CAILIAOLIXUE XITIJINGXUANJINGJIE

材料力学
习题精选精解

范 磷 编著

同济大学出版社

同济大学力学辅导系列丛书

材料力学习题
精选精解

范　磷　编著

同济大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

材料力学习题精选精解/范磷编著.—上海:同济大学出版社,2001.11

ISBN 7-5608-2298-3

Ⅰ.材… Ⅱ.范… Ⅲ.材料力学-高等学校-解题 Ⅳ.TB301-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 039978 号

材料力学习题精选精解

作　者　范　磷　编著

责任编辑　解明芳　责任校对　郁　峰　装帧设计　潘向蓁

出版 发行	同济大学出版社
	(上海四平路 1239 号　邮编 200092　电话 021-65985622)
经　销	全国各地新华书店
印　刷	江苏句容排印厂印刷
开　本	850mm×1168mm　1/32
印　张	9.125
字　数	264 000
版　次	2001 年 11 月第 1 版　2001 年 11 月第 1 次印刷
书　号	ISBN 7-5608-2298-3/O·196
定　价	14.00 元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换

内 容 提 要

本书根据国内外《材料力学》书中的三千多道习题，从中精选出285道习题编写而成，并全部给出解答。

本书所选习题覆盖材料力学课程的基本内容和要求。全书共分十二章，内容包括：轴向拉伸(压缩)、剪切、扭转、弯曲内力、弯曲应力、弯曲变形、应力和应变分析与强度理论、组合应力、能量法、静不定系统、动荷载、压杆稳定。为适应不同的教学需要，书中除基本题外，还选择了相当部分难度较高的习题。

本书可作为高等院校的机械、土木、水利、航空、船舶、汽车等专业的大学本科、专科学生和研究生的参考书，也可作为有关教师和工程技术人员的参考书。

前　言

材料力学是理工科高等院校机械、土木、水利、航空、船舶、汽车等工程专业必修的技术基础课程，也是固体力学专业中学习结构力学、弹塑性力学的先修课程。

目前，多数专业为材料力学安排的时数远远低于1980年部颁大纲规定的120学时，有的甚至只有原来的一半学时。原定的习题指导课由于课时紧，不得不压缩，以至于取消。因此，学生普遍感到解答习题困难，从而不能保证这门课程的教学质量。

本书根据国内外《材料力学》书中的三千多道习题，从中精选出285道习题编写而成，并全部给出解答。本书所选习题覆盖材料力学课程的基本内容和要求。为适应不同的教学需要，书中除基本题外，还有相当部分难度较高的习题。这些习题具有普遍性、典型性和新颖性。学生通过学习这些习题解答，不但对掌握本课程的基本知识与方法会有所帮助，而且对分析问题与解决问题的能力亦会有所提高。学生一定会通过学习这些习题解答，触类旁通，举一反三。

在编写本书的过程中，得到了上海交通大学金忠谋教授的鼓励和帮助。金老师在几十年“材料力学”的教学生涯中，成绩卓然，是力学教师的楷模。华东理工大学陈维新教授审阅了全稿，并积极将该书推荐给他七十年前的母校——同济大学——出版。两位年轻的力学老师——李彤、杨燕勤女士为本书提出了宝贵的意见。在出版本书的过程中，得到了同济大学出版社责任编辑解明芳老师热情负责的支持和帮助。对此谨表示衷心的感谢。

范　磷

2000年12月

目　　录

第一章　轴向拉伸与压缩

一、内容提要

1. 材料力学研究的对象是变形体，它认为受力物体是变形的，处于受力平衡状态的物体是变形的，变形的大小与受力的大小有关。用截面法显示内力，通过静力平衡方程式计算内力，变形体受力的大小是以内力的大小来定义。

2. 轴向拉伸时，轴力的指向离开截面，轴力定为正值。轴向压缩时，轴力的指向向着截面，轴力定为负值。表示轴力沿杆件长度变化的图线称为轴力图，通常将轴力图画在杆的一侧。

3. 轴向拉压时，正应力计算公式如下：

$$\sigma=\frac{N}{A}\leqslant[\sigma]$$

强度计算问题有三种基本类型：① 校核强度；② 设计截面；③ 确定许用荷载。

4. 轴向变形根据胡克定律计算：

$$\Delta L=\frac{NL}{EA}$$

$$\varepsilon=\frac{\Delta L}{L}=\frac{1}{E}\times\frac{N}{A}=\frac{\sigma}{E}\quad 即\quad \sigma=E\varepsilon$$

轴向应变 ε 与横向应变 ε' 的关系为

$$\varepsilon'=-\mu\varepsilon$$

对于内力 $N(x)$ 或截面 $A(x)$ 沿杆曲线 x 变化的拉、压杆件，

其轴向变形应分段计算后再求代数和，或按积分计算：

$$\Delta l = \int_l \frac{N(x)\mathrm{d}x}{EA(x)}$$

5. 轴向拉(压) 杆内的应变能计算公式如下：

$$u = \frac{1}{2}P\Delta L = \frac{P^2 L}{2EA}$$

比能 $$u = \frac{U}{V} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{E\varepsilon^2}{2}$$

6. 拉(压) 静不定问题

(1) 列出静力平衡方程式(含未知多余约束力)；

(2) 建立变形协调方程(几何条件)；

(3) 根据物理条件，将杆件变形用荷载及未知约束力表示，得到补充方程，与平衡方程式联立求解。

结合装配应力、温度应力等工程问题，拉(压) 静不定是本章的重点与难点。

二、习题

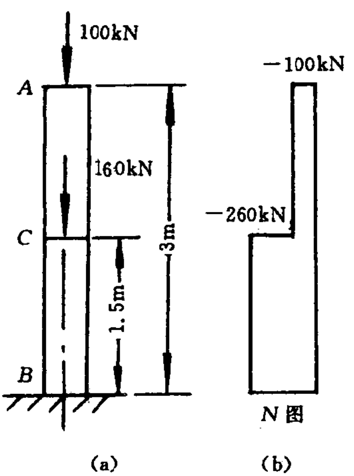
1-1 一木柱受力如图示，柱的横截面为边长 20cm 的正方形，材料服从胡克定律，其弹性模量 $E = 10\text{GPa}$，如不计柱的自重，试求：

(1) 作轴力图；

(2) 各段柱横截面上的应力；

(3) 各段柱的纵向线应变；

(4) 柱的总变形。



题 1-1 图

解 这是基本题。

(1) N 图如图(b) 所示。

(2) AC 段应力：$\sigma_1 = \dfrac{-100}{20 \times 20} = -2.5(\text{MPa})$

CB 段应力：$\sigma_2 = \dfrac{-260}{20 \times 20} = -6.5(\text{MPa})$

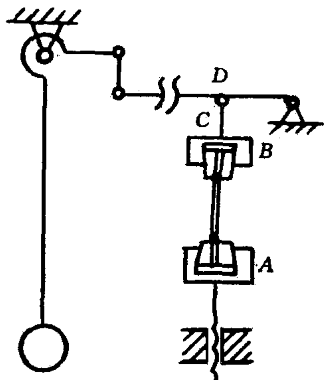
(3) AC 段线应变：$\varepsilon_1 = \dfrac{\sigma_1}{E} = \dfrac{-2.5}{10 \times 10^3} = -2.5 \times 10^{-6}$

CB 段线应变：$\varepsilon_2 = \dfrac{\sigma_2}{E} = \dfrac{-6.5}{10 \times 10^3} = -6.5 \times 10^{-6}$

(4) 柱的总变形：

$$\begin{aligned}\Delta_{AB} &= \Delta_1 + \Delta_2 = \varepsilon_1 l_1 + \varepsilon_2 l_2 \\ &= -2.5 \times 10^{-6} \times 1.5 - 6.5 \times 10^{-6} \times 1.5 \\ &= -1.35 \times 10^{-5}(\text{m})\end{aligned}$$

1-2　某拉伸试验机的结构示意图如图所示。设试验机的杆 CD 与试件 AB 材料同为低碳钢，其 $\sigma_p = 200\text{MPa}$，$\sigma_s = 240\text{MPa}$，$\sigma_b = 400\text{MPa}$，试验机最大拉力为 100kN。试问：



题 1-2 图

(1) 用这一试验机作拉断试验时，试样直径最大可达多大？

(2) 若设计时取试验机的安全系数 $n = 2$，则杆 CD 的横截面面积为多少？

(3) 若试样直径 $d = 10\text{mm}$，今欲测弹性模量 E，则所加荷载最大不能超过多少？

解　这是基本题。

(1) $\sigma_b A \leqslant 100 \times 10^3$

$$400 \times 10^6 \times \frac{\pi}{4} d^2 \leqslant 100 \times 10^3$$

$d \leqslant 0.0178\text{m}$，$d_{max} = 17.8\text{mm}$

(2) $\dfrac{N_{CD}}{A_{CD}} \leqslant [\sigma] = \dfrac{240 \times 10^6}{2}$

$$A_{CD} \geqslant \frac{N_{CD} \times 2}{240 \times 10^6} = \frac{100 \times 10^3 \times 2}{240 \times 10^6}$$

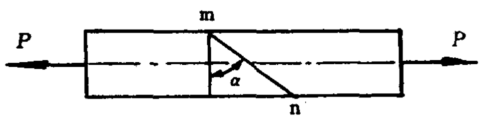
$$= 833 \times 10^{-6}\text{m}^2 = 833(\text{mm}^2)$$

(3) 在测弹性模量 E 时，应力取 σ_p 值计算：

$$P = \sigma_p A = 200 \times 10^6 \times \frac{\pi}{4} \times 1^2 \times 10^{-4}$$

$$= 15.7 \times 10^3 = 15.7(\text{kN})$$

1-3　图示拉杆沿斜截面 m—n 由两部分胶合而成，设在胶合面上许用拉应力 $[\sigma] = 100\text{MPa}$，许用剪应力 $[\tau] = 50\text{MPa}$。并设胶合面的强度控制杆件的拉力，试问：为使杆件承受最大拉力 P，α 角的值应为多少？若横截面面积为 4cm^2，并规定 $\alpha \leqslant 60°$，试确定许可荷载 P。



题 1-3 图

解
$$\sigma_\alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha \leqslant [\sigma]$$

$$\frac{P}{A}\cos^2 \alpha \leqslant [\sigma]$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_0}{2}\sin 2\alpha \leqslant [\tau]$$

$$\frac{P}{2A}\sin 2\alpha \leqslant [\tau]$$

得
$$P \leqslant \frac{A[\sigma]}{\cos^2\alpha} \quad 且 \quad P \leqslant \frac{2A[\tau]}{\sin 2\alpha}$$

所以 $$\frac{100\times4\times10^{-4}}{\cos^2\alpha_0}=\frac{2\times50\times4\times10^{-4}}{\sin2\alpha_0}$$

$$\tan\alpha_0=\frac{1}{2}\alpha_0=26.6^\circ$$

$$P\leqslant\frac{100\times10^6\times4\times10^4}{\cos^2 26.6^\circ}=50\times10^3\text{N}=50(\text{kN})$$

当 $\alpha=26.6^\circ$ 时，$P_{\max}=50\text{kN}$

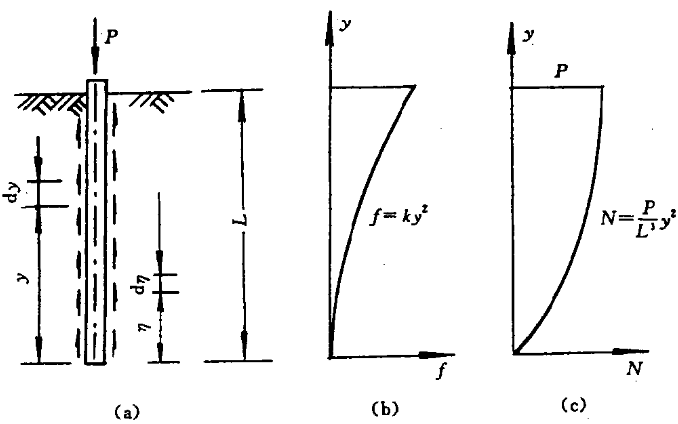
当 $\alpha=60^\circ$ 时，$P\leqslant\dfrac{100\times10^6\times4\times10^4}{\cos^2 60^\circ}=46.2(\text{kN})$

1-4　一等截面木桩，打进土深 L，在桩顶有轴向荷载 P 作用，这个荷载完全由沿桩侧面的摩擦力 f（单位为 kN/m，m 为沿桩长量度）来抵抗。摩擦力大小以图示的抛物线方程式变化（忽略桩身自重）。试求：

(1) 桩承受的轴向力分布规律并画出沿桩的轴力图；

(2) 桩的压缩量。

设 $L=10\text{m}$，$P=400\text{kN}$，$A=7000\text{mm}^2$，$E=10\text{GPa}$。



题 1-4 图

解　全桩上的摩擦力　$P = \int_0^L \mathrm{d}P = \int_0^L ky^2\mathrm{d}y = \frac{k}{3}L^3$

得
$$k = \frac{3P}{L^3}$$

在 y 处取 $\mathrm{d}y$ 段，周边上的摩擦力为 $\mathrm{d}F$

$$\mathrm{d}F = f\mathrm{d}y = ky^2\mathrm{d}y$$

y 段木桩上的摩擦力

$$F = \int_0^y \mathrm{d}F = \int_0^y ky^2\mathrm{d}y = \frac{k}{3}y^3 = \frac{P}{L^3}y^3$$

F 即是 y 处横截面上的轴力，作轴力如图(c) 所示。

(2) $\mathrm{d}y$ 段上的压缩量

$$\mathrm{d}\Delta L = \frac{F\mathrm{d}y}{EA} = \frac{Py^3}{EAL^3}\mathrm{d}y$$

全桩的压缩量：

$$\Delta L = \int_0^L \mathrm{d}\Delta L = \int_0^L \frac{Py^3}{EAL^3}\mathrm{d}y = \frac{PL}{4EA}$$

$$= \frac{400\times 10^3 \times 10 \times 10^3}{4\times 10\times 10^3 \times 7\times 10^4}$$

$$= 1.43(\mathrm{mm})$$

1-5　图示支架中，设拉杆 DE 的长为 2m，横截面直径为 15mm，$E = 210\mathrm{GPa}$。若 ADB 和 AEC 两杆可以看作是刚体，$P = 20\mathrm{kN}$，试求 P 力作用点 A 的垂直位移和 C 点的水平位移。

解　在材料力学中，求指定点的位移往往比较困难。

(1) 求支座反力

$$R_B = R_C = \frac{P}{2}$$

$$l_{BC} = 2 \times 4\tan\frac{45^\circ}{2}$$

$$= 3.3173(\text{m})$$

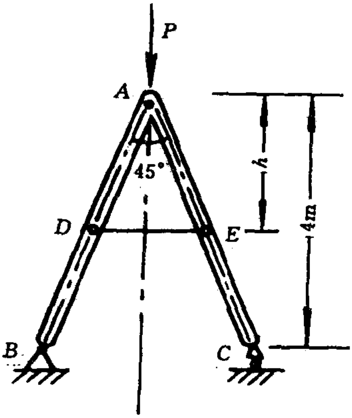
$$h = 4\frac{l_{DE}}{l_{BC}} = 4 \times \frac{2}{3.3137}$$

$$= 2.4142(\text{m})$$

由 BDA 杆的平衡条件：

$$R_B\frac{l_{BC}}{2} = Nh$$

$$N = \frac{3.3137}{2.4142 \times 2} \times \frac{20}{2} = 6.8629\text{kN}$$



题 1-5 图

$$\frac{1}{2}P\Delta_A = \frac{N^2 l}{2EA}$$

$$\Delta_A = \frac{N^2 l}{EAP} = \frac{6.829^2 \times 2}{210 \times 10^6 \times \frac{\pi}{4} \times 15^2 \times 10^{-6} \times 20}$$

$$= 0.1269 \times 10^{-3}\text{m} = 0.1269(\text{m})$$

在小变形的条件下，A,E,C 三点之间距离不变：

$$\frac{\Delta l_{DE}}{\Delta_H} = \frac{h}{4}$$

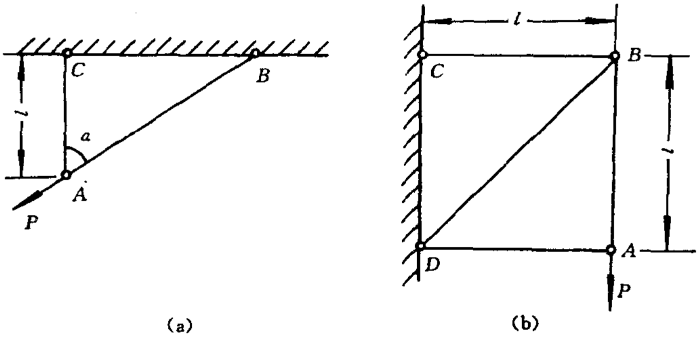
$$\Delta l_{DE} = \frac{Nl}{EA} = \frac{6.8629 \times 2}{210 \times\times 10^6 \times \frac{\pi}{4} \times 15^2 \times 10^{-6}}$$

$$= 0.3699(\text{mm})$$

C 点水平位移 $\Delta_H = \dfrac{0.3699 \times 4}{2.4142} = 0.6129 \approx 0.613(\text{mm})$

1-6　求下列各简单结构中节点 A 的位移，设各杆的抗拉

（压）刚度均为 EA。



题 1-6 图

解　（1）AC 杆内力为零，故 A 点沿 P 方向移动。

$$AB\text{ 杆变形：}\Delta l_{AB} = \frac{P\dfrac{l}{\cos\alpha}}{EA} = \frac{Pl}{EA\cos\alpha}$$

$$\Delta_A = \frac{\Delta l_{AB}}{\sin\alpha} = \frac{2Pl}{EA\sin 2\alpha}$$

（2）AD 杆内力为零，故

$$N_{AB} = N_{BC} = P, N_{BD} = -\sqrt{2}P$$

$$\Delta_{BC} = \frac{Pl}{EA}$$

$$\Delta_{BD} = \frac{-\sqrt{2}P \times \sqrt{2}l}{EA} = \frac{-2Pl}{EA}$$

B 点的垂直位移分量：

$$\Delta_{yB} = \Delta_{BD}\sin 45^\circ + (\Delta_{BC} + \Delta_{BD}\cos 45^\circ)\cot 45^\circ$$

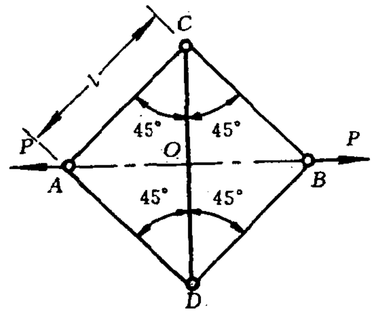
$$= -(1 + 2\sqrt{2})\frac{Pl}{EA}$$

A 点只有垂直位移：

$$\Delta_{yA}=\Delta_{yB}+\Delta_{AB}=-(2+2\sqrt{2})\frac{Pl}{EA}$$

$$=-4.828\frac{Pl}{EA}$$

1-7　图示为一简单桁架，各杆的截面积均为 A，材料的弹性模量均为 E。在荷载 P 的作用下，求节点 A,B 之间的相对位移 Δ_{AB}。



题 1-7 图

解　用变形能方法。

(1) 求杆内力

$$N_{AD}=N_{BD}=N_{BC}=N_{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}P$$

$$N_{DC}=-P$$

(2) 求位移

$$\frac{1}{2}P\Delta_{AB}=4\frac{N_{AD}^2 l}{2EA}+\frac{\sqrt{2}lN_{DC}^2}{2EA}$$

$$\frac{1}{2}P\Delta_{AB}=\frac{P^2 l}{EA}+\frac{\sqrt{2}P^2 l}{2EA}$$

$$\Delta_{AB}=(2+\sqrt{2})\frac{Pl}{EA}$$

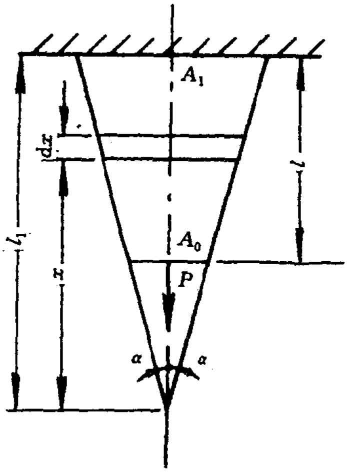
1-8　一根圆台形杆件，两端横截面的面积分别为 A_0 和 A_1，假设杆的长度 l 远大于杆的横向尺寸。在 P 力作用下，试求：

(1) 杆的伸长 Δl；

(2) 杆内的应变能。

解　(1) 设坐标如图所示：

$$A(x)=\frac{A_1 x^2}{l_1^2}$$



题 1-8 图

$$d(\Delta l) = \frac{P\,dx}{EA(x)}$$

$$\Delta l = \int_{l_1-l}^{l_1} \frac{P\,dx}{EA(x)}$$

$$= \int_{l_1-l}^{l_1} \frac{Pl_1^2}{EA_1x^2}dx$$

$$= \frac{Pll_1}{(l_1-l)EA_1}$$

当 $x = l_1 - l$ 时，$A = A_0$

$$A_0 = A_1\frac{(l_1-l)^2}{l_1^2}$$

所以
$$\frac{l_1}{l_1-l} = \sqrt{\frac{A_1}{A_0}}$$

得到
$$\Delta l = \frac{Pl}{E\sqrt{A_1A_0}}$$

(2) $U = \frac{1}{2}P\Delta l = \frac{P^2l}{2E\sqrt{A_0A_1}}$

1-9　在图示杆系中，节点 B 处承受铅直荷载 P，斜杆 AB 的长度为 l_1，水平杆的长度为 l_2，两杆的材料相同，且抗拉和抗压许用应力相等，同为$[\sigma]$，求为使杆系具有最小重量时的 θ 角。

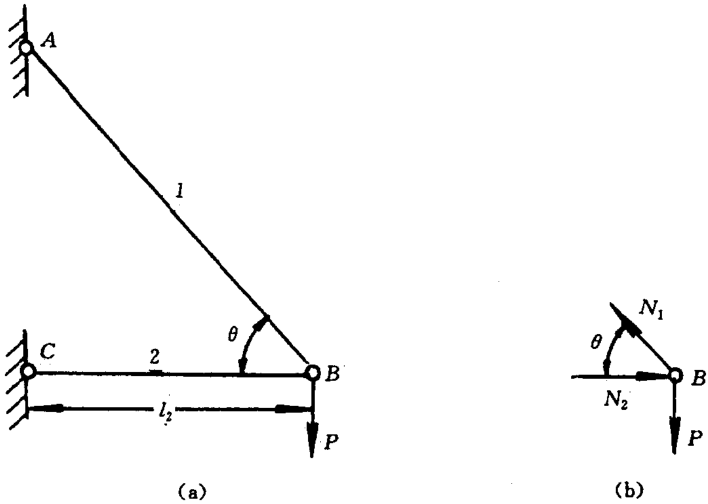
解　这是一道简单的结构优化题目。

(1) 先求内力，由平衡条件：

$$\sum Y=0,\ N_1\sin\theta=P$$

$$\sum X=0,\ N_1\cos\theta=N_2$$

得
$$N_1=\frac{P}{\sin\theta}$$



题 1-9 图

$$N_2=\frac{P\cos\theta}{\sin\theta}$$

(2) 若使两杆的应力均达到材料的许用应力值$[\sigma]$，则有

$$\frac{N}{A}=[\sigma]$$

$$A_1=\frac{P}{[\sigma]\sin\theta},\ A_2=\frac{P\cos\theta}{[\sigma]\sin\theta}$$

斜杆 AB 的长度为

$$l_1=\frac{l_2}{\cos\theta}$$

结构的重量为最轻，即结构所用材料的体积 V 为最小。

$$V=l_1A_1+l_2A_2=\frac{Pl}{[\sigma]}\left(\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

若 V 最小，则应有$\frac{dV}{d\theta}=0$