问题要达到最大值或最小值。线性规划的目标函数是一个线性（变量次数是“1”）函数 $S(X)=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$。被描述为

$$\max S=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

或
$$\min S=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

（2）约束条件：

约束条件是用数学形式描述实际问题的限制条件，线性规划的约束条件是一个等式或不等式组。

3. 线性规划的标准形式

为了今后研究问题方便，将各种形式的线性规划的数学模型统一到一个标准形式是很必要的。

（1）线性规划的标准形式为

$$\max S=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

其中，c_j，a_{ij}，b_i 都是常数 $i=1, 2, \cdots, m$，$j=1, 2, \cdots, n$；

x_j 称为决策变量；

c_j 是目标函数中决策变量 x_j 的系数；

a_{ij} 是第 i 个约束方程中 x_j 的系数；

b_i 是第 i 个约束方程中的常数项．$b_i\geq 0$。

（2）线性规划标准形的矩阵形式

记

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$C=(c_1,\ c_2,\ \cdots c_n) \qquad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

那么，线性规划的标准形式就可记作：

$$\max S = C(X)$$

$$\begin{cases} AX = b \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

为了避免约束条件中出现多余方程，我们要求秩（A）$= m$。

（3）线性规划标准形式的特点

1° 对于目标函数 $S(X)$ 是求最大值；

2° 约束条件都是线性等式；

3° 每个约束方程的常数项 b_i 都非负；

4° 所有变量都有非负限制 。

4. 将线性规划数学模型转化为标准形式

（1）若某个约束是"$\leqslant$"或"$\geqslant$"，可引入非负松驰变量，将其转化为"$=$"。

（2） 若某个约束的常数项 $b_i < 0$，可在约束方程两边同乘以"-1"。

（3） 若目标函数是求最小值时，可在目标函数两边同乘以"-1"，将求最小值问题转化为求最大值。

（4） 若某个决策变量 x_j 无非负限制，则可令 $x_j = x_j' -$

x_j'', $x_j' \geqslant 0$，$x_j'' \geqslant 0$，将 $x_j = x_j' - x_j''$ 代入数学模型。

请读者参见典型题分析。

5. 线性规划的可行解和最优解

（1）可行解：满足线性规划数学模型约束条件的解，称为线性规划的可行解。

（2）最优解：在线性规划的可行解中使目标函数值达到最大（或最小）的解，称为线性规划的最优解。求解线性规划就是求线性规划的最优解。

二、基本要求

1. 明确线性规划问题的意义。

2. 明确线性规划数学模型的一般形式，初步掌握建立线性规划数学模型的方法。

3. 熟悉运输问题、生产组织和计划安排问题，合理下料问题、配料问题以及布局问题等几个典型经济问题的数学模型。

4. 能够建立简单的数学模型。

5. 能够熟练地将一般的线性规划数学模型转化为线性规划的标准形式。

三、答疑解惑

1. 如何建立数学模型

将实际问题抽象为数学形式，（见引例）建立数学模型是运用数学工具解决实际问题的第一步，这是一件非常重要又非常困难的工作，不但需要数学知识而且需要处理实际问

题的专业知识，建立一个复杂问题数学模型往往需要几个方面的专家共同合作，如何建立数学模型已形成一门专门的技术。在这里我们只能简单地介绍一下建立数学模型的一般步骤：

（1）深入了解实际问题，收集有关数据，列成表格，这样可直观地明确各种因素间的关联，以便确定约束条件和所要达到的目标；

（2）将影响该问题的主要因素确定为决策变量，并用数学符号表示它们，确定各个决策变量的可取值范围；

（3）用数学表达式表达各个约束条件，在线性规划问题中一般是线性等式和线性不等式；

（4）用数学表达式表达所要达到的目标，写出目标函数$S(X)$的表达式，如果是目标函数的最大值则在$S(X)$前冠以“max”，反之冠以“min”。

2．为什么要定义线性规划的标准形式

由于实际问题非常复杂，建立的线性规划数学模型也将是五花八门，这就给求解这些模型带来了困难，不可能对每一个模型都给出一个具体的解法。为此，就需要把数学模型都统一到一种形式——标准形式。这样我们只需对标准形式的解法进行深入讨论，而其他模型都通过一些方法转化到标准形式求解即可。

3．关于线性规划标准形式的定义

上面谈到线性规划标准形式只是为了统一数学模型的形式，至于怎样定义标准形式对于求解线性规划是没有实质性的影响的。在许多教材、丛书和资料中对线性规划标准形式的定义是不完全相同的。本书采用标准形式是求目标函数最大值。求最小值的问题都应转化为求最大值问题，有些丛书、

教材采用标准形式是求目标函数的最小值，求最大值的问题都应转化为求最小值。读者使用教材中应注意本丛书对标准形式是如何定义的，以免产生不必要的疑问。

四、典型题分析

例 1.1 某地有 A_1、A_2、A_3 三个矿山，它们的产量分别为 200，300，600 万吨。另外有 B_1、B_2、B_3、B_4 四个炼铁厂需要矿石，其需要量分别为 400，300，200，200，万吨。并且已知由每个矿山到各工厂运送一吨矿石的运费如下表：

工厂 / 运费 / 矿山	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3	1	2	1	200
A_2	1.4	2	5	1.7	300
A_3	1.4	3	1	1.5	600
需要量	400	300	200	200	1100

问：应如何调运使总运费最少？

设从 A_i 分别向 B_j 运输矿石的量为 x_{ij}（$i=1, 2, 3$；$j=1, 2, 3, 4$）如下表：

工厂 / 运量 / 矿山	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	200
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	300
A_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	600
需要量	400	300	200	200	1100

则

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=200 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=300 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=600 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31} \qquad =400 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32} \qquad =300 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33} \qquad =200 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34} \qquad =200 \\ x_{ij}\geqslant 0\ (i=1,\ 2,3,j=1,2,3,4) \end{cases}$$

$$\min S=3x_{11}+x_{12}+2x_{13}+x_{14}+1.4x_{21}+2x_{22}+5x_{23}$$
$$+1.7x_{24}+1.4x_{31}+3x_{32}+x_{33}+1.5x_{34}$$

例 1.2 设某化纤厂，生产四种产品。其型号为A_1, A_2, A_3, A_4, 生产此四种产品的主要车间：甲车间设备能力为5600台/时，乙车间设备能力为3600台/时。每种产品的收入及生产各种产品所需的设备台时数(均指单位产品)如表：

产品型号 / 台时数 / 车间	A_1	A_2	A_3	A_4	设备能力 (台/时)
甲	10	16	12	18	5600
乙	4	5	6	80	3600
收入	24	38	40	70	

问该厂在可能条件下如何编制生产计划，才能创造更多收入？

解 设 x_{ij} 表示第 i 个车间生产第 j 种产品的计划产量 $(i=1,\ 2;\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

则
$$\begin{cases} 10x_{11}+16x_{12}+12x_{13}+18x_{14}\leqslant 5600 \\ 4x_{21}+5x_{22}+6x_{23}+80x_{24}\leqslant 3600 \\ x_{ij}\geqslant 0\ (i=1,\ 2;\ j=1,\ 2,3,4) \end{cases}$$

$$\max S = 24(x_{11}+x_{21})+28(x_{12}+x_{22})+40(x_{13}+x_{23})$$
$$+70(x_{14}+x_{24})$$

例 1.3 某造纸厂生产两种宽度（10 尺和 20 尺）卷纸，出售时将按用户要求切割成不同宽度，假设该厂接到三份定单，其要求如表

定单号码	宽（尺）	长（尺）
1	5	10.000
2	7	30.000
3	9	20.000

怎样满足用户以上要求而又使切割损失量最小？

设 x_{ij} 是第 i 种卷纸（$i=1$ 对应 10 尺；$i=2$ 对应 20 尺）按照第 j 种方式切割的长度。现将两种标准纸可能采用的切割方式列表如下：

宽	i = 1 (10尺)			i = 2 (20尺)						需求量
	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	
5	2	0	0	4	2	2	1	1	0	10000
7	0	1	0	0	1	0	2	1	0	30000
9	0	0	1	0	0	1	0	1	2	20000
切割损失	0	3	1	0	3	1	1	4	2	

设 S_1、S_2 和 S_3 分别是卷纸切成 5 尺、7 尺、9 尺后的剩余长度

则

$$\begin{cases} 2x_{11}+4x_{21}+2x_{22}+2x_{23}+x_{24}+x_{25}-S_1=10000 \\ x_{12}+x_{22}+2x_{24}+x_{25} \qquad -S_2=30000 \\ x_{13}+x_{23}+x_{25}+2x_{26} \qquad -S_3=20000 \\ x_{ij}\geqslant 0 \quad S_i>0 \quad (i=1,2,3;\ j=1,2,\cdots,6) \end{cases}$$

$$\min S=3x_{12}+x_{13}+3x_{22}+x_{23}+x_{24}+4x_{25}+2x_{26}$$
$$+5S_1+7S_2+9S_3$$

题后话：

1）这种类型问题建立数学模型的关键是怎样切出标准卷纸的宽度，使10尺和20尺宽的原材料，构成5尺、7尺和9尺宽的有机组合，以达到从宽度上损失最小的目标；

2）在切割过程中还要有剩余长度，这也是损失内容，故需引进S_1、S_2、S_3来表示；

3）每个约束条件都表示的是某种切割方式切割宽度和长度的限制；

4）这种“下料问题”用途很广。

例1.4 某种产品由三个部件组成，其构成比例为1:2:3，它们是由四个不同车间生产的，而每个车间有一个有限的生产小时数，下表给出三个部件的生产率，目标是要确定分配在每一个部件上每个车间的工作时数，使完成产品的件数最多。

车　间	能力（小时）	生产率（件/小时）		
		部件Ⅰ	部件Ⅱ	部件Ⅲ
一	100	10	15	5
二	150	15	10	5
三	80	20	5	10
四	200	10	15	20

设x_1，x_2，x_3，x_4是四个车间同时生产三个部件的工作时数，则有

$$Y=\min\left\{\begin{array}{l}10x_1+15x_2+20x_3+10x_4\\ \dfrac{15x_1+10x_2+5x_3+15x_4}{2}\\ \dfrac{5x_1+5x_2+10x_3+20x_4}{3}\end{array}\right.$$