工程数学

积分变换

祝同江　编

高等教育出版社

本书是根据1980年颁布的高等工业学校《工程数学教学大纲(草案)》(四年制试用)积分变换部分的要求以及作者多年的教学经验编写的.

为了便于读者学习,本书在大纲要求的基础上,对内容安排、基本理论的介绍、定理的证明等方面,都有许多新的处理.

本书叙述细致,并附有较多习题,可作为高等工业院校本科有关专业积分变换课程的教材.

(京)112号

工程数学

积分变换

祝同江 编

*

高等教育出版社出版
新华书店总店北京科技发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 4.625 字数 110 000
1991 年 8 月第 1 版 1991年 8 月第 1 次印刷
印数 0001—6 421
ISBN7-04-003489-1/O·1058
定价 1.75 元

前　言

数学中经常利用某种运算先把复杂问题变换为比较简单的问题，然后求解，由此再求其逆运算就可得到原问题的解．在初等数学中，曾经利用取对数运算把数的积或商分别变换为较简单的和、差运算，其计算过程就是这种思想的具体体现．再如，用解析几何中的坐标变换或复变函数中的保角变换来解决某些问题的方法也都属于这种情况．积分变换也是基于这种思想来解决有关问题的一种重要工具．积分变换的理论和方法不仅在许多数学分支中，而且在自然科学的许多领域中和工程技术上都有广泛的应用．

所谓对函数 $f(P)$ 进行某种积分变换是指对它进行某种含参变量的积分运算，将它变换为一个以此参变量为自变量的函数．若把其中的参变量记为 α，则此积分变换通常可表示为

$$F(\alpha)=\int_D f(P)K(P,\alpha)\,dP,$$

其中函数 $K(P,\alpha)$ 可因积分变换类型不同而不同，称为积分变换的核；D 是给定的积分区域，当积分变量 P 是实变量时，它就是积分区间．目前已经选定某些函数 $K(P,\alpha)$ 和积分区域 D 来定义不同名称的积分变换．本书只介绍其中最常用的两种积分变换——Fourier 变换和 Laplace 变换．

本书是按照一九八〇年颁布的高等工业学校《工程数学教学大纲(草案)》(四年制试用)“积分变换”部分的要求编写的．全书共分三部分，第一章 Fourier 变换；第二章 Laplace 变换；第三章积分变换的应用．其中超出上述大纲要求的内容标以“*”号．鉴于频谱分析和相关函数的有关内容通常在专业基础课中讲授，本书将把它们放在第三章叙述，并补充介绍用积分变换解数学物理

方程的方法，以便有关专业选用.

另外，为了便于读者自学起见，针对许多读者不太熟悉含参变量积分和δ-函数的实际情况，对于他们在学习中经常遇到的困难和会出现的问题，本书除增加了一些解释、补充一些例题进行说明外，还在内容安排、基本理论的介绍、定理的证明等方面进行了许多补充和新的论述. 具体说明如下.

1. 本书先简要地介绍了在主值意义下广义积分的概念，以及与它有关的实变复值函数的微分、积分、牛顿-莱布尼兹积分公式、分部积分公式、积分变量替换公式等不可缺少的基础知识.

2. 本书将不介绍弱极限的概念，而用一个矩形单脉冲序列(它是一个δ-型序列)引出δ-函数. 然后说明δ-函数不是普通意义下的函数，收敛于δ-函数的极限过程也不同于普通极限. 并且利用δ-型序列的极限和δ-函数的积分性质具体说明某些与δ-函数有关的等式和积分的意义.

3. 考虑到 Laplace 变换与 Fourier 变换的内在联系，以及许多读者不了解广义积分的积分号与极限号互换，积分号下求微分(对复变量)的有关知识. 本书对 Laplace 变换存在定理，Fourier 变换和 Laplace 变换的微分性质，以及 Laplace 变换的延迟性质、初值定理、终值定理都给出了新的叙述和证明. 又考虑到单位阶跃函数不满足 Fourier 积分定理的条件，对 Fourier 变换的积分性质也给出了新的证明.

4. 鉴于 Laplace 变换中的卷积可看作 Fourier 变换中卷积的特殊情况，以及这两种变换中的卷积定理、Fourier 变换的乘积定理、能量积分的证明都用到两个广义积分号交换次序的有关知识，为了叙述简便，本书将把它们放在第三章第一节中进行讨论.

本书在编写过程中得到北京理工大学应用数学系各级领导的大力支持，叶其孝教授审阅过全部书稿，杨维奇教授审阅过部分书

稿，沈以淡副教授审阅过全部书稿，经常讲授这门课的林民辉、刘伯涵等同志审阅过部分书稿．他们都对该书的编写提出过许多宝贵的修改意见或建议，在此谨表衷心感谢．

由于编者学识水平所限，书中一定还存在不少缺点或错误，殷切期望广大读者批评指教．

祝同江

一九九〇年四月于北京理工大学应用数学系

目　录

第一章　Fourier 变换

本章将介绍 Fourier 变换的基本概念和性质，Fourier 积分定理；δ-函数及其性质，以及与它有关的 Fourier 变换. 这些内容是本章的重点，它们是 Fourier 变换的理论基础，在工程技术上有广泛的应用. 另外，还希望读者注意利用 Fourier 积分定理证明某些含参变量积分公式的方法，这种证明方法比较简便.

§1-1　Fourier 积分和 Fourier 变换的概念

为了引入 Fourier 变换的概念，我们必须首先介绍一种新的积分——在主值意义下的广义积分.

一、主值意义下的广义积分

定义 1　设函数 $f(t)$ 在任何有限区间上可积. 若极限

$$\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M} f(x)dx$$

存在，则称**在主值意义下** $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\infty)$ 的广义积分收敛，记为

$$\text{P. V.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M} f(x)dx. \tag{1-1-1}$$

由普通意义下广义积分收敛性的定义，当函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\infty)$ 上的广义积分收敛时，它在主值意义下的广义积分也收敛，反之不一定成立. 如，当 $f(x)$ 为奇函数且在任何有限区间上可积时，它在 $(-\infty,\infty)$ 上主值意义下的广义积分一定存在，且有

$$\text{P. V.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M} f(x)dx=0.$$

可是函数 $f(x)=\sin x$ 在区间 $(-\infty,0)$ 或 $(0,\ \infty)$ 上的广义积分都不收敛，从而在 $(-\infty,\infty)$ 上的广义积分也不收敛.

然而，当 $f(x)$ 为偶函数且在任何有限区间上可积时，在区间 $(-\infty,\ \infty)$ 上 $f(x)$ 在上述两种意义下的广义积分的敛散性却是一致的. 且有

$$\text{P. V.}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\lim_{M\to\infty}2\int_{0}^{M}f(x)dx=2\int_{0}^{\infty}f(x)dx,$$

于是

$$\text{P. V.}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx.$$

对于定义在区间 $[a,b]$ 上的实变函数 $u(x)$ 和 $v(x)$，$f(x)=u(x)+jv(x)$ 是一个实变复值函数，其中 j 表示虚数单位(今后本书总用 j 表示虚数单位). 当 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上可积时，$f(x)=u(x)+jv(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积，有

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=\int_{a}^{b}u(x)dx+j\int_{a}^{b}v(x)dx. \tag{1-1-2}$$

并且当 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在任何有限区间上可积时，可定义

$$\text{P. V.}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}u(x)dx+j\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}v(x)dx. \tag{1-1-3}$$

由此可以看出，函数 $f(x)=u(x)+jv(x)$ 在主值意义下的广义积分收敛的充要条件为函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在主值意义下的广义积分都收敛，有

$$\text{P. V.}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\text{P. V.}\int_{-\infty}^{\infty}u(x)dx+j\left[\text{P. V.}\int_{-\infty}^{\infty}v(x)dx.\right] \tag{1-1-3$'$}$$

同以前一样，利用极限的定义可给出函数 $f(x)=u(x)+jv(x)$ 的连续和可微的定义. 如，可定义

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+j\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

于是有

$$f'(x)=u'(x)+jv'(x) \tag{1-1-4}$$

从上式可以看出，只要把 j 看作一个虚单位常数，以前有关一元函数的求导法则和求导公式仍然成立．如，

$$(e^{j\alpha x})'=j\alpha e^{j\alpha x};\ (\sin j\alpha x)'=j\alpha\cos j\alpha x,$$

$$[f_1(x)f_2(x)]'=f_1'(x)f_2(x)+f_1(x)f_2'(x).$$

同样可以建立函数 $f(x)=u(x)+jv(x)$ 的原函数概念和下列积分公式

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上的一个原函数(即在 $[a,\ b]$ 上处处有 $F'(x)=f(x)$)．若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则有

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).\text{①} \tag{1-1-5}$$

由函数乘积的微分公式同 样可推出函数 $f(x)=u(x)+jv(x)$ 的分部积分公式．即

设 $f_k(x)=u_k(x)+jv_k(x)\ (k=1,2)$．若 $f_1'(x)$ 和 $f_2'(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，则有

$$\int_a^b f_1(x)f_2'(x)dx=f_1(x)f_2(x)\Big|_a^b-\int_a^b f_2(x)f_1'(x)dx. \tag{1-1-6}$$

式(1-1-5)和(1-1-6)可以推广到积分区间为 $[a,\infty)$，$(-\infty,b]$ 或 $(-\infty,\ \infty)$ 的情形．如，若对任意 $a<b$ 式(1-1-6)成立，且当 $a\to-\infty$，$b\to\infty$ 时该等式的一端的极限存在，则另一端的极限一定存在，且有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2'(x)dx=f_1(x)f_2(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)f_1'(x)dx. \tag*{(1-1-6)$'$}$$

---

① 当 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且除有限个点外可导，$F'(x)=f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上可积时，式(1-1-5)仍然成立(见参考文献[5]第二卷第一分册 298 款)．

同理可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = F(\infty) - F(-\infty), \qquad (1\text{-}1\text{-}5)'$$

以及

$$\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{M\to\infty}[F(M) - F(-M)]. \qquad (1\text{-}1\text{-}5)''$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2'(x)dx \\ =&[f_1(M)f_2(M) - f_1(-M)f_2(-M)]_{M=\infty} \\ &-\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)f_1'(x)dx.\end{aligned} \qquad (1\text{-}1\text{-}6)''$$

注意 当极限 $\lim\limits_{M\to\infty}[F(M) - F(-M)]$存在时，极限

$$\lim_{M\to\infty} F(M), \qquad \lim_{M\to\infty} F(-M)$$

可能都不存在.

另外，同样可把定积分的变量替换公式推广到函数 $f(x) = u(x) + jv(x)$的情形.

设 L_k 为实轴上从点 a_k 到 b_k 的有限区间或无穷区间($k=1, 2$)，$f(s) = u(s) + jv(s)$是定义在区间 L_2 上的分段连续函数. 若实变函数 $s = \varphi(t)$在 L_1 上有连续的导数，且将 L_1 一对一地映射为 L_2,则有

$$\int_{a_1}^{b_1} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt = \int_{a_2}^{b_2} f(s)\,ds, \qquad (1\text{-}1\text{-}7)$$

其中 $\varphi(a_1) = a_2, \varphi(b_1) = b_2$.

当积分为广义积分时，式(1-1-7)可理解为“当等式一端的广义积分收敛时,另一端的广义积分也一定收敛且等号成立”.

例如,设 $s = at + b$ (a, b 为实常数,且 $a<0$),有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(at+b)\,dt = \frac{1}{a}\int_{\infty}^{-\infty} f(s)\,ds = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,ds.$$

式(1-1-7)还可推广到 $\varphi(t)=x(t)+jy(t)$ 的情形:

设 $\varphi(t)$ 在 L_1 上有连续的导数,且将 L_1 一对一地映射为有向曲线 C_2: $s=x(t)+jy(t)\quad(a_1\leqslant t\leqslant b_1)$. 若 $f(s)=u(s)+jv(s)$ 在 C_2 上分段连续,则有

$$\int_{a_1}^{b_1} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=\int_{C_2} f(s)ds, \tag{1-1-7$'$}$$

其中沿曲线 C_2 的积分为复变函数的积分,s 为复变量.

从式(1-1-1)和(1-1-3)可以看出,对主值意义下的广义积分,积分的线性性质,积分对区间的可加性,以及积分上、下限交换而积分值变号的规则都仍然成立.

今后所遇到的积分都是在主值意义下的广义积分,并且经常假设函数 $f(t)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上是绝对可积的,即积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt$$

收敛. 这时,$f(t)$ 在有限区间上不一定可积①,若 $f(t)$ 在任何有限区间上也可积,则广义积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,dt$$

收敛,从而在主值意义下的广义积分也收敛,且两种广义积分值相等,上述所有积分公式在两种意义下也都相同. 为了简便起见,今后将采用普通的广义积分记号来表示在主值意义下的广义积分,且简称为广义积分.

例 1 计算广义积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\beta+j\omega)|t|}dt\qquad(\omega,\beta>0\text{ 为实常数}).$$

---

① 如函数 $f(x)=\begin{cases}1,\ x\text{ 为区间}[-1,1]\text{中有理数};\\-1,\ x\text{ 为区间}[-1,1]\text{中无理数};\\0,\text{其它}.\end{cases}$

解 被积函数是积分变量 t 的偶函数，由偶函数的积分性质和式(1-1-5)得

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\beta+j\omega)|t|}dt = 2\int_{0}^{\infty} e^{-(\beta+j\omega)t}dt$$

$$= \frac{-2}{\beta+j\omega}e^{-(\beta+j\omega)t}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{2}{\beta+j\omega}.$$

在上述积分过程中，ω 是可取任意实数值的常数，当 ω 在某个区间上变化时，对于固定的 $\beta>0$，对应积分值是 ω 的函数，该积分是含参变量 ω 的广义积分；当 β 也在 $\beta>0$ 的某个区间上变化时，对应积分值是 $s=\beta+j\omega$ 的函数，这时该积分是含复参变量 s 的广义积分. 计算这类含参变量的广义积分有时比较麻烦. 例如，积分式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2}\cos\alpha x dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}e^{-\alpha^2/(4\beta)} \quad (\beta>0, \alpha \text{ 为实数}) \qquad (1\text{-}1\text{-}8)$$

的证明就很麻烦(见书末附录 I 中一).

在上式中，令 $\alpha=0$ 可得

$$2\int_{0}^{\infty} e^{-\beta x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}. \qquad (1\text{-}1\text{-}8)'$$

今后将用到这两个公式，希望读者注意.

例 2 设 $\beta>0$，试计算下列含参变量的积分

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta t^2}e^{-j\omega t}dt,$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}e^{-\omega^2/(4\beta)}e^{j\omega t}d\omega.$$

解 由式(1-1-8)′，这两个积分都是绝对收敛的. 于是由奇、偶函数的积分性质和式(1-1-8)可得

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta t^2}\cos\omega t\, dt - j\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta t^2}\sin\omega t\, dt$$

$$=2\int_0^{\infty} e^{-\beta t^2}\cos\omega t\,dt=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}e^{-\omega^2/(4\beta)},\quad -\infty<\omega<\infty.$$

同理可得

$$f(t)=e^{-\beta t^2}\qquad(-\infty<t<\infty).$$

从该例可以看出，函数 $f(t)$ 和 $F(\omega)$ 存在如下关系

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\quad 且\ f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

于是

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right]e^{j\omega t}d\omega.\tag{1-1-9}$$

式(1-1-9)称为函数 $f(t)$ 的复指数形式的 Fourier 积分公式. 我们自然会提出这样的问题，函数 $f(t)$ 满足什么条件才使上述 Fourier 积分公式成立呢？下面就来讨论这个问题.

二、Fourier 积分定理和 Fourier 变换的概念

Fourier 积分定理 若函数 $f(t)$ 在区间 $(-\infty,\ \infty)$ 上满足下列两个条件

1° $f(t)$ 在任意有限区间 $[a,\ b]$ 上满足狄里赫莱(Dirichlet)条件. 即 $f(t)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续或具有有限个第一类间断点，且至多只有有限个极值点.

2° $f(t)$ 在 $(-\infty,\ \infty)$ 上绝对可积. 即 $|f(t)|$ 在区间 $(-\infty,\ \infty)$ 上的广义积分收敛.

则含参变量 ω 的广义积分

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\quad(-\infty<\omega<\infty)\tag{1-1-10}$$

收敛且在 $f(t)$ 的连续点 t 处有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega,\tag{1-1-11}$$

即

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right]e^{j\omega t}d\omega. \qquad (1\text{-}1\text{-}12)$$

在 $f(t)$ 的间断点 t 处，式(1-1-11)或 (1-1-12) 右端的积分值应为

$$\frac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)].$$

今后我们书写式(1-1-11)或(1-1-12) 总是指它在 $f(t)$ 的连续点处成立，不再另作说明. 上面定理的证明很麻烦，故从略.

定义 2 设在某种条件下(如 $f(t)$ 满足 Fourier 积分定理的条件)，式(1-1-10)和(1-1-11)都有意义，则称由函数 $f(t)$ 给定的广义积分(1-1-10)为 $f(t)$ 的 **Fourier 变换式**. 记为

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)],$$

其中 $F(\omega)$ 称为 $f(t)$ 的**象函数**. 另一方面，称由函数 $F(\omega)$ 所给定的积分式(1-1-11)为 $F(\omega)$ 的 **Fourier 逆变换式**，记为

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)],$$

其中 $f(t)$ 又称为 $F(\omega)$ 的**象原函数**.

显然，在不考虑函数在间断点处取值的意义下，上述函数 $f(t)$ 与 $F(\omega)$ 是一一对应的，因此称 $f(t)$ 与 $F(\omega)$ 构成了一个 **Fourier 变换对**. 记为 $f(t)\leftrightarrow F(\omega)$.

例 2 中，函数 $f(t)=Ae^{-\beta t^2}(A>0,\ \beta>0)$ 称为**钟形脉冲函数**. 其 Fourier 变换为

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}Ae^{-\beta t^2}e^{-j\omega t}\,d\tau=A\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}e^{-\omega^2/(4\beta)}.$$

于是有

$$Ae^{-\beta t^2}\leftrightarrow A\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}e^{-\omega^2/(4\beta)}.$$

可以证明，当函数 $f(t)$ 满足 Fourier 积分定理条件时，Fourier

积分公式(1-1-12)可以改写为三角形式，即

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega\ (t-\tau)d\tau\right]d\omega$$

$$=\begin{cases} f(t), & \text{在 } f(t) \text{ 连续点处;} \\ \dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}, & \text{其它.} \end{cases} \qquad (1\text{-}1\text{-}13)$$

事实上，由欧拉(Euler)公式：$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$ 有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\ e^{-j\omega\tau}d\tau\right]e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau\ \right]d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega\ (t-\tau)d\tau\right.$$

$$\left.+j\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\sin\omega\ (t-\tau)d\tau\right]d\omega.$$

在方括号内，实部积分和虚部积分分别是ω的偶函数和奇函数.再由奇、偶函数的积分性质，可知要证等式(1-1-13)成立.

例 3 设函数 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|<1;\\ 0, & |t|>1.\end{cases}$ 求 $\mathscr{F}[f(t)]$，且证明等式

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{\omega}\sin\omega\cos\omega t d\omega=\begin{cases}\pi/2, & |t|<1;\\ \pi/4, & |t|=1;\\ 0\ , & |t|>1.\end{cases} \qquad (*)$$

解 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$

$$=\int_{-1}^{1} e^{-j\omega t}dt=\frac{-1}{j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-1}^{1}=\frac{2\sin\omega}{\omega}.$$

根据 Fourier 积分定理，其 Fourier 逆变换为

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega}\sin\omega\cos\omega t d\omega$$

$$+\frac{j}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega}\sin\omega\sin\omega t d\omega$$

$$=\begin{cases}f(t), & |t|\neq 1;\\ \frac{1}{2}[f(\pm1+0)+f(\pm1-0)], & |t|=1.\end{cases}$$

再由奇、偶函数的积分性质得

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\omega}\sin\omega\cos\omega t d\omega=\begin{cases}1, & |t|<1;\\ 0, & |t|>1;\\ \frac{1}{2}, & |t|=1.\end{cases}$$

等式两边都乘以$\frac{2}{\pi}$可得要证等式.

在等式(*)中，令 $t=0$ 可得下面重要的积分——Dirichlet 积分

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}. \tag{1-1-14}$$

该积分不能用求原函数的方法直接计算,Fourier 积分定理为求这类积分的值提供了一种比较简便的方法.

习 题 一

1. 求下列函数的Fourier变换

(1) 矩形脉冲函数

$$f(t)=\begin{cases}A, 0<t<\tau, (A\neq 0);\\ 0, \text{其它}.\end{cases}$$

(2) $f(t)=e^{-\beta|t|}$, $(\beta>0)$;　　(3) $f(t)=e^{-|t|}\cos t$

2. 求下列函数的Fourier积分

(1) $f(t)=\begin{cases}1-t^2, |t|\leqslant 1\\ 0, |t|>1;\end{cases}$