初中版

数学闯关

——数学思想和方法的领悟

袁银宗／编著

中国社会出版社

数学闯关

——数学思想和方法的领悟

袁银宗 编著

(初中版)

中国社会出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学闯关/袁银宗编著 . - 北京:中国社会出版社,2001.1

ISBN 7-80146-456-7

Ⅰ.数… Ⅱ.袁… Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 84306 号

书　　名:数学闯关 ——数学思想和方法的领悟

编 著 者:袁银宗
责任编辑:尤永弘

出版发行:中国社会出版社　邮政编码:100032
通联方法:北京市西城区二龙路甲 33 号新龙大厦
　　　　　电话:66051698　电传:66051713
经　　销:各地新华书店

印刷装订: 北京通天印刷厂
开本印张:850×1168mm　1/32　印张:12.375
字　　数:300 千字
版　　次:2001 年 1 月第 1 版
印　　次:2001 年 1 月第 1 次印刷
印　　数:1—5000 册

书　　号:ISBN7-80146-456-7/N·1
定　　价:18.00 元

序　　言

面向21世纪的教育是素质教育。初中数学是义务教育的一门主要学科。它是学习物理、化学、计算机等学科以及参加社会生活、生产和进一步学习的基础,对学生良好的个性品质和辩证唯物主义世界观的形成有积极作用。因此,使学生受到必要的数学教育,具有一定的数学素养,对于提高全民族素质,为培养社会主义建设人才奠定基础是十分必要的。

如何实现这一目的呢?首先应该明确,数学教育是全面发展人的素养和能力的教育,是主要以数学教学这一形式实现的对知识的继承和能力的培养。数学教学中,发展思维能力是培养能力的核心。揭示由基础知识内容所反映出来的数学思想方法,是达到这一目的的重要手段。而要使学生能通过数学内容的学习领悟到数学的思想方法,就要求教师首先要学习数学思想方法,并通过教学内容发掘出隐藏在知识后面的深层次的东西,这就是大家通常所说的数学的精神、思想和方法。做到这一点,有助于学生树立正确的学习目的,增强学习数学的兴趣、信心和毅力,逐步形成实事求是、探索创新和实践的科学态度。这也就是在中学数学教学中兴起的用数学方法指导数学教学实践这一模式能逐步发展推广的基本原因。

数学方法论学习不是空洞的教条背诵。它必须与数学发展、数学教育的发展、数学心理学的研究实践、数学史的研究、数学解题思维规律的研究相结合,才能成为活生生的、现实的、有用的东西。这方面的工作需要数学教师在自己的教学实践中去努力探索。袁银宗同志的《数学闯关——数学思想和方法的领悟》在这方面做了积极的有益的工作。

袁银宗同志参阅了大量资料，历时六载，五易其稿，尝试编写了本书，这种勇于探索的精神十分可贵。全书集中于初中数学，集中讲解转化思想、数形结合思题、方程思想、分类思想、数学模型方法、类比思想、几何变换等，观点明确，例题简明易懂，形式活泼，每章最后都有数学史话，提供了一些必要的数学史料，这些都是很有特色的。为初中数学教学研究提供了一本有益的通过数学内容学习数学思想方法的参考书。

当然，本书作为一种探索，并非十全十美，有些表述只是表明作者在探索中的认识，这应是允许的。我们期待能有更多的研究中学数学与数学方法论的作品面世。希望广大的数学教师在自身的工作中形成自觉的通过教学实践学习研究数学方法论的风气，开展以数学方法论指导教学设计，用现代化教学技术手段实现数学方法论指导教学设计的研究。为 21 世纪把我国中学数学教育研究水平提到一个新高度而努力！

首都师范大学数学系　周春荔

2000 年 7 月 8 日

编者的话

如果说问题是数学的心脏，知识是数学的驱体，那么数学思想方法则是数学的灵魂。数学思想方法的掌握和运用对培养能力，发展智力，提高数学素养都有着十分重要的作用。但目前可供初中水平的读者阅读的这方面的书籍尚不多见。作为一种探索，本人尝试编写了《数学闯关——数学思想和方法的领悟》一书。

本书选取若干初中数学常见的思想方法，通过理论的阐述，并配以典型的例题，使读者充分领略数学思想方法的风采，开阔视野，提高数学素养，指导数学的学习。本书的阅读对象为初中水平的数学爱好者，对初中数学教师的备课和课外辅导也有借鉴作用。书中涉及到的知识点不超出《九年义务教育初中数学教学大纲》。

本书在编写过程中，得到首都师范大学硕士研究生导师周春荔教授的热情支持和指导，并提出了许多宝贵意见，使该书的科学性和规范性得以保证。尽管如此，由于作者水平有限，疏漏之处在所难免，恳请读者提出宝贵意见，以便改进。

袁银宗

2001 年 1 月

SHU XUE CHUANG GUAN SHU XUE CHUANG GUAN

数学闯关

——数学思想和方法的领悟——

SHU XUE CHUANG GUAN SHU XUE CHUANG GUAN

XUE CHUANG GUAN

ISBN 7-80146-456-7

9 787801 464569

ISBN7-80146-456-7/N·1

定价：18.00元

目　录

绪　论

一、什么是数学思想方法

数学思想是指现实世界的空间形式和数量关系反映到人的意识之中经过思维活动而产生的结果,是对数学理论和数学知识的本质认识和概括。而数学方法,是以数学为工具进行科学研究的方法,是实现数学思想的技术手段和工具。思想和方法之间没有严格的界线。每一种数学方法都体现了一定的思想,每一种数学思想在一定的场合都需要通过一定的数学方法去实现。例如,解多元方程组时,如从“化未知为已知”的角度去分析,就是化归的思想,当从“化多元为一元”的角度去分析时,其方法就是消元法。因此有时常把数学思想方法作为一个整体概念去使用。

二、为什么要研究初中数学思想方法

1. 是掌握数学知识的需要

初中教材体系由两条线构成。一是数学知识,这是写在教材上的明线,反映了知识发展的纵向系统。二是数学思想方法,这是编写教材的指导思想,是暗线,反映了数学发展的横向系统。它比知识具有更强的稳定性和更普遍的适应性。掌握了数学思想方法就能更快捷地获取知识,更透彻地理解知识,甚至受益终身。可以说,“问题”是数学的心脏,知识是数学的躯体,数学思想方法则是数学的灵魂。法国学者冯·劳厄曾说过“教育无非是一切已学过的东西都忘掉时所剩下的东西”。数学知识都遗忘了,剩下的东西是什么?那就是数学思想方法,即数学地看问题。

2. 是提高数学素质和培养数学能力的需要

数学素质的核心是数学意识，即用数学的观点、心态和方法去处理现实世界中问题的意识。一个人的数学意识决定于他对数学思想方法的掌握和领悟的程度。因此要提高数学素质就必须大力促进数学思想方法的形成。

数学思想方法是实现知识向能力转换的桥梁和关键。初中学生的数学能力，主要是指逻辑思维能力和运算能力。逻辑思维能力包括运用抽象、概括综合的方法形成概念的能力和运用归纳、类比、演绎的方法进行推理论证的能力。这都具有数学思想的特征。而对数学符号运算的能力则是数学方法的运用。因此数学思想方法的掌握和运用是发展思维、培养数学能力的关键，也是造就数学创造性人才的良好手段和途径。正是数学思想方法在传导着数学的精神，在塑造着人的灵魂。

3. 是发展数学的需要

数学思想方法的突破，往往导致数学知识的创新。纵观数学发展的历史，从算术到代数，从常量数学到变量数学，从手工证明到机器证明，凡重大的数学转折，首先是数学思想方法的转变，是数学思想方法推进了数学科学的发展。例如，数和形这两个概念是数学产生和发展的两块基石，是数学研究的最基本的对象。但长期以来，代数与几何的关系都是彼此独立、互不相干的。尽管在数和形两个方面都派生和繁衍了许多分支，但它们的本质内涵始终没有得到沟通，这极大地阻碍了数学的发展。1637 年法国数学家笛卡儿创立了坐标法，建立了解析几何，架起了代数与几何之间的桥梁，开创了用代数方法研究几何问题的新纪元。解析几何的创立，使数学获得了迅猛的发展。又如欧拉在解决哥尼斯堡七桥问题中，不仅开创了崭新的数学研究领域，而且他的研究也是运用数学模型方法的典范。

三、初中数学常见的思想方法有哪些？

统计表明，初中数学课本出现或蕴涵的数学思想方法频数分

布如下表[1]

数学思想方法	代数频数	几何频数	总频数
抽象概括	69	16	85
化归	52	22	74
数学模型	49	59	108
数形结合	29	4	33
归纳猜想	28	13	41
分类	16	11	27
类此	20	16	26
特殊化	24	21	45
演绎	37	66	103
完全归纳法	0	2	2
反证法	0	8	8
换元法	21	0	21
待定系数法	9	0	9
配方法	6	0	6

表中内容可划分成三种类型:

1. 技巧型的方法。包括换元法,配方法,待定系数法,消元法、降次法等。它们与知识并行产生,其特点是操作性强,与解题紧密联系着。

2. 逻辑型的思想方法。包括归纳猜想、演绎法、类比法、抽象概括等。这些方法有些遵循合情推理规则,而演绎法则遵循逻辑学中的基本规律和法则,具有确定的逻辑结构。

3. 宏观型的思想方法。如转化的思想,数形结合思想、方程与函数思想、分类思想和数学模型方法等。这些数学思想虽不像技巧型方法那样具体,可操作,但对数学发展起着指引方向的作用,对数学学习和解题具有宏观指导作用。

---

① 转引自曹才翰、章建跃著《数学教育心理学》,北京师范大学出版社,1999,第 131 页。

转化的思想方法

一个略显夸张的故事，可以帮助我们理解什么叫转化的思想。一个作家伏案写作时总要先泡上一杯浓浓的茶。其固定的程序是：洗茶杯、放茶叶、冲开水。有一天，他的夫人为了帮助作家做点什么，事先将茶杯洗好，放上茶叶后置于作家案边。当作家看到已经放上茶叶的茶杯时，显得无所适从，思考了一会，起身将茶杯中的茶叶倒掉，开始了他那熟悉的程序：洗茶杯、放茶叶，冲开水。

面对茶杯里已经放上茶叶的新问题，如何解决呢？把茶叶倒掉——就将面临的新问题转化为作家已经熟悉的问题。这种处理问题的思想就是转化的思想。实际上，学习数学的过程就是不断转化的过程。陌生转化为熟悉，复杂转化为简单，抽象转化为具体等，掌握转化的策略对学好数学至关重要。

如何实施转化呢？本讲主要从辩证思维的角度研究几种常见的转化策略。所谓辩证思维就是用对立统一、普遍联系、矛盾转化的观点去处理数学问题。中学数学充满着对立统一的因素。如特殊与一般，整体与部分，运动与静止，正向与逆向，相等与不等等。它们一方面是互相对立的，一方面又在一定的条件下互相转化，共处于一个统一体中。恰当的运用对立统一，矛盾转化的观点去分析问题和解决问题，就能够实现新知识向旧知识的转化。

一、一般与特殊的转化

特殊与一般是对立的统一，在一定的条件下可以互相转化。相对于一般而言，特殊的事物往往更简单、更直观、更具体。因而人们常常通过特殊去认识一般。另一方面，一般概括了特殊，一般

比特殊更为深刻地反映着事物的本质。因而人们也常可通过一般去了解特殊。这是辩证法在数学中的体现，也是处理数学问题的重要策略。

1. 一般转化为特殊即特殊化

为了说明特殊化思想，先看下面一场比赛。两人坐在长方形桌旁，相继轮流往桌上放一枚同样大小的硬币，条件是硬币一定要平放在桌面上，不能使后放的硬币压在先前的硬币上，这样继续下去，最后桌面上只剩下一个位置时谁放下最后一枚，谁就算胜了。问先放的人有没有必胜的策略？

在考虑解决这个问题时，先去考虑它的特殊情形——如果这个桌子小到只能放下一枚硬币，那么先放者必然获胜。然后设想桌子变大，把问题一般化：由于长方形桌子有对称中心，先放者只需将第一枚硬币放在对称中心，他一定取胜。像这种思考问题的方法称为特殊化。它是把一个难以入手的一般性问题，先转化为其特殊情形，通过对特殊形式的研究去寻求原问题的答案或解决方法。华罗庚教授曾说过：解题时先足够地退、退到我们最容易看清楚的地方，钻研透了，然后再上去，讲的就是特殊化的方法。

在实际解题中，如何将一般问题特殊化呢？通常可以从适合题意的特殊数值，特殊情形或特殊位置入手，实施特殊化解题策略。例如字母问题可先考察相应的具体数学；对于自然数 n 成立的命题，可先验证当 $n=1,2,3\cdots$ 时的情形；对于一般状态下的几何图形可选取特殊位置或静止位置去研究；对于任意三角形成立的命题，可以先看看等腰三角形、直角三角形或等边三角形时的情形。

初中阶段用特殊化解题的方法，主要有以下几种。

(1)利用特殊化直接解题。对字母取特殊值或几何图形取特殊位置往往可以达到直接解题的目的。特别是对选择题和填空题，效果甚佳。

例 1—1，$\triangle ABC$ 中，$C=90°$，$\sin A=\dfrac{2}{3}$，则 $\mathrm{tg}B$ 是(　　)。

(A)$\dfrac{3}{5}$，(B)$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，(C)$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，(D)$\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

分析与解：常规解法是利用有关的三角函数公式求解。为了简化计算、将问题特殊化，不妨作一个直角边长为 2，斜边长为 3 的 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$，如图 1－1，显然$\triangle ABC$ 是满足题设条件的一个特殊的直角三角形，依勾股定理得：

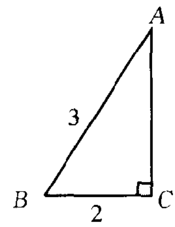

图 1－1

$$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{5}$$

$\therefore \mathrm{tg}B=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$。应选(B)。

例 1—2，A 是半径为 1 的$\odot O$ 外的一点，$OA=2$，AB 是$\odot O$ 的切线，B 是切点，弦 $BC /\!/ OA$，连结 AC，则阴影部分的面积等于(　　)。

(A)$\dfrac{2\pi}{9}$，(B)$\dfrac{\pi}{6}$，(C)$\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{8}$，(D)$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{8}$，

分析：阴影部分是不规则图形，解题目标是将其特殊化，转化为规则的特殊图形。由 $CB /\!/ OA$，联想到将$\triangle ABC$ 变为与其等积的$\triangle OBC$，则阴影部分面积等于扇形 OBC 的面积。

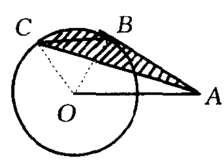

图 1－2

解：连结 OB，OC，则，$OB=OC$，$OB=\dfrac{1}{2}OA$，$OB\perp AB$。

$\therefore \angle OAB=30°$。故$\angle CBO=\angle BOA=60°$

$\therefore \triangle BCO$ 是正三角形。

$\therefore S_{阴影} = S_{扇形OBC} = \frac{60\pi \cdot 1^2}{360} = \frac{\pi}{6}$,应选($B$)。

例1—3,已知关于 x,y 的二元一次方程 $(a-1)x+(a+2)y+5-2a=0$。当 a 取每一个值时,就得到一个方程。证明:不论 a 为何值时,这些方程都有一个公共解,并求出这个公共解。

分析:取字母 a 的两个特殊值得出方程的公共解,再去验证字母取任何值时的结论也成立。

解:当 $a=1$ 和 $a=-2$ 时,方程分别是 $3y+3=0$ 和 $-3x+9=0$。解得 $x=3,y=-1$。

把此解代入原方程恒满足,而与 a 的取值无关。所以不论 a 取何值时,$x=3,y=-1$ 是原方程的一个公共解。

(2)利用特殊化提示解题方向。对于一些复杂抽象的问题,结论是什么,如何求解,往往是不明确的。我们可以先从特殊情况入手,从中发现有益的启示,寻求解题前进的方向。

例1—4,形如 $N=\underbrace{11\cdots1}_{(n-1)个}\underbrace{22\cdots2}_{n个}5$ 的数是完全平方数吗?

分析:由于所给的数 N 比较抽象,是否是完全平方数,底数是什么都不容易判断。不妨先考察 $n=1,2,3,4$ 等特殊情形,以便从中得到启发。

当 $n=1$ 时,$N=25=5^2$;

当 $n=2$ 时,$N=1225=35^2$;

当 $n=3$、4 时,通过计算可得。

$112225^2=335^2$,　　$11122225=3335^2$。

上面几个特例表明,当 $n=1,2,3,4$ 时,N 恰为 $5^2,35^2,335^2,3335^2$,都是完全平方数,由此可猜想:

$N=\underbrace{11\cdots1}_{(n-1)个}\underbrace{22\cdots2}_{n个}5=\underbrace{33\cdots3}_{(n-1)个}5^2$。

通过对 n 取特殊值的试探,发现了完全平方数的底数的结构,启发我们从改变 N 的表达式入手完成证明。