

概 率 初 步

上海人民出版社

概 率 初 步

上海师范大学数学系应用数学组

上海人民出版社

概 率 初 步

上海师范大学数学系应用数学组

上海人民出版社出版

(上海绍兴路5号)

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 4.5 字数 95,000

1975年4月第1版 1975年4月第1次印刷

印数 1—40,000

统一书号: 7171·638 定价: 0.27 元

目 录

一、随机现象是可以认识的	1
1. 从天气预报看随机现象	1
2. 概率统计方法的特点	5
3. 随机现象的典型例子	5
二、随机事件及其概率	9
1. 随机事件——随机现象的表现	9
2. 事件发生的可能性大小——概率	12
3. 事件的相互关系	17
三、古典概型	28
1. 古典概型	28
2. 排列与组合	30
3. 古典概型概率计算的例子	35
4. 超几何分布和质量检查	38
四、随机变量	41
1. 什么是随机变量	41
2. 离散型随机变量	42
3. 离散型随机变量统计规律的全面描述	43
4. 随机变量的平均值	47
五、统计独立性和条件概率	52
1. 条件概率和独立事件	52
2. 一般概率乘法公式	54
3. 应用概率独立性的例子	58
4. 全概率公式和贝叶斯公式	64
六、二项分布和普哇松分布	68
1. n 次独立试验概型和二项分布	68

2. 普哇松分布	72
3. 自来水是否合格	77
4. 怎样从子样推断母体	80
七、随机变量的方差	83
1. 方差的定义	83
2. 大数定律	92
3. 平均值和方差的无偏估计	98
八、正态分布	106
1. 频率直方图和非离散型随机变量	106
2. 正态分布的性质	111
3. 应用正态分布的例子	126
附录	135
1. 对数阶乘表	135
2. 普哇松分布 $P\{\xi=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ 的数值表	137
3. 正态分布函数 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ 的数值表	139

一、 随机现象是可以认识的

1. 从天气预报看随机现象

在今天,“风云莫测”这句俗话已经不能反映我们对天气现象的认识水平了。现在,我们不仅能够预报短期内的气象变化,而且能够预测几天以至几个月的天气趋势。

天气现象和我们通常所说的确定性现象相比,是有一些不同的特点。我们知道,对于确定性现象,在一定的条件下必然会发生某一种结果。例如:导体通电后会发热;在标准大气压下,纯水加热到摄氏 100 度时必然会沸腾,等等。而“明天天气如何”,这就有很多可能的情况,可能是晴天,也可能是雨天或阴天。我们把这种具有多种可能发生的结果,而对于究竟发生那一个结果事先不能肯定的现象,称为随机现象。

确定性现象有着内在的规律,这一点我们比较容易看到。而对于象天气变化这样的随机现象,从表面上看,发生什么样的结果是偶然的,是偶然性在起支配作用,没有什么必然性。其实不然,辩证唯物主义告诉我们:那些“被断定为必然的东西,是由纯粹的偶然性构成的,而所谓偶然的东西,是一种有必然性隐藏在里面的形式”^①。人类社会发展的历史和自然界的历史事实都告诉我们:“一切客观事物本来是互相联系的和具有内部规律的”。随机现象也不例外。既然随机现象也有内部规律,那么怎样认识随机现象的规律呢?我们就以天

① 恩格斯:《路德维希·费尔巴哈和德国古典哲学的终结》,人民出版社 1972 年版,第 35 页。

气预报中的一个例子, 来看一看这个问题.

劳动人民在与自然的长期斗争中, 逐步认识了各种因素(例如温度, 湿度, 气压)对于天气变化的影响, 在测天看天方面积累了丰富的经验. 广泛流传于我国劳动人民中间的一些测天谚语, 就是这些经验的总结. 例如“缸穿裙、雨淋淋”, 就说明了缸沿湿润反映了空气中湿度增加, 因而未来将要下雨, 又如“池塘鱼儿跳, 不久风雨到”, 就反映了气压降低是即将下雨的征兆. 遵照毛主席的教导: “对情况和问题一定要注意到它们的数量方面, 要有基本的数量的分析.” 我们从数量方面来研究一下, 气压、湿度和温度的变化对天气晴雨有什么影响.

我们选今天和昨天的湿度差 x , 作为一个观测项目; 把今天某一时刻(通常取 14 时)的气压与温度的差再减去 1000(简称压温差), 减去历史资料提供的平均压温差数值, 把这样减得的数值 y 作为另一个观测项目. 并根据这样的要求, 观察 10 个雨天和 10 个非雨天, 其数据列成表 1-1.

表 1-1

雨 天		非 雨 天	
x (湿度差)	y (压温差)	x (湿度差)	y (压温差)
-1.9	3.2	0.2	6.2
-6.9	10.4	-0.1	7.5
5.2	2.0	0.4	14.6
5.0	2.5	2.7	8.3
7.3	0.0	2.1	0.8
6.8	12.7	-4.6	4.3
0.9	-15.4	-1.7	10.9
-12.5	-2.5	-2.6	13.1
1.5	1.3	2.6	12.8
3.8	6.8	-2.8	10.0

把 x 和 y 两个因素分开来考察, 还很难看出什么规律. 我们就采用坐标这个工具, 把 x, y 综合起来考虑. 在图 1-1 中, 横轴为 x , 纵轴为 y , 然后把表 1-1 的数据标在坐标系上, 成为一张点聚图.

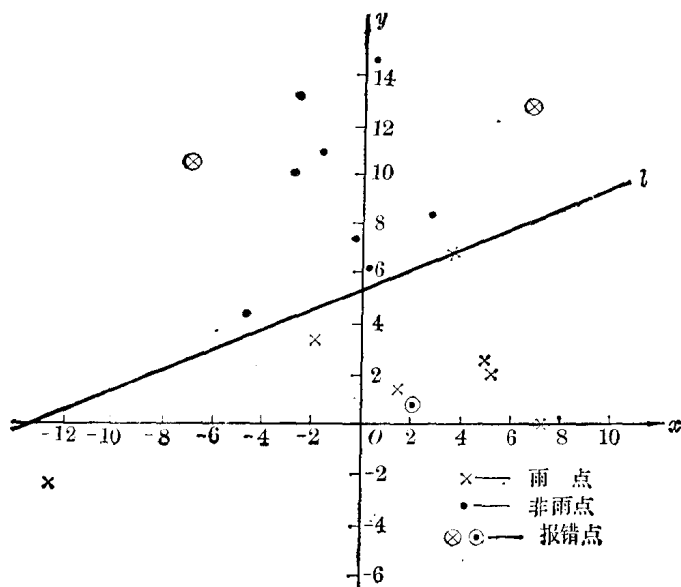


图 1-1

仅仅观察一个点子, 我们仍然看不出规律. 当把雨天和非雨天这两类数据全部点到坐标平面上后, 从这许多点在坐标平面上的分布情况中, 就可以看出一些规律来: 代表雨天数据的点, 大部分聚在坐标平面的右下方; 而代表非雨天数据的点, 大部分在平面的左上方. 我们就设法画一条直线 l , 作为区别“雨”和“非雨”这两类天气区的界限, 并把直线的上方叫做非雨区, 直线的下方叫做雨区. 直线 l 叫做分辨线, 它起了区别雨区和非雨区的作用. 画出分辨线后的点聚图, 就可以

用来预报晴雨：如果某一天所测得的一对数据为 (x, y) ，把它点在坐标平面上，若这点落在直线上方，就预报明天不下雨；若这点落在直线下方，就预报明天是雨天。例如新测得的数据是 $x=8.1$ ， $y=2.0$ ，则点 $(8.1, 2.0)$ 在直线下方，就预报明天下雨。这条分辨线通常可以凭目测画出。运用有关的概率统计方法，可以比较准确地确定分辨线的方程并画出分辨线。例如，就表 1-1 的数据，用概率统计的方法确定出的分辨线是

$$y=0.4x+5.3\text{①}.$$

上述这种用分辨线区别晴雨区进行预报的方法，就叫做分辨法。

从用分辨法预报晴雨的过程中，可以看到：

(1) “认识从实践始”，人们对随机现象规律的认识，一刻也不能脱离人的社会实践。如果没有劳动人民长期测天看天的经验，就无法确定以湿度差和压温差作为进一步考察的因素；如果不对这两个因素作较多的观测，也就没有足够的资料来做进一步的分析。

(2) 我们是通过大量的重复的观测才作出这条分辨线的。在一次观测中（即通过一个点子），看不出晴天和雨天的点子有什么不同；而在大数次的重复观测中，晴天和雨天的点子就各呈现出不同的分布规律。对于在大量次数观测或试验中方才呈现出来的规律，叫做随机现象的统计规律。恩格斯深刻地指出：“在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律。”②统计规律反映了随机现象内在规律的一个数量

① 确定分辨线的方程，需要本书后面介绍的一些概念与比较复杂的计算，在这里就不讲了。

② 恩格斯：《路德维希·费尔巴哈和德国古典哲学的终结》，人民出版社 1972 年版，第 38 页。

侧面。概率统计就是研究自然界随机现象统计规律的一个数学分支。由于我国工农业生产的不断发展，概率统计作为人们认识世界和改造世界的一种数学工具，也得到了不断的发展和广泛的应用。

2. 概率统计方法的特点

我们已经看到，必须通过大量的重复观察或试验，才能发现随机现象的统计规律。一次观测结果的不确定性和大量重复观测时呈现出统计规律性，这一矛盾是我们认识随机现象时要着重注意把握的。因此，用概率统计的方法解决实际问题时，一般说，观测资料越丰富，得到的结论就越好。由于自然界本身是不断运动发展的，我们对随机现象本身的认识，在一个阶段中，是可能有些偏差的。读者可能看到，在上面的例子中，表 1-1 中的二十个点子有三个不能准确预报：有两个雨点落在非雨区，又有一个非雨点落在雨区，准确率大约有 85%。有较大的准确性但又包含一定的错误率，这是用概率统计方法所得结论的一个特点。但是“客观现实世界的变化运动永远没有完结，人们在实践中对于真理的认识也就永远没有完结。”人们通过反复的实践，对随机现象统计规律的认识也就越来越准确，越来越完全。人们是能够认识随机现象的规律的。

3. 随机现象的典型例子

在客观世界中，随机现象是普遍存在的。下面举几个典型例子，以便启发读者在阅读中结合自己工作的实际，来理解本书中一些概念和方法。

(1) 产品的抽样验收——“我们的责任，是向人民负责。”工厂的产品出厂时，都要进行检查和验收。一大批产品

怎样进行检查和验收呢？能够有条件逐件检查那当然很好。然而，有些产品产量很大（如螺母，电阻），要逐件检查势必要耗费大量人力、物力和时间；有些产品一经检查后就被破坏而不能再使用，例如集成电路的使用寿命，种子的发芽能力，电影胶片的感光性能，炮弹的质量等等。因此就需要抽一部分产品进行检查（简称抽样检查）。

一批产品中既有正品也有次品，我们随意取一件来检验，就有“是正品”或“是次品”这两种可能。这就是说，抽查一件产品的结果是带有偶然性的。但是，大批产品中次品的多少是确实会呈现一定的统计规律性的。怎样根据这些统计规律，合理制定抽样和验收的方案，这是生产实际中经常遇到的问题，我们将在以后简略地讨论这个问题。

(2) 种子的发芽——保存了一年（季）的农作物的种子，播种前一般都要测定一下种子的发芽能力。如果把一批大半已失效的种子误播下去，就会贻误农时，严重影响生产。由于一粒种子一经发芽试验后就无法再种，因此只能采取抽样检查。一粒种子能否发芽，这是无法事先确定的；但是同样保管条件下的一批种子中，能发芽的种子所占的比例——发芽率，却是稳定的。这样，利用抽查一小部分种子的发芽率，就能估测这一批种子的发芽率。

(3) 公用服务事业——研究电话的等待时间，公共汽车的乘客流量这类现象，有利于提高服务质量。例如，在某一段时间内电话总机的电话线被占用的条数，就有许多可能情况，比如可能有 10 条线在通话，也可能有 15 条在通话，每种情况的发生带有偶然性。但通过长期的观察、调查，可以看出它有统计规律性。掌握了在一段时间内线路被占用的条数所服从的规律，就可以采取必要的措施，努力提高服务质量。

(4) 测量误差的处理——在测量时，即使我们对工具的精度和温度的影响作了校正，多次测量同一段距离的结果也会有微小的差异。在测量上，这一类误差就称为随机误差。实践证明，这些误差一般可用一种叫做正态分布的统计规律来描述。掌握随机误差的规律，可以使我們正确地进行数据处理(测量上叫平差)，从而获得比较准确的测量值。

(5) 水情预报——准确地预报大江大河的汛期和水位，对于保障人民的生命财产安全、进行社会主义建设，有着很大的意义。洪峰什么时候到？水位有多高？粗看似乎很难预测。但分析了历史上长期的水文观测资料，就可以根据降水等因素和上游测站的水文情报，作出较准确的预报。

在建设水库等水利工程时，也要摸清当地水情的统计规律，使得水利工程的规模既能保证抗灾又不浪费投资。

(6) 在医学上——由于人体之间的差异，同一种药物或治疗方法对不同的人可能产生不同的效果。对有些病人有效，对有些病人可能疗效不大。因而需要从大量的临床实践中，通过对照，找出药物或治疗方法的统计规律，以便获得比较好的疗效。

(7) 在通讯工程中——进行数字通讯时，信号在空间传播时会受到各种干扰，因此对方收到的信号与原发出的信号可能不同。这种干扰是偶然的。通常把信号所受到的干扰叫做噪声。在通讯中，为了从收到的信号中排除掉偶然干扰的影响，就要研究噪声的统计规律。

(8) 器件的可靠性和平均寿命——由许多器件(例如轴承、晶体管、灯泡等)组成的装置(机械装置或电子仪器装置以及系统)，由于工作中的疲劳性的磨损、腐蚀、老化或其他原因，可能产生故障或损坏。因此，在涉及到装置或系统的设计

问题时,要考虑每一器件的可靠性和平均寿命. 由于对某一只器件说,损坏与否以及寿命多少都是偶然的,故需要了解出故障的统计规律.

(9) 地震学——地震的发生有一定的条件,它有一定的规律性,这也是一种随机现象. 为了预报地震,就需要从历史资料中探求各种条件与发生地震之间的联系,以及这种联系的统计规律.

随机现象在自然界中和人们的各个实践领域中是普遍存在的. 不管具体内容多么不同,所有的随机现象都具有偶然和必然的两重性;并且必然性是主导的方面,是本质. 抓住这一点,我们就可以深刻地认识随机现象的统计规律性,进一步改造世界.

思考题和练习题

1. 结合你的工作实践,举一、两个随机现象的例子. 它们具备什么特征?
2. 为什么说随机现象有偶然和必然的两重性? 请用具体例子说明这一点. 在什么条件下才能明白地看到这种两重性?
3. 什么是随机现象研究方法的特点?

二、随机事件及其概率

1. 随机事件——随机现象的表现

1.1 随机事件

为了精细地考察一个随机现象，必须分析这个现象的各种表现。只有弄清了一个随机现象的各种表现，才能进一步研究这个随机现象发生各种结果的可能性。还是以天气现象为例，如果问“明天天气如何？”就比较笼统，而如果问“明天天晴的可能性是多大？”就比较明确了。我们把随机现象的每一种表现或结果，叫做一个随机事件。“明天天晴”和“明天下雨”，就是“明天天气如何”这个随机现象中的两个随机事件。随机事件一般简称为事件，让我们再举几个例子来说明事件这个概念。

产品抽样检查时，从一批产品中抽取三件产品的质量情况是一个随机现象，而“全部合格”，“有一件或二件不合格”就是两个事件；

测量某零件长度的误差大小是一个随机现象，而“误差不超过 ± 1 毫米”就是一个事件；

某田块每亩中粘虫幼虫的条数是一个随机现象，“幼虫在 6000 条以下”就是一个事件。

通常就用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示事件。

必须注意，事件可以是属于数量性质的，即这种表现可由测量或计数而得，例如误差大小，合格品件数，粘虫条数等等。但也可以是不表现为数量性质的，例如晴、雨；红、绿等。还

可以是兼有数量性质和非数量性质的，例如“缩水率不超过0.02，表面无斑点”等。

1.2 基本事件和复杂事件

有的事件很复杂，有的事件很简单。一般地说，复杂事件往往可以“分解”成同一随机现象下的较简单的事件。例如，三粒油菜籽的发芽情况是一个随机现象，“至少有一粒发芽”就是一个事件。但这个事件比较复杂，它包括了“有一粒发芽”，“有二粒发芽”，“有三粒发芽”这三个事件所描述的情况，这三个事件就比较简单。在一定的研究范围中，不能再“分解”的事件叫做基本事件；可以由基本事件“复合”而成的事件叫做复杂事件。

究竟怎样才叫做可“分解”的？怎样才是“复合”而成的？“基本”与“复杂”为什么依赖于研究范围？现在先以油菜籽发芽的例子说明一下，以后还要深入地讨论这个问题。

“三粒油菜籽的发芽粒数”这个随机现象，包含有下列几种结果：

“全部不发芽”记为事件 A_0 ；

“有一粒发芽”记为事件 A_1 ；

“有二粒发芽”记为事件 A_2 ；

“有三粒发芽”即“全部发芽”记为事件 A_3 。

在现在的研究范围内（不考虑次序），这四个事件都不能再分解了，因此都是基本事件。

但是，如果现在把这三粒油菜籽给定一个次序（不妨假定是放在“1”，“2”，“3”这三只培养皿中作发芽试验），并要考虑“是第几粒发芽”。这样，研究的范围就变化了（原来不考虑次序，现在要考虑次序）。在这个新的研究范围内，“有一粒发芽”就不是基本事件。它还可以区分为“只有第一粒发芽”，

“只有第二粒发芽”和“只有第三粒发芽”这三种情况。这时，基本事件有表 2-1 中的 8 个。

表 2-1

事件名称	第一粒	第二粒	第三粒
B_1	不发芽	不发芽	不发芽
B_2	发芽	不发芽	不发芽
B_3	不发芽	发芽	不发芽
B_4	不发芽	不发芽	发芽
B_5	发芽	发芽	不发芽
B_6	发芽	不发芽	发芽
B_7	不发芽	发芽	发芽
B_8	发芽	发芽	发芽

从表 2-1 中我们看到，“有一粒发芽”这个事件是由基本事件 B_2, B_3, B_4 复合成的，或者说事件“有一粒发芽”可以分解为 B_2, B_3, B_4 三个基本事件。

读者试回答：在要求考虑次序的条件下，“有二粒发芽”，“全部发芽”，“全部不发芽”这三个事件，分别是由 $B_1 \sim B_8$ 中的哪些基本事件合成的？

分析表 2-1 中的 8 个基本事件，我们看到，基本事件有一个很重要的性质：在一次试验中只能发生基本事件中的一个。换句话说，任何两个或两个以上的基本事件，不可能在一次试验中同时发生。

一般地说，如果事件 A 和事件 B 不能在一次试验中同时发生，则称事件 A 和事件 B 是互不相容的。如果一组事件中的任两个事件都是互不相容的，则称这些事件构成一个互不相容的事件组。既然任意两个基本事件总是互不相容的，因此，随机现象的所有基本事件，构成一个互不相容的事

件组。

1.3 必然事件和不可能事件

在一定条件下, 每次试验中必然会发生的事件, 就叫做必然事件, 一般记作 U . 例如“抛一物体, 这个物体落在地上”; “在标准大气压下, 把水加热到摄氏 100 度, 水会沸腾”等都是必然事件。

在一定条件下, 在每次试验中都不会发生的事件, 叫做不可能事件, 一般记作 V . 例如“没有水分, 种籽发芽”; “在常温下, 焊锡熔化”等都是不可能事件。

必然事件和不可能事件实质上都是确定性现象的表现, 但是, 把它们看作是随机事件的两种特例, 对于分析问题是有益的。

2. 事件发生的可能性大小——概率

2.1 频率

毛主席教导我们, 要胸中有“数”. 对于那些有几种结果的现象, 往往要估计每种结果在全部结果中占有多少比例. 例如

(1) 对 400 粒油菜籽进行发芽试验, 结果有 391 粒发芽. 这批种籽中, 发芽种籽占的比例 (通常称为这批种籽的发芽率) 为:

$$\frac{\text{发芽粒数}}{\text{试验种籽总粒数}} = \frac{391}{400} \approx 0.98.$$

(2) 200 只集成电路使用 2000 小时后, 有 3 只不能继续使用. 能继续工作的集成电路占的比例, 可看成是这批集成电路使用 2000 小时后的可靠程度. 这个比例为:

$$\frac{\text{能继续工作的只数}}{\text{总只数}} = \frac{200-3}{200} \approx 0.99.$$