

高等数学教程

第三卷 第三分册

В. И. 斯米尔诺夫著

叶 彦 谦 译



人 民 教 育 出 版 社

013

6-1

高等数学教程

第三卷 第三分册

B. И. 斯米尔诺夫著

叶彦谦译

人民教育出版社

本书系根据苏联国立技术理论书籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的斯米尔诺夫(В. И. Смирнов)著“高等数学教程”(Курс высшей математики)第三卷1951年第五版译出。

本书(第三卷)中译本分三册出版。

本册可作为综合大学和师范学院数学类、物理类各专业的参考书。也可供高等工业院校有关专业参考。

简装本说明

目前850×1168毫米规格纸张较少,本书暂以787×1092毫米规格纸张印刷,定价相应减少20%。希鉴谅。

高等数学教程

第三卷 第三分册

В. И. 斯米尔诺夫著

叶彦谦译

人民教育出版社出版(北京沙滩后街)

重庆新华印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号13012·0334 开本787×1092 1/32 印张11 6/16
字数335,000 印数32,501—112,500 定价(6)¥0.88

1953年10月商务初版(共印31,000册)

1957年1月新1版 1979年7月重庆第11次印刷

第三分冊目次

第四章 多變數函數和方陣函數..... 1

81. 正則多變數函數(1) 82. 二重積分和勾澤公式(1) 83. 冪級數(4)
84. 解析延拓(10) 85. 方陣函數、預備知識(11) 86. 一個方陣的冪級數
(13) 87. 冪級數的乘法、冪級數的反演(16) 88. 收斂性的深入研究(19) 89.
插值多項式(23) 90. 開雷恒等式和錫爾維斯脫公式(26) 91. 解析延拓
(28) 92. 多值函數的例子(31) 93. 係數為常數的線性方程組(33) 94. 幾
個方陣的函數(38)

第五章 線性微分方程.....42

95. 解的冪級數展開式(42) 96. 解的解析延拓(46) 97. 奇異點的鄰域(47)
98. 正則奇異點(52) 99. 富克斯型的微分方程(60) 100. 高斯方程(63)
101. 超越幾何級數(65) 102. 勒上特多項式(71) 103. 夏可皮多項式(77)
104. 保角變換與高斯方程(82) 105. 非正則奇異點(86) 106. 漸近展開式
(89) 107. 拉普拉斯變換(92) 108. 解的不同選取法(94) 109. 解的漸近
表示式(98) 110. 不同結果的比較(104) 111. 貝塞爾方程(105) 112. 漢
開爾函數(109) 113. 貝塞爾函數(114) 114. 在更一般場合中的拉普拉斯變
換(116) 115. 廣義拉查爾多項式(116) 116. 參數的正值(121) 117.
高斯方程的退化(123) 118. 係數為週期函數的微分方程(125) 119. 係數
為解析函數的情形(131) 120. 線性微分方程組(132) 121. 正則奇異點
(134) 122. 正則方程組(137) 123. 解在奇異點鄰域中的表示(142) 124.
歸範解(144) 125. 與富克斯類型的正則解的關係(147) 126. 方陣 U 為
任意的場合(148) 127. 非正則奇異點鄰近的展開式(151) 128. 一致收斂級
數展開(158)

第六章 特殊函數..... 164

I. 球函數..... 164

129. 球函數的定義(164) 130. 球函數的顯式(166) 131. 正交性(170)
132. 勒上特多項式(174) 133. 按照球函數展開(179) 134. 收斂性的證
明(182) 135. 球函數和邊值問題的關係(184) 136. 狄義赫利問題和諾伊
曼問題(186) 137. 質體的勢函數(188) 138. 球殼的勢函數(190) 139. 中
心電場中的電子(193) 140. 球函數和旋轉羣的線性表示(195) 141. 勒上

特函數(197) 142. 第二類勒上特函數(199)

II. 貝塞爾函數..... 203

143. 貝塞爾函數的定義(203) 144. 諸貝塞爾函數間之關係(205) 145. 貝塞爾函數的正交性和他們的零點(208) 146. 母函數和積分表示(213) 147. 福里哀貝塞爾公式(217) 148. 漢開爾函數和諾伊曼函數(218) 149. 足跡爲整數的諾伊曼函數的展開式(223) 150. 變數爲純虛數的場合(225) 151. 積分表示(227) 152. 漸近展開式(229) 153. 貝塞爾函數和拉普拉斯方程(237) 154. 圓柱坐標下的波動方程(239) 155. 球坐標下的波動方程(242)

III. 埃爾密脫多項式和拉蓋爾多項式..... 245

156. 線振子與埃爾密脫多項式(245) 157. 正交性質(248) 158. 母函數(250) 159. 拋物線坐標與埃爾密脫函數(252) 160. 勒蓋爾多項式(254) 161. 埃爾密脫多項式與勒蓋爾多項式間的關係(257) 162. 埃爾密脫多項式的漸近表示(258) 163. 勒上特多項式的漸近表示(260)

VI. 橢圓積分和橢圓函數..... 263

164. 化橢圓積分爲歸範形式(263) 165. 化橢圓積分爲勒上特形式(267) 166. 例題(271) 167. 橢圓積分的反演(273) 168. 橢圓函數的一般性質(276) 169. 基本輔助定理(281) 170. 維爾斯特拉斯函數(282) 171. $\wp(u)$ 所滿足的微分方程(287) 172. 函數 $\sigma_k(u)$ (290) 173. 週期整函數的展開式(293) 174. 新的記號(294) 175. 函數 $\theta_1(v)$ (296) 176. 函數 $\theta_2(v)$ (299) 177. θ 函數的性質(302) 178. 用 θ_s 表示 e_k (305) 179. 夏可皮的橢圓函數(307) 180. 夏可皮函數的基本性質(310) 181. 夏可皮函數所滿足的微分方程(311) 182. 加法公式(313) 183. 函數 $\wp(u)$ 和 $\text{sn}(u)$ 之間的關係(314) 184. 橢圓坐標(316) 185. 橢圓函數的導入(318) 186. 來梅方程(320) 187. 單擺(321) 188. 保角變換的例子(323)

附錄 方陣的歸範形式..... 325

189. 預備知識(325) 190. 特徵方程有單根的情形(330) 191. 特徵方程有重根時的第一個變換步驟(332) 192. 化方陣爲歸範形式(336) 193. 決定歸範形式的構造(342) 194. 例題(345)

名詞對照表(一)..... 352

名詞對照表(二)..... 355

第四章 多變數函數和方陣函數

81. 正則多變數函數 就基本概念而論，多變數的解析函數論和單變數函數論很是相似。但是進一步發展下去，他就有了一些特異之點。在這一章裏我們祇說些基本概念，並且對多變數的冪級數作較詳細的研究。爲簡單計，我們祇看兩個自變數的情形。當自變數多於兩個時，所有的定義和證明完全有效。

假設 z_1 和 z_2 是兩個複變數，

$$(1) \quad f(z_1, z_2)$$

是這兩個變數的函數。假設變數 z_1 在一區域 B_1 中變動，變數 z_2 在一區域 B_2 中變動。如果函數(1)是 z_1 和 z_2 的單值連續函數，並且對於在上述區域中的自變數的任何值，比率

$$\frac{f(z_1 + \Delta z_1, z_2) - f(z_1, z_2)}{\Delta z_1} \quad \text{和} \quad \frac{f(z_1, z_2 + \Delta z_2) - f(z_1, z_2)}{\Delta z_2}$$

當複改變量 Δz_1 和 Δz_2 趨於零時常有一定的極限，則稱函數(1)爲 z_1 和 z_2 在區域 B_1 和 B_2 中的正則函數或全純函數。這兩比率的極限即函數(1)關於 z_1 和 z_2 的偏導數：

$$\frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_1} \quad \text{和} \quad \frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_2}.$$

82. 二重積分和勾犀公式 假設 l_1 和 l_2 依次爲區域 B_1 和 B_2 中的兩條線路。將函數 $f(z_1, z_2)$ 先沿 l_1 作路積分，再沿 l_2 作路積分，即得二重積分

$$I_1 = \int_{l_1} dz_2 \int_{l_2} f(z_1, z_2) dz_1.$$

如果交換積分的次序，則可得另一二重積分：

$$I_2 = \int_{l_1} dz_1 \int_{l_1} f(z_1, z_2) dz_2.$$

首先，我們證明 I_1 和 I_2 相等。假設曲線 l_1 的參數方程為

$$z_1(t) = x_1(t) + iy_1(t), \quad (a \leq t \leq b)$$

曲線 l_2 的參數方程為

$$z_2(\tau) = x_2(\tau) + iy_2(\tau). \quad (c \leq \tau \leq d)$$

以

$$z_1 = z_1(t) \text{ 和 } z_2 = z_2(\tau)$$

代入函數 $f(z_1, z_2)$ 中，可以把積分 I_1 變成一個關於兩變數 t 和 τ 的二重積分，其中第一次關於 t 的積分以常數 a 和 b 為積分限。第二次關於 τ 的積分以常數 c 和 d 為積分限。

$$I_1 = \int_c^d [x_2'(\tau) + iy_2'(\tau)] d\tau \int_a^b f[z_1(t), z_2(\tau)] [x_1'(t) + iy_1'(t)] dt.$$

這積分顯然就相當於在 (t, τ) 平面上的長方形

$$a \leq t \leq b; \quad c \leq \tau \leq d$$

中的二重積分。故由 [II, 78] 可以不變積分的極限而將次序交換，即 I_1 可改寫為：

$$I_1 = \int_a^b [x_1'(t) + iy_1'(t)] dt \int_c^d f[z_1(t), z_2(\tau)] [x_2'(\tau) + iy_2'(\tau)] d\tau,$$

而這積分顯然就相當於積分 I_2 ，因此知道 I_1 和 I_2 相等。他們的共同數值稱為函數 $f(z_1, z_2)$ 沿線路 l_1 和 l_2 的二重積分。

我們也可以直接用和的極限來定義二重積分。以分點

$$z_1^{(0)}, z_1^{(1)}, z_1^{(2)}, \dots, z_1^{(m)}$$

將曲線 l_1 分成 m 段，又以分點

$$z_2^{(0)}, z_2^{(1)}, z_2^{(2)}, \dots, z_2^{(n)}$$

將曲線 l_2 分成 n 段。再作二重和

$$\sum_{p=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{n-1} f(\xi_1^{(p)}, \xi_2^{(q)}) (z_1^{(p+1)} - z_1^{(p)}) (z_2^{(q+1)} - z_2^{(q)}),$$

其中 $\xi_1^{(p)}$ 是曲線 l_1 上弧 $z_1^{(p)} z_1^{(p+1)}$ 中的一點， $\xi_2^{(q)}$ 是曲線 l_2 上弧 $z_2^{(q)} z_2^{(q+1)}$

中的一點。當兩曲線上的分點無限增多，並且諸小段的弧長都趨於零時，上記二重和的極限即二重積分 I_1 或 I_2 。

假設 l_1 和 l_2 是兩條簡單閉線路，其所圍之區域為 B_1 和 B_2 。又設函數 $f(z_1, z_2)$ 在閉區域 B_1 和 B_2 中為正則，就是說，這函數在兩個更大一些的，包含 B_1 和 B_2 以及他們的境界線在其內部的區域中為正則。考察二重積分

$$I = \int_{l_1} dz'_1 \int_{l_2} \frac{f(z'_1, z'_2)}{(z'_1 - z_1)(z'_2 - z_2)} dz'_2$$

或

$$I = \int_{l_2} dz'_2 \int_{l_1} \frac{f(z'_1, z'_2)}{(z'_1 - z_1)(z'_2 - z_2)} dz'_1,$$

其中 z_1 和 z_2 是 B_1 和 B_2 內部的兩個定點。

當先沿線路 l_2 積分時 z'_1 可視為一參數，表示 l_1 上一定點。這時 $f(z'_1, z'_2)$ 是一個複變數 z'_2 的函數，他在閉區域 B_2 中為正則。故應用通常的勾犀公式可得

$$I = 2\pi i \int_{l_1} \frac{f(z'_1, z_2)}{z'_1 - z_1} dz'_1。$$

這時 $f(z'_1, z_2)$ 是 z'_1 在閉區域 B_1 中的正則函數了。再用一次勾犀公式即得

$$I = -4\pi^2 f(z_1, z_2),$$

因此得到和勾犀公式類似的公式：

$$(2) \quad f(z_1, z_2) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{l_1} dz'_1 \int_{l_2} \frac{f(z'_1, z'_2)}{(z'_1 - z_1)(z'_2 - z_2)} dz'_2。$$

變數 z_1 和 z_2 在積分符號之內以參數的形式出現。關於這些參數微分後，可知 $f(z_1, z_2)$ 有任何階的導數，並且這些導數可以表示為二重積分的形式：

$$(3) \quad \frac{\partial^{p+q} f(z_1, z_2)}{\partial z_1^p \partial z_2^q} = -\frac{p! q!}{4\pi^2} \int_{l_1} dz'_1 \int_{l_2} \frac{f(z'_1, z'_2)}{(z'_1 - z_1)^{p+1} (z'_2 - z_2)^{q+1}} dz'_2。$$

所有以上的論斷和結果很容易推廣到含有兩個以上的自變數的

函數去。

和單變數函數的情形一樣，由勾犀公式可以導出模數原理：若函數 $f(z_1, z_2)$ 在閉區域 B_1 和 B_2 中爲正則，又當 z'_1 在 l_1 上， z'_2 在 l_2 上時 $|f(z'_1, z'_2)| \leq M$ ，則對閉區域 B_1 和 B_2 中的任意兩點 z_1 和 z_2 ，常有 $|f(z_1, z_2)| \leq M$ 。

完全和單變數函數的情形一樣，可證維爾史特拉斯定理成立：若級數

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z_1, z_2)$$

的項都是閉區域 B_1 和 B_2 中的正則函數，並且級數在這兩區域中一致收斂，則其和爲兩區域內部的正則函數，且當 z_1 和 z_2 爲 B_1 和 B_2 的內點時，級數可以關於 z_1 和 z_2 逐項微分任何次之多。微分後所得到的級數在 B_1 和 B_2 內部的任意閉區域 B'_1 和 B'_2 中爲一致收斂。所有以上的論斷和結果不難推廣到含有兩個以上的自變數的函數去。我們以下專來研究冪級數。

83. 冪級數 含兩個自變數 z_1 和 z_2 且以 b_1 和 b_2 爲中心的冪級數具有如下的形式：

$$(4) \quad \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a_{pq} (z_1 - b_1)^p (z_2 - b_2)^q,$$

其中 p 和 q 互相獨立各自從零開始跑過正整數的全體。級數(4)是個二重級數。這種級數我們早在 [I, 142] 中已經研究過，那時級數的項都是實數。現在假設由這級數的項的模所成的級數

$$(5) \quad \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} |a_{pq}| |z_1 - b_1|^p |z_2 - b_2|^q$$

也收斂。那末，如[11]中一般，可知由級數(4)的項的實數部分和虛數部分所成的級數皆爲絕對收斂，並且這兩個實二重級數的和不因項的次序的變更而改變。故知當級數(5)收斂時級數(4)也收斂，並且不論項的次序如何變更，級數(4)的和常爲一定。以後我們祇看級數(5)

爲收斂，即級數(4)爲絕對收斂的情形。

和 [13] 中完全一樣，不難寫出與亞貝爾定理類似的定理來。假設級數(4)當 $z_1 = \alpha_1, z_2 = \alpha_2$ 時爲絕對收斂。由此可知當 $z_1 = \alpha_1, z_2 = \alpha_2$ 時級數(4)的一般項的模爲有界，就是說，存在一數 M ，使對任意的 p 和 q 不等式

$$|a_{pq}| |\alpha_1 - b_1|^p |\alpha_2 - b_2|^q < M$$

常常成立。上式即

$$(6) \quad |a_{pq}| < \frac{M}{|\alpha_1 - b_1|^p |\alpha_2 - b_2|^q}.$$

現在來看兩個圓 K_1 和 K_2 ：

$$(7) \quad |z_1 - b_1| < |\alpha_1 - b_1|; \quad |z_2 - b_2| < |\alpha_2 - b_2|.$$

第一個圓包含所有和 b_1 相距較 α_1 和 b_1 相距爲近的點 z_1 ，第二個圓包含所有和 b_2 相距較 α_2 和 b_2 相距爲近的點 z_2 。

今於 K_1 中任取一點 z_1 ， K_2 中任取一點 z_2 ，即

$$|z_1 - b_1| = q_1 |\alpha_1 - b_1|, \quad |z_2 - b_2| = q_2 |\alpha_2 - b_2|,$$

其中 $0 < q_1, q_2 < 1$ 。應用(6)可以估計級數(4)的一般項：

$$(8) \quad |a_{pq}| |z_1 - b_1|^p |z_2 - b_2|^q < M q_1^p q_2^q.$$

但是易見正項二重級數

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} M q_1^p q_2^q$$

爲收斂。實際上，這級數可由兩個正項級數

$$M(1 + q_1 + q_1^2 + \cdots) \text{ 和 } (1 + q_2 + q_2^2 + \cdots)$$

相乘而得 [I, 138]，故顯知其和爲：

$$\frac{M}{(1 - q_1)(1 - q_2)}.$$

因此這時級數(5)收斂，從而級數(4)爲絕對收斂。由(8)式還知道在任何以 b_1 和 b_2 爲中心，半徑 ρ_1 和 ρ_2 依次小於 K_1 和 K_2 的半徑的圓 K_1' 和 K_2' 中，級數(4)爲一致收斂。在以上的證明中我們並沒

有用到級數(4)在 $z_1 = \alpha_1$ 和 $z_2 = \alpha_2$ 的絕對收斂性,而祇用到不等式

$$|a_{pq}(\alpha_1 - b_1)^p (\alpha_2 - b_2)^q| \leq M,$$

即這級數的一般項當 $z_1 = \alpha_1$ 和 $z_2 = \alpha_2$ 時爲有界。

總括起來,可得下面的結果: 若當 $z_1 = \alpha_1$, $z_2 = \alpha_2$ 時級數(4)的項的模都小於同一數 M , 則此級數在圓(7)的內部爲絕對收斂,在圓

$$|z_1 - b_1| \leq (1 - \varepsilon) |\alpha_1 - b_1|; |z_2 - b_2| \leq (1 - \varepsilon) |\alpha_2 - b_2|$$

中爲一致收斂,其中 ε 是任何一個小的固定正數。

注意: 祇要當 $z_1 = \alpha_1$ 和 $z_2 = \alpha_2$ 時級數(4)在某種順序之下相加爲收斂(不必絕對收斂),他的一般項就按與原點距離的遠近而趨於零,因此他們的絕對值必皆小於同一數 M 。從而級數就在圓(7)內部絕對收斂。

由以上的結果,和[13]中完全一樣,可以導入級數(4)的收斂半徑這個概念。

不過現在我們有了兩個正數 R_1 和 R_2 , 使當 $|z_1 - b_1| < R_1$ 和 $|z_2 - b_2| < R_2$ 時級數(4)絕對收斂,當 $|z_1 - b_1| > R_1$ 和 $|z_2 - b_2| > R_2$ 時級數(4)發散。注意: 現在級數(4)的絕對收斂區域必須由兩個收斂半徑 R_1 和 R_2 同時決定,而這兩半徑的大小一般不能各自獨立地決定,因爲一半徑的值常要受另一半徑的值的影響。當 R_1 減小時, R_2 有時可以增大。換句話說,現在我們祇能說聯合收斂半徑 R_1 和 R_2 , 或聯合收斂圓。試以下之冪級數爲例:

$$(9) \quad \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(p+q)!}{p!q!} z_1^p z_2^q.$$

級數(5)現在成爲

$$(10) \quad \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(p+q)!}{p!q!} |z_1|^p |z_2|^q.$$

在這級數中先把那些 $p+q$ 等於同一數 s 的項分別加在一起。由半頓二項式公式知道這種項的和是

$$(|z_1| + |z_2|)^s,$$

從而(10)式可以改寫為

$$\sum_{s=0}^{\infty} (|z_1| + |z_2|)^s,$$

由此立刻可知當且僅當 $|z_1| + |z_2| < 1$ 時這級數為收斂。這樣，級數(9)的聯合收斂半徑 R_1 和 R_2 就由等式 $R_1 + R_2 = 1$ 來決定。若取 $R_1 = \theta$, $0 < \theta < 1$, 則有 $R_2 = 1 - \theta$ 。再看第二個例子：

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} z_1^p z_2^q.$$

於此易見 $|z_1| < 1$ 和 $|z_2| < 1$ 是絕對收斂的充要條件，就是說，現在 $R_1 = 1$, $R_2 = 1$, 兩收斂半徑各自獨立地可以決定。

由一致收斂性和維爾史特拉定理知道級數(4)在聯合收斂圓的內部表示兩變數 z_1 和 z_2 的正則函數 $f(z_1, z_2)$ 。和 [13] 中一樣，可知級數(4)在收斂圓內部可以關於任一變數微分任何次之多，並且這微分不改變收斂圓。

和 [14] 中一樣，微分幾次以後再置 $z_1 = b_1$ 和 $z_2 = b_2$, 可得級數的係數的表示式：

$$(11) \quad a_{pq} = \frac{1}{p!q!} \frac{\partial^{p+q} f(z_1, z_2)}{\partial z_1^p \partial z_2^q} \Big|_{z_1=b_1; z_2=b_2},$$

即級數(4)是函數 $f(z_1, z_2)$ 的泰勒級數。

若 R_1 和 R_2 是級數(4)的聯合收斂半徑，則當 $|z_1 - b_1| < R_1 - \varepsilon$ 及 $|z_2 - b_2| < R_2 - \varepsilon$ 時這級數絕對且一致收斂，其中 ε 是任何一個小的固定正數。由(3)及(11)可得級數的係數的估值如下：

$$(12) \quad |a_{pq}| < \frac{M}{(R_1 - \varepsilon)^p (R_2 - \varepsilon)^q},$$

其中 M 是個正常數，其值顯然和 ε 的選取有關。

用(12)式右邊的數替代級數(4)的係數 a_{pq} , 則得冪級數

$$(13) \quad \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{M}{R_1'^p R_2'^q} (z_1 - b_1)^p (z_2 - b_2)^q, \quad (R_1' = R_1 - \varepsilon; R_2' = R_2 - \varepsilon)$$

通常稱為級數(4)的優級數或強級數。易見級數(13)的和等於

$$(14) \quad \frac{M}{\left(1 - \frac{z_1 - b_1}{R'_1}\right) \left(1 - \frac{z_2 - b_2}{R'_2}\right)},$$

這函數稱為級數(4)的優函數或強函數。當他依 $(z_1 - b_1)$ 和 $(z_2 - b_2)$ 的幕展開為幕級數時，係數常為正，且大於 $|a_{pq}|$ 。

[14]的結果也不難拓廣到兩個自變數的情形來。設有兩個以 b_1 和 b_2 為中心的圓 $|z_1 - b_1| \leq R_1$ 和 $|z_2 - b_2| \leq R_2$ ，其圓周為 l_1 和 l_2 。函數 $f(z_1, z_2)$ 在這兩閉圓中為正則。又設 z_1 和 z_2 依次為兩圓內部的任意兩固定點，則由勾犀公式有

$$(15) \quad f(z_1, z_2) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{l_1} dz'_1 \int_{l_2} \frac{f(z'_1, z'_2)}{(z'_1 - z_1)(z'_2 - z_2)} dz'_2.$$

和[14]中一樣，我們可以將有理分式

$$\frac{1}{(z'_1 - z_1)(z'_2 - z_2)}$$

依 $(z_1 - b_1)$ 和 $(z_2 - b_2)$ 的幕展開為級數

$$\frac{1}{(z'_1 - z_1)(z'_2 - z_2)} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(z_1 - b_1)^p (z_2 - b_2)^q}{(z'_1 - b_1)^{p+1} (z'_2 - b_2)^{q+1}},$$

這級數關於圓周 l_1 和 l_2 上的點 z'_1 和 z'_2 為一致收斂。將上式代入(15)式右邊，然後逐項積分，即得函數 $f(z_1, z_2)$ 在兩圓內部的幕級數展開式：

$$(16) \quad f(z_1, z_2) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a_{pq} (z_1 - b_1)^p (z_2 - b_2)^q.$$

這級數的係數由下面的公式決定：

$$(17) \quad a_{pq} = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{l_1} dz'_1 \int_{l_2} \frac{f(z'_1, z'_2)}{(z'_1 - b_1)^{p+1} (z'_2 - b_2)^{q+1}} dz'_2 = \frac{1}{p!q!} \frac{\partial^{p+q} f(z_1, z_2)}{\partial z_1^p \partial z_2^q} \Big|_{z_1=b_1, z_2=b_2}.$$

因此得證任何在兩圓內部為正則的函數可以在這兩圓內部展開為

幕級數^①。

和[14]中一樣，易見這展開式是唯一的，因為他的係數必定由(11)式所決定之故。

我們可以把級數(4)中的項按照 $(z_1 - b_1)$ 和 $(z_2 - b_2)$ 的齊次式歸併起來，即將他寫成下面的形式

$$(18) \quad \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p+q=s} a_{pq} (z_1 - b_1)^p (z_2 - b_2)^q,$$

其中內部的有限和展佈於所有那些滿足 $p+q=s$ 的項之上。公式(18)將函數 $f(z_1, z_2)$ 在收斂圓內部表示為 $(z_1 - b_1)$ 和 $(z_2 - b_2)$ 的齊次多項式的級數。現在反過來，假設 $(z_1 - b_1)$ 和 $(z_2 - b_2)$ 的齊次多項式所成的級數(18)在兩圓 $|z_1 - b_1| \leq R_1$ 和 $|z_2 - b_2| \leq R_2$ 中為一致收斂。則由維爾史特拉定理這級數的和 $f(z_1, z_2)$ 是這兩圓中的正則函數。

並且我們還可以將級數(18)關於任一變數逐項微分任何次之多。微分以後再置 $z_1 = b_1$ 和 $z_2 = b_2$ ，即得係數 a_{pq} 所滿足的(11)式。這表明諸係數 a_{pq} 就是函數 $f(z_1, z_2)$ 的泰勒係數，於是我們可以把級數(18)改寫成二重級數(4)的形式，這級數在兩圓內部絕對且一致收斂。因此得證：若齊次多項式所成的級數在某兩圓內部為一致收斂，則此級數必可改寫為具普通形式的二重幕級數，在兩圓內部為絕對收斂。

若將 z_1 和 z_2 分開為實數和虛數部分：

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2,$$

則在以 (x_1, y_1, x_2, y_2) 為坐標的四維空間中級數(18)的一致收斂區域有時可以比級數(4)的一致收斂區域更大一些。

設以級數(9)為例。這時(18)取下面的形式：

$$\sum_{s=0}^{\infty} (z_1 + z_2)^s,$$

他的一致收斂區域由下面的不等式決定：

① 前面假設 $f(z_1, z_2)$ 在兩閉圓中為正則祇是為敘述證明時便當一些，讀者易見當 $f(z_1, z_2)$ 祇在兩圓內部為正則時結果依然成立(譯者)。

$$|z_1 + z_2| < 1,$$

亦即

$$(19) \quad (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 < 1.$$

對於級數(9)前面已證應有 $R_1 + R_2 = 1$, 故其收斂區域由不等式

$$|z_1| + |z_2| < 1$$

決定, 此即

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} < 1,$$

或

$$(20) \quad x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} < 1.$$

不等式(19)所定義的區域比不等式(20)所定義的更大, 即若 x_k 與 y_k 滿足(20)時必定也滿足(19), 其逆不真。實際上, 由不等式

$$(x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 \leq (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$$

立刻可知(19)的左邊小於或等於(20)的左邊。

所有以上的論斷和結果都可拓廣到 n 個變數的幕級數去, 那時我們所得到的幕級數的絕對且均勻收斂區域將是 n 個圓的聯合體。

84. 解析延拓 由形式如(4)的幕級數在其收斂圓內部所定義的兩個變數的函數 $f(z_1, z_2)$ 有時可在更大的區域中為正則, 於是和單變數函數的情形一樣又發生了函數的解析延拓的問題。和單變數函數的情形一樣[18], 有基本定理成立, 依據這個定理若在同一對區域中為正則的兩函數在每一區域中的一點 $z_1 = b_1$ 和 $z_2 = b_2$ 有相同的函數值, 並且他們任何階的導數在這兩點的數值也都相同, 則這兩函數在這一對區域中全同。

現在來研究由幕級數所定義的函數 $f(z_1, z_2)$, 假設 $z_1 = c_1$ 和 $z_2 = c_2$ 是收斂圓中的兩點。應用級數(4)我們可以決定導數

$$\left. \frac{\partial^{p+q} f(z_1, z_2)}{\partial z_1^p \partial z_2^q} \right|_{z_1=c_1; z_2=c_2}$$

的值, 然後再做函數 $f(z_1, z_2)$ 依 $(z_1 - c_1)$ 和 $(z_2 - c_2)$ 的幕展開時的泰勒

級數：

$$(21) \quad \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a'_{pq} (z_1 - c_1)^p (z_2 - c_2)^q.$$

易見這種幂級數的改造就相當於以

$$(z_1 - b_1)^p = [(z_1 - c_1) + (c_1 - b_1)]^p$$

$$(z_2 - b_2)^q = [(z_2 - c_2) + (c_2 - b_2)]^q$$

代入級數(4)，用二項式公式透開方括弧，然後再把所有含 $(z_1 - c_1)$ 和 $(z_2 - c_2)$ 的幂次相同的項歸併在一起。級數(21)在任何以 c_1 和 c_2 為中心而分別含於級數(4)的兩收斂圓內部的兩圓之中顯然為收斂，並且他的和等於 $f(z_1, z_2)$ 。但有時級數(21)的收斂圓也可以越出級數(4)的收斂圓之外。這時我們就得到函數 $f(z_1, z_2)$ 在更大的區域中的值，即擴大了正則函數 $f(z_1, z_2)$ 的定義域。在有些場合之下，我們可以一次次地應用上述這種藉助於收斂圓的解析延拓來擴大正則函數的存在域以及他的全部可能值，於是也就定義了一個解析函數，這解析函數是由級數(4)所決定的元素經解析延拓而得到的。至於解析延拓和奇異點之間的關係我們不準備在此詳細去研究了。以上所說的一切也適用於自變數多於兩個的情形。祇是有一點要注意的，就是當 $f(z_1, z_2)$ 做解析延拓時，如果祇知道 z_1 和 z_2 所經過的路線 L_1 和 L_2 的話，我們並不能決定這解析延拓的結果。更要緊的是要知道 z_1 和 z_2 沿着 L_1 和 L_2 變動時彼此間的關係如何。關於多變數函數論的一般理論我們就講到這裏為止。目前函數論在這方面進展甚速。關於多變數函數論的基本事實，在古利的“數學分析”一書中可以找到更詳細的敘述。至於專門的書籍則有富克斯的“解析多變數函數論”(1948)，其中附載有豐富的文獻。

85. 方陣函數、預備知識 現在讓我們來研究以一個或幾個方陣為變數的函數。先看一個方陣的函數。在[III₁, 44]中我們已經研究過最簡單的情形，即一個方陣的多項式和有理函數。在深入研究更複雜的方陣函數之先，要說幾個基本概念。以後用 n 來記方陣的階數。

設有方陣的無限級列

$$X_1, X_2, \dots$$

我們稱這級列以方陣 X 為極限, 若對任意足號 i 和 k 常有

$$(22) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \{X_m\}_{ik} = \{X\}_{ik},$$

即方陣 X_m 的元素常以 X 中對應的元素為其極限。這時我們假設無限級列中的方陣都是同階的。

再引進幾個以後要用的新的記號。 $\|a\|$ 表示一個方陣, 他的每一元素都等於 a 。 $|X|$ 表示一個方陣, 其元素為方陣 X 的元素的模, 即

$$(23) \quad \{|X|\}_{ik} = |\{X\}_{ik}|.$$

若一方陣 Y 的元素常為正, 且皆大於 $|X|$ 的元素, 則以不等式

$$|X| < Y$$

記之。換言之, 這不等式和下面 n^2 個不等式相抵:

$$|\{X\}_{ik}| < \{Y\}_{ik}. \quad (i, k=1, 2, \dots, n)$$

再看以方陣為項的無窮級數

$$Z_1 + Z_2 + \dots$$

若這級數前面 n 項之和當 n 無限增加時有一定的極限方陣 Z , 則稱他為收斂。 Z 稱為這級數的和

$$(24) \quad Z = Z_1 + Z_2 + \dots$$

(24) 式顯然相當於下面 n^2 個等式:

$$(25) \quad \{Z\}_{ik} = \{Z_1\}_{ik} + \{Z_2\}_{ik} + \dots \quad (i, k=1, 2, \dots, n)$$

所有的滿足條件

$$(26) \quad |X - A| < \|\rho\|$$

的方陣 X 稱為方陣 A 的一個鄰域, 這裏 ρ 是個已給正數。不等式 (26) 和下面 n^2 個不等式相抵:

$$|\{X - A\}_{ik}| < \rho.$$

方陣的冪級數是定義方陣函數的一種基本工具, 所以先來研究一下這樣的級數。