HENDONG JIXIE ZHENDONG

曹亚云 谢柳辉 谭永松 编

机械振动

华中工学院出版社

机 械 振 动

曹亚云　谢柳辉　谭永松　编
责任编辑　黎 秋 萍
*
华 中 工 学 院 出 版 社 出 版
(武 昌 喻 家 山)
新 华 书 店 湖 北 发 行 所 发 行
华中工学院出版社印刷厂印刷
*
开本：787×1092　1/32　印张：9.375　字数：207,000字
1986 年 6 月第一版　1986 年 6 月第一次印刷
印数：1—5,000
统一书号：15255—057　定价：1.60元

内 容 简 介

本书内容既包括传统的振动理论知识，又适当反映了近代振动理论的成就。全书共分六章，从单自由度系统开始，依次论述了两个自由度和多个自由度系统的振动，并介绍了工程上常用的多自由度系统的固有频率与主振型的近似计算方法，最后述及弹性和非线性系统的振动。

本书可作为工科院校机械、土木类有关专业的教材，也可供有关工程技术人员参考。

前　　言

机械振动是机械运动的一种特殊形式，是指物体在其平衡位置附近所作的往复运动。例如钟摆的摆动，刀具的颤动，车厢的晃动以及机器、桥梁、房屋和水坝的振动等，都是机械振动。振动现象在工程中是很普遍的。事实上，任何机械在运转过程中都伴随着不可避免的振动，而具有质量与弹性的任何结构物都有可能产生振动。

在工程上，振动往往会引起不良后果。例如，振动会影响精密仪器的正常使用；会降低机械加工的精度和光洁度；会使结构物或机器的构件产生动应力，缩短其使用寿命，甚至会引起其构件或整个结构物的破坏；振动及其产生的噪音会使劳动条件恶化，等等。但是，振动也有它有用的一面，例如，振动传输、振动筛选、振动研磨、振动抛光、振动沉桩等等，都是利用振动来提高生产效率的。

因此，我们研究机械振动的目的，就是掌握振动的基本规律。当振动有害时，能有效地避免或减小它；当有利时，能适当地加强和应用它。由于目前产品朝着高、精、尖方向发展，工程结构朝着巨型化方向发展，生产实际已向人们提出了各种各样的振动问题，故振动分析已成为各项工程研究与设计的一个必不可少的环节。因此，迫切需要高等院校有关专业的学生具备有关机械振动学科方面的基础知识与实际工作能力，为以后深入研究与解决机械振动实际问题打好必要的基础。

对于振动，有各种分类方法，本书主要是以振动系统的自由度数来分类，并以此为线索来讲叙的。

单自由度系统的振动——只用一个独立坐标就可确定系统位置的振动。本书第一章通过对单自由度系统的研究，给出有关振动的一系列的基本概念，阐明振动的一些普遍特性，学习时，需深入理解，牢固掌握。

二自由度系统的振动——其位置需用两个独立坐标才能确定的系统的振动。这是本书第二章所研究的内容。二自由度系统是最简单的多自由

度系统，有关多自由度系统振动的许多概念与理论只是在其基础上的延伸与推广。因此，学习本部分内容一方面要掌握解决二自由度系统振动问题的方法；另一方面，更重要的是为学习和研究多自由度系统振动奠定基础。

多自由度系统的振动——是指两个以上的有限自由度系统的振动。这是本书第三章与第四章研究的内容。第三章应用矩阵方法，介绍多自由度系统振动的基本理论和分析方法，涉及微分方程的建立，多阶固有频率与主振型的确定，主坐标和正则坐标的引入以及用振型叠加法确定系统的各种响应等。第四章专门介绍工程上确定多自由度系统的固有频率和主振型的各种实用近似方法，例如瑞利能量法、邓克利法、李兹法、矩阵迭代法、子空间迭代法和传递矩阵法。因此这两章不仅具有重要的理论意义，而且具有更为重要的实用价值。

弹性体振动——也称为无限多自由度系统的振动，本书第五章通过对杆的纵向、扭转振动以及梁的横向振动的分析，来建立连续系统振动的基本概念，介绍其分析方法。

以上几章所介绍的，都是由常系数线性微分方程所描述的线性振动问题，而实际上，许多系统是不能简化为线性系统的，必须用非线性微分方程来描述。于是，这种系统的振动问题即成为所谓非线性振动问题。本书最后一章研究这方面的内容。无论是从理论分析方法来看，还是从振动变化过程来看，非线性系统与线性系统相比都有本质上的不同。本章对几个典型的非线性系统振动问题用定性方法（相平面法）和解析方法（林斯泰特法及渐近法），来揭示非线性系统振动的重要特性和一般规律。

“机械振动”是一门范围很广的学科，需要涉及多方面的知识，但由于考虑到振动的基本理论在解决振动问题时的重要性，所以本书力求突出基本理论和基本方法。本书约50学时可授完，根据不同专业可适当增减内容。本书除可作为机械、工程类有关专业的选修课或必修课教材外，还可供从事研究、设计与制造等的有关工程技术人员参考。

本书承华中工学院李灏教授，日本群马大学 (Gunma University) 教授长屋幸助 (Kosuke Nanaga) 和长沙交通学院樊勇坚副教授审阅，在此特表示衷心的感谢。本书在编写过程中，参考了西北工业大学季文美教

授等同志编的《机械振动》及其它书籍(见参考书目)，在此对有关编著者致以谢意。

参加本书编写工作的有长沙铁道学院曹亚云(第二、三章及第一章后一部分)，谢柳辉(第四章和第六章)和长沙交通学院谭永松（第五章及第一章前一部分)。华中工学院陈敏卿负责全书的校审工作。

由于编者水平有限，不当之处在所难免，望读者批评指正。

编　者

1985．2。

目　　录

第一章　单自由度系统的振动

本章主要介绍，单自由度系统的自由振动；粘性阻尼对自由振动的影响；单自由度系统对简谐激振、周期激振和任意激振的响应；在强迫振动中激振力与阻尼力的功以及等效粘性阻尼等。

由于单自由度系统具有一般振动系统的一些重要特性，且很多实际系统可简化为单自由度系统，因此对单自由度系统的振动问题进行研究，既可为研究多自由度系统的振动问题打好基础，又具有重要的实际意义。

§1-1　无阻尼自由振动

系统在受到初始干扰后，由于恢复力作用而产生的振动，称为无阻尼自由振动。

（一）运动微分方程的建立及其解

先看几个例子。

例1-1　系统如图 1-1 所示。设物体质量为 m，弹簧原长为 l_0，刚度为 k，弹簧质量与 m 相比可以忽略不计，求物体沿铅直方向的运动微分方程。

取物体为研究对象，以物体静平衡位置 o 为坐标原点，x 轴铅直向下。当物体处于静平衡位置时，如图1-1(a)所示，有

$$mg=\delta_{st}k,$$

其中δ_{st}为弹簧的静伸长。

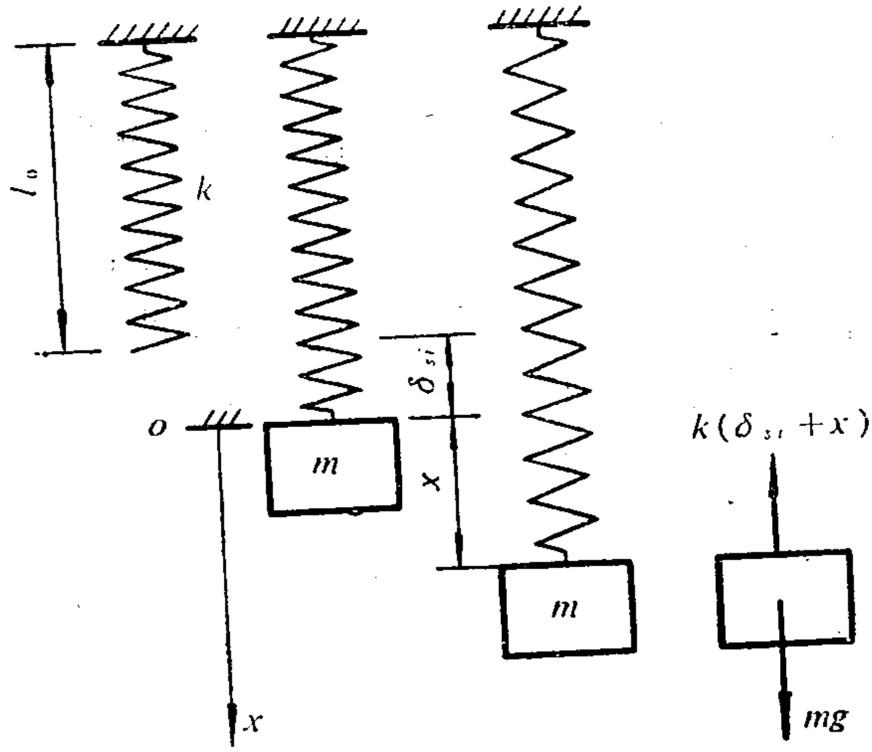

图 1-1

当物体在任一位置x时，物体受力情况如图1-1(b)所示。由牛顿运动定律得质量m的自由振动微分方程

$$m\ddot{x}=mg-k(\delta_{st}+x),$$

即
$$m\ddot{x}+kx=0.$$

令$\omega^2=k/m$，则有

$$\ddot{x}+\omega^2x=0. \tag{1-1}$$

例1-2　在一根轴的下端固结一水平圆盘，如图1-2所示。设圆盘对轴线的转动惯量为I，轴的扭转弹性系数为k，轴的质量忽略不计。若将圆盘扭转一个角度，然后释放，求圆盘的扭转自

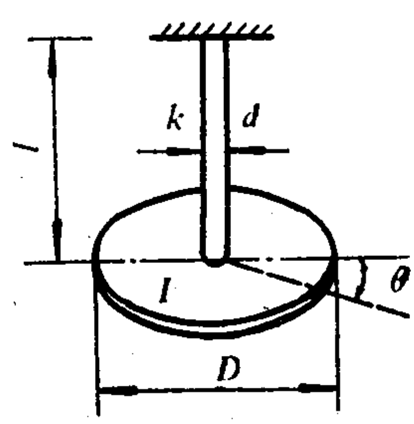

图 1-2

由振动微分方程.

设 θ 为圆盘偏离其静平衡位置的扭转角度，并规定向逆时针方向转动为正. 由刚体转动方程可得圆盘在水平面内作扭转自由振动的微分方程为

$$I\ddot{\theta}+k\theta=0.$$

此式可写成与式（1-1）相同的形式

$$\ddot{\theta}+\omega^2\theta=0, \tag{1-2}$$

式中 $\omega^2=k/I$.

例1-3 图 1-3 为一测振仪的示意图. 已知物体质量为 m，物体下端支持在刚度为 k_1 的弹簧上，上端与杠杆 AOB 的 B 点铰接，杠杆与外壳通过刚度为 k_2 的弹簧相连. 设杠杆对 O 点的转动惯量为 I_0，弹簧质量不计，系统平衡时，OB 在水平位置. 求此系统的运动微分方程.

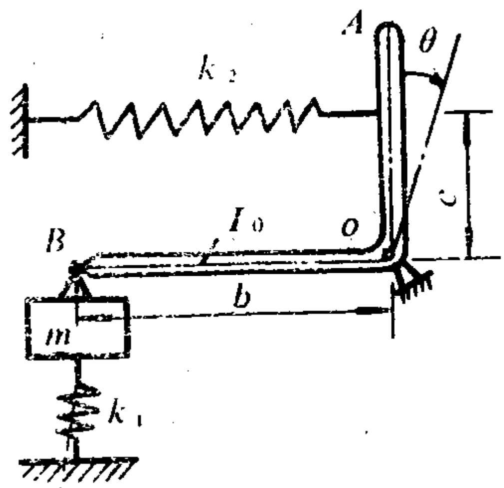

图 1-3

下面利用拉格朗日方程建立其运动微分方程. 若取转角 θ 为广义坐标，以系统的平衡位置为零势能点，则系统的动能和势能分别为

$$T=\frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m(b\dot{\theta})^2=\frac{1}{2}(I_0+mb^2)\dot{\theta}^2,$$

$$U=\frac{1}{2}k_1(b\theta)^2+\frac{1}{2}k_2(c\theta)^2.$$

将T和U代入拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0,$$

得系统的运动微分方程

$$(I_0+mb^2)\ddot{\theta}+(k_1b^2+k_2c^2)\theta=0$$

或

$$\ddot{\theta}+\omega^2\theta=0, \tag{1-3}$$

其中 $$\omega^2=\frac{k_1b^2+k_2c^2}{I_0+mb^2}.$$

从上述三个例子可以看出，对于不同的单自由度系统，可将它们的运动微分方程化为相同的形式。因此，以后我们就可把图 1-1 所示的弹簧-质量系统作为研究单自由度系统的力学模型。该力学模型的运动微分方程为（1-1）式

$$\ddot{x}+\omega^2x=0.$$

这是一个二阶常系数齐次线性微分方程，它的通解可写为

$$x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t, \tag{1-4a}$$

其中C_1、C_2由振体的初始条件决定。

将（1-4a）式对时间t求一阶导数，得振体的速度公式：

$$\dot{x}=-C_1\omega\sin\omega t+C_2\omega\cos\omega t. \tag{1-4b}$$

设$t=0$时，$x=x_0$，$\dot{x}=\dot{x}_0$，代入式(1-4a、b)，有

$$C_1=x_0,\quad C_2=\dot{x}_0/\omega.$$

将C_1和C_2代回（1-4a）式，得

$$x=x_0\cos\omega t+\frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t. \tag{1-5}$$

(1-1)式的通解也可写为相角形式

$$x=A\sin(\omega t+\alpha), \tag{1-6}$$

显然，其中

$$A=\sqrt{x_0^2+(\dot{x}_0/\omega)^2}\ ,\ \alpha=\mathrm{tg}^{-1}(\omega x_0/\dot{x}_0). \tag{1-7}$$

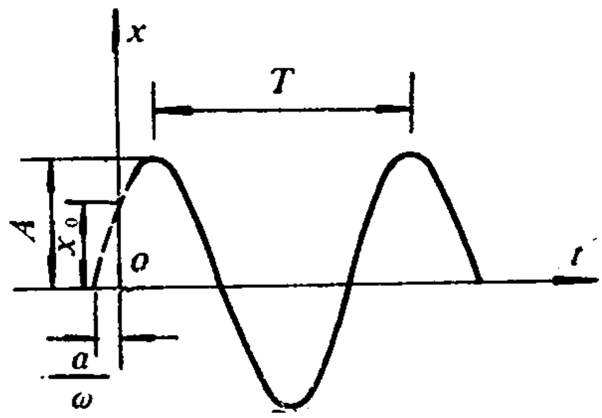

图 1-4

从式（1-6）可以看出，振体的无阻尼自由振动是简谐运动，振动中心在平衡位置，其运动图线如图 1-4 所示。振体离开平衡位置的最远距离 A 称为振幅，它反映振体振动的强弱。$(\omega t+\alpha)$ 称为相位角，α 称为初相位角。

自由振动的圆频率 ω 称为系统的固有频率，单位是 rad/s 或 1/s。对于弹簧质量系统，其固有频率

$$\omega=\sqrt{k/m}\ \ \mathrm{rad/s}.$$

可见，固有频率只取决于系统本身的物理参数，而与运动的初始条件无关。

振体每振动一次所需要的时间称为周期，用 T 表示，单位为秒(s)。每经过一个周期，相位角就增加 2π，故有

$$[\omega(t+T)+\alpha]-(\omega t+\alpha)=2\pi.$$

于是振体作自由振动的周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}\ \ \mathrm{s}. \tag{1-8}$$

振体在每秒内振动的次数称为振动频率，用 f 表示，单位为赫兹（Hz），

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \ \text{Hz}. \tag{1-9}$$

例1-4 图 1-5 为一升降机的简图。质量为 5100kg 的物体以 $v = 3\text{m/s}$ 的速度匀速下降，设钢索的刚度系数 $k = 4000$ kN/m，钢索自重不计。试求钢索上端突然被卡住时，物体的运动方程和钢索的最大张力。

解 在物体匀速下降的过程中，当钢索上端被卡住时，物体的惯性和钢索的弹性使系统作自由振动。系统的固有频率

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4000 \times 10^3}{5100}}$$

$$= 28 \ \text{s}^{-1}.$$

由运动的初始条件 $t = 0$，$x_0 = 0$，$\dot{x}_0 = 3\text{m/s}$，可求得振幅

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}} = \frac{300}{28} = 10.7\text{cm};$$

初相位角

$$\alpha = \text{tg}^{-1}\frac{x_0\omega}{\dot{x}_0} = 0.$$

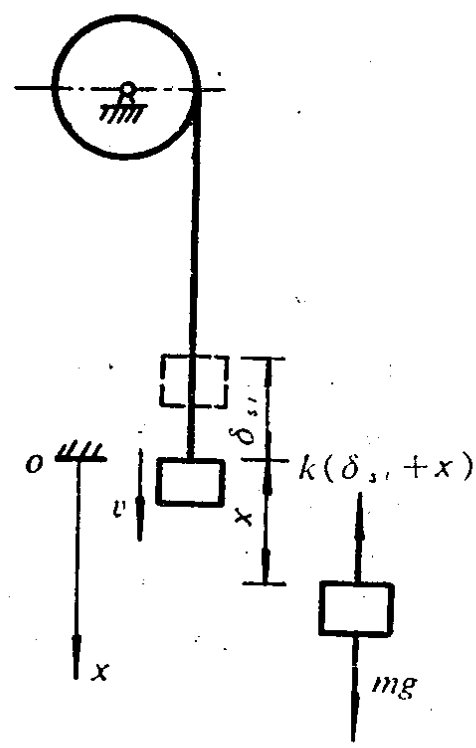

图 1-5

由式（1-6）得物体的自由振动方程为

$$x = 10.7\sin 28t\text{cm},$$

钢索的最大张力

$$F_{\max} = k(\delta_{st} + A) = k\left(\frac{mg}{k} + A\right)$$

$$= mg + kA \doteq 478000\text{N} = 478\text{kN}.$$

（二）固有频率的计算

在振动问题中，系统的固有频率是一个非常重要的参数，

单自由度系统的固有频率常用下列几种方法确定：

1. 系数法

建立系统的运动微分方程，并将其写为标准形式，如式(1-1)，则一次项的系数的平方根就是系统的固有频率。

2. 静变形法

对于图1-1(a)所示系统，如能测出在物体重力作用下弹簧的静变形 δ_{st}，则由 $k\delta_{st}=mg$ 可求得弹簧的刚度

$$k=mg/\delta_{st},$$

则固有频率

$$\omega=\sqrt{mg/\delta_{st}m}=\sqrt{g/\delta_{st}}\,. \tag{1-10}$$

例1-5 如图 1-6 所示，在长为 l 、弯曲刚度为 EJ 的简支梁的中点放有一重量为W的物体。梁的自重不计，试求该系统的固有频率。

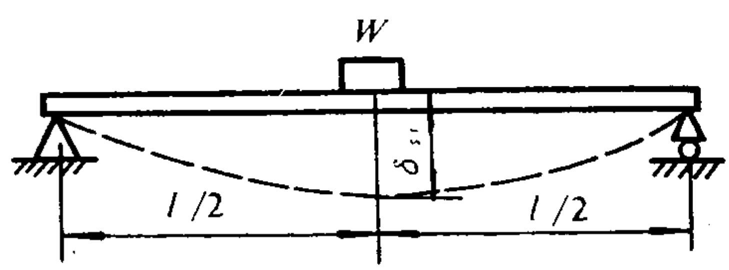

图 1-6

解 梁相当于一弹簧，重为W的物体相当于一振体，则该系统可简化为具有一个自由度的弹簧-质量系统。在载荷 W 的作用下，由材料力学的计算公式可知梁的静变形

$$\delta_{st}=\frac{Wl^3}{48EJ},$$

代入式（1-10）中，得系统的固有频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}=\sqrt{\frac{48gEJ}{Wl^3}}\,.$$

3. 能量法

对于一个保守系统，可利用机械能守恒定律计算其振动系统的固有频率。现仍以图 1-1(a) 所示系统为例来说明。

该系统在任一瞬时的位置坐标可按式（1-6）写出，为

$$x = A\sin(\omega t + \alpha);$$

速度为

$$\dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \alpha);$$

动能为

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \alpha);$$

取平衡位置为零势能点，则势能为

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \alpha).$$

当系统经过平衡位置时，系统的势能为零，而动能最大，即

$$T_{max} = \frac{1}{2}mA^2\omega^2.$$

当系统偏离平衡位置最远时，$x_{max} = A$，这时系统的势能为最大，即

$$U_{max} = \frac{1}{2}kA^2,$$

而这时系统的动能为零。

根据机械能守恒定律，得

$$T_{max} = U_{max}, \tag{1-11}$$

亦即

$$\frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2}kA^2.$$

由此得系统的固有频率

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

例1-6 如图 1-7 所示，有一质量为 m 的半圆柱体在水平面上作无滑动的来回滚动。如果圆柱体半径为 r，重心在 c 点，$oc=a$，对重心的回转半径为 ρ，求微小振动时的固有频率。

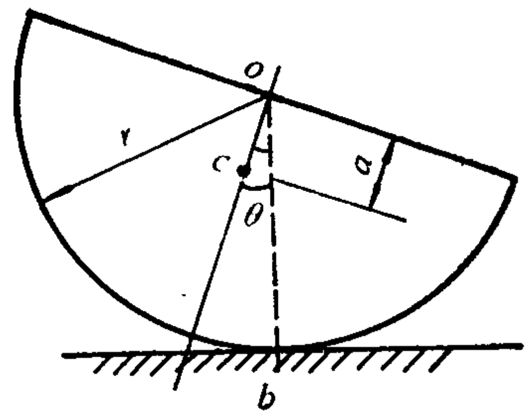

图 1-7

解 取角 θ 为广义坐标，则重心的升高为

$$\Delta = a(1-\cos\theta) = 2a\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

因半圆柱体是微小振动，θ 角很小，$\sin\frac{\theta}{2}\approx\frac{\theta}{2}$，故

$$\Delta\approx\frac{1}{2}a\theta^2.$$

取重心 c 的最低位置为零势能点，则系统势能为

$$U=mg\Delta=\frac{1}{2}mga\theta^2.$$

又因
$$I_b=I_c+m\overline{bc}^2=m\ (\rho^2+\overline{bc}^2),$$

其中 $\overline{bc}^2$ 按余弦定理为

$$\overline{bc}^2=a^2+r^2-2ar\cos\theta,$$

当 θ 很小时，$\cos\theta\approx1$，
故

$$I_b\approx m[\rho^2+(r-a)^2].$$

因此，系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}I_b\dot{\theta}^2\approx\frac{1}{2}m[\rho^2+(r-a)^2]\dot{\theta}^2.$$

振体经过平衡位置和偏离平衡位置最远时的总机械能分别为

$$T_{\max}=\frac{1}{2}m[\rho^2+(r-a)^2]\omega^2\theta^2{}_{\max}$$