SCHAUM'S outlines

全美经典 学习指导系列

微积分

〔美〕M. R. 施皮格尔 著

施建兵 朱卓宇 冯玉英 孙越泓 译

- 涵盖课程的基本内容，是任一教材的补充
- 925道详细解答的习题和几百道练习题
- 理想的自学读物
- 取得好成绩的帮手

科学出版社

麦格劳-希尔教育出版集团

全美经典学习指导系列

微　积　分

〔美〕M.R.施皮格尔　著

施建兵　朱卓宇　冯玉英　孙越泓　译

科学出版社

麦格劳-希尔教育出版集团

2002

内 容 简 介

本书在美国是最受欢迎的微积分教辅读物之一.

本书内容涵盖了一元和多元函数的微积分及其应用,并包括了无穷级数、广义积分、Γ函数、B函数、傅里叶积分、椭圆积分和复变函数等.

全书每章均先给出了相关的定义、原理和定理,然后分类给出了例题和补充习题.例题主要是针对学生的疑点和难点设计的,是对理论的解释和扩充.补充习题有助于学生对每章的内容进行系统地复习.

本书可供高等院校、理工科学生参考.

Murray R. Spiegel: Schaum's Outline of Theory and Problems of Advanced Calculus

ISBN:0-07-060229-8

图字:0-2001-1772 号

图书在版编目(CIP)数据

微积分/(美)施皮格尔(Spiegel, M. R.)著;施建兵等译.—北京:科学出版社,2002

(全美经典学习指导系列)

ISBN 7-03-009712-2

Ⅰ.微… Ⅱ.①施…②施… Ⅲ.微积分 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 064979 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

西源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年1月第 一 版 开本:A4 (890×1240)

2002年1月第一次印刷 印张:22

印数:1—5 000 字数:633 000

定价: 30.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈北燕〉)

前　　言

对于通常称为“高等微积分”的教材，不同的人往往会有不同的要求．某些人会认为，该教材应从高等的观点，即用严谨的语言、严格的定理证明来阐述初等微积分．而另外一些人则会认为，该教材应讲述若干个专门的高等课题，这些课题既是重要的，又是初等微积分所没有涉及到的．

本书力图在这些截然不同的观点之间选取一个合理的折衷方案，以便具有广泛的适用性．本书前面几章对初等微积分中提过的基本概念作了回顾和拓展，这对那些先前学过微积分但现在有些遗忘并需要有点新鲜感的人来说是非常有价值的．它也为学过各类初等微积分课程的学生提供了一个共同的框架．本书后面几章介绍了几个专门的高等课题，这将为那些努力成为各自领域内的专家——科学家、工程师和数学家的人打下坚实的基础．

本书既可以作为当前标准教材的参考书，也可以作为高等微积分课程的正式教材．事实也证明，本教材对在物理、工程及其他众多使用高等数学方法的领域内选读课程的学生来说，也是十分有用的．

本书每一章都首先清楚地给出相关的定义、原理和定理以及例证和其他的说明，再分类给出习题解答和补充习题．习题解答主要是为了解决学生的疑问和困惑，因而既有对理论的解释和扩充，又有对至关重要的基本原理的复述．这类习题还包含了许多定理的证明和基本结论的推导．大量的补充习题及答案有助于学生对每一章的内容进行系统的复习．

本书内容包括一元和多元函数的微分学和积分学及其应用．本书还尽早引入并使用了向量方法，该方法既方便了简单记号的采用，也容易作出物理和几何的解释．专门课题包括线、面积分及其积分定理、无穷级数、广义积分、Γ 函数和 B 函数、傅里叶级数等．附加的特色内容有傅里叶积分、椭圆积分和复变函数，这些内容在高等工程学、物理学和数学的研究中都是极为有用的．

本书包含了比其他大多数教材多得多的内容．这样使得本书使用起来更为灵活，也为读者提供了一本更为有用的参考书，同时还将激发读者更多的兴趣．

我要借此机会感谢 Schaum 出版公司的工作人员，感谢他们的热忱合作及无尽的努力，使本书得以完美出版．

M.R.施皮格尔

目　　录

第一章　数

集合

集合的概念是数学的基础,集合是具有特定性质的事物的全体.比如全体的大学教授组成一个集合,所有的英文字母 $A,B,C,D,\cdots,Z$ 组成一个集合等等.集合中的每个个体称为集合的成员或元素,集合的任一部分称为这个集合的子集,如 A,B,C 是 $A,B,C,D,\cdots,Z$ 这个集合的子集.不包含任何元素的集合称为空集或零集.

实数

对学生来说,下面提到的数的类型都是熟悉的.

1. **自然数** $1,2,3,4,\cdots$ 也称为正整数,常用来数一个集的元素.不同时代记号各不相同,如罗马人用Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ,$\cdots$.任何两个自然数 a 和 b 的和 $a+b$ 及积 $a\cdot b$ 或 ab 也是自然数.为此我们常说自然数集合在加法和乘法运算下是封闭的,或说自然数集合关于这些运算具有封闭性.
2. **负整数和零**分别用 $-1,-2,-3,\cdots$ 和 0 表示.它们产生了 $x+b=a$ 这类方程的可能的解,其中 a 和 b 是任何的自然数.由此引出了减法运算,即加法的逆运算,我们把它记为 $x=a-b$.

   正整数,负整数和零组成的集合称为整数集.
3. **有理数或分数**如 $\frac{2}{3},-\frac{5}{4},\cdots$,是由 $bx=a$ 这类方程的可能的解产生的,其中 a,b 是整数,$b\neq0$.由此引出了除法运算即乘法的逆运算,我们将它记为 $x=\frac{a}{b}$ 或 $a\div b$,其中 a 为分子,b 为分母.

   整数集是有理数集的子集,因为整数相应于分母 $b=1$ 的有理数.
4. **无理数**如 $\sqrt{2}$ 和 π 是不属于有理数的那类数,即不能表示成 $\frac{a}{b}$(称为 a 和 b 的商),其中 a,b 是整数,$b\neq0$.

   有理数和无理数组成的集合称为实数集.

实数的小数表示

任何实数都可用十进制小数形式表示,比如 $\frac{17}{10}=1.7,\frac{9}{100}=0.09,\frac{1}{6}=0.16666\cdots$.在有理数情形,小数展开式或是有限位的,或是展开式中一个或一组数字最终将不断重复.永无止境,例如 $\frac{1}{7}=0.1428571428571428\cdots$.在无理数中如 $\sqrt{2}=1.41423\cdots$ 或 $\pi=3.14159\cdots$ 不会出现这种重复.我们总是把十进制小数展开式看成是无限位的,如 1.375 与 $1.375000\cdots$ 或 $1.374999\cdots$ 是相同的.为了表明循环小数,我们有时在循环重复的数字上方加上点,如 $\frac{1}{7}=0.\dot{1}4285\dot{7}$,$\frac{19}{6}=3.1\dot{6}$.

十进制使用 10 个数字 $0,1,2,\cdots,9$,但也可能用更少或更多的数字设计数系,如二进制仅用 2 个数字 0 和 1(见习题 32 和习题 33).

实数的几何表示

实数看作是一直线上点的几何表示是众所周知的,我们称这条直线为实轴,如图 1-1 所示.对每一个实数在直线上有且仅有一个点与它对应,反之亦然,即实数集与直线上的点集之间存在一一对应.由于这个原因我们常能互换地使用点和数.

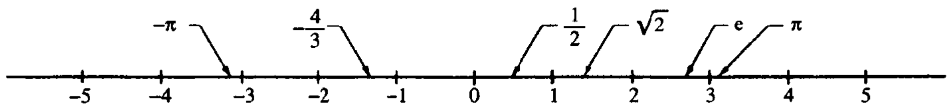

图 1-1

零右边的实数集称为正数集,零左边的实数集称为负数集,而零本身既不是正数也不是负数.

直线上任何两个有理数(或无理数)之间有无穷多个有理数(和无理数),故我们称有理数集(或无理数集)是处处稠密集.

实数的运算

如果 a,b,c 属于实数集 R,那么,

1. $a+b$ 和 ab 属于 R,　　封闭律
2. $a+b=b+a$,　　加法交换律
3. $a+(b+c)=(a+b)+c$,　　加法结合律
4. $ab=ba$,　　乘法交换律
5. $a(bc)=(ab)c$,　　乘法结合律
6. $a(b+c)=ab+ac$,　　分配律
7. $a+0=0+a=a, 1\cdot a=a\cdot 1=a$.
   0 称为关于加法的单位元,1 称为关于乘法的单位元.
8. 对任一实数 a,存在 R 中一个实数 x,满足 $x+a=0$.
   x 称为 a 关于加法的逆,记为 $-a$.
9. 对任一 $a\neq 0$,存在 R 中的一个数 x,满足 $ax=1$.
   x 称为 a 的倒数或 a 关于乘法的逆,记为 a^{-1} 或 $1/a$.

根据这些代数的一般规则我们就可以进行运算了.一般地,任何一个集合(比如 R),如果其元素满足上述运算性质,则称为一个域.

不等式

如果 $a-b$ 是一个非负数,那么我们称 a 大于或等于 b 或称 b 小于或等于 a,记为 $a\geqslant b$ 或 $b\leqslant a$.如果 $a=b$ 不可能成立,则我们记为 $a>b$ 或 $b<a$.几何上,如果在实轴上对应于 a 的点位于对应于 b 的点的右边,则 $a>b$.

例:$3<5$ 或 $5>3$;$-2<-1$ 或 $-1>-2$;$x\leqslant 3$ 指的是 x 为 3 或小于 3 的实数.

若 a,b,c 是任意给定的实数,则

1. 或是 $a>b$,或是 $a=b$,或是 $a<b$,　　三分律
2. 若 $a>b, b>c$,则 $a>c$,　　传递律
3. 若 $a>b$,则 $a+c>b+c$,
4. 若 $a>b, c>0$,则 $ac>bc$,
5. 若 $a>b, c<0$,则 $ac<bc$.

实数的绝对值

实数 a 的绝对值,用 $|a|$ 表示,定义为 a 若 $a>0$; $-a$ 若 $a<0$;0 若 $a=0$.

例: $|-5|=5$, $|+2|=2$, $\left|-\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4}$, $|-\sqrt{2}|=\sqrt{2}$, $|0|=0$.

1. $|ab|=|a|\cdot|b|$ 或 $|abc\cdots m|=|a|\cdot|b|\cdot|c|\cdots|m|$,
2. $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ 或 $|a+b+c+\cdots+m|\leqslant|a|+|b|+|c|+\cdots+|m|$,
3. $|a-b|\geqslant|a|-|b|$.

实轴上任何两点(实数) a 和 b 之间的距离是 $|a-b|=|b-a|$.

指数和根

一实数 a 自身相乘 p 次后的积 $a\cdot a\cdots a$ 用 a^p 表示,其中 p 称为指数, a 称为底. 下列法则成立:

1. $a^p\cdot a^q=a^{p+q}$,　　3. $(a^p)^r=a^{pr}$,

2. $\frac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$,　　4. $\left(\frac{a}{b}\right)^p=\frac{a^p}{b^p}$.

只要分母不为零,上述 p,q,r 可推广到任意实数. 特别地利用 2,分别取 $p=q$ 和 $p=0$ 得 $a^0=1$, $a^{-q}=1/a^q$.

如果 $a^p=N$,其中 p 是正整数,则我们称 a 为 N 的 p 次根,记为 $\sqrt[p]{N}$, N 的 p 次实根可能不止一个. 例如由于 $2^2=4$, $(-2)^2=4$,所以 4 有两个实平方根,2 和 -2,习惯上用 $\sqrt{4}=2$ 表示正的平方根,用 $-\sqrt{4}=-2$ 表示负的平方根.

若 p 和 q 是正整数,我们定义 $a^{p/q}=\sqrt[q]{a^p}$.

对数

如果 $a^p=N$,则称 p 为以 a 为底的 N 的对数,记为 $p=\log_a N$. 如果 a 和 N 是正的且 $a\neq 1$,那么 p 仅有一个实值. 对数具有下列运算规则:

1. $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$,　　2. $\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$,

3. $\log_a M^r=r\log_a M$.

实际中常用 2 个数作为底. 常用对数用底 $a=10$,纳皮尔系统(自然对数)用自然底 $a=\mathrm{e}=2.71828\cdots$.

实数系的公理化基础

合乎逻辑地构建数系,能够开始于一组公理或来自于经验的“自明”的事实. 例如第 4 页上的 1～9 条.

如果我们假定已知自然数及加法和乘法运算(尽管它甚至可能远早于集概念的出现),我们发现将 R 换成自然数时第 4 页上第 7～9 条不成立,但 1～6 条仍成立.

选取 7 和 8 条作为附加要求,我们引入数 $-1,-2,-3,\cdots$ 和 0,然后利用第 9 条,我们引入了有理数.

利用公理 1～6 条可定义关于这些新得到数的运算,其中 R 现在是整数集. 这样就得到了像 $(-2)(-3)=6$, $-(-4)=4$, $(0)(5)=0$ 等在小学数学中认为是理所当然这样陈述的证明.

我们对整数也能引入序或不等式的概念,从而推广到有理数的不等式问题. 例如若 a,b,c,d 是正整数,我们定义 $a/b>c/d$ 当且仅当 $ad>bc$. 对负整数可作类似的推广.

一旦我们有了有理数集和关于它们的不等式规则,我们就能够在几何上作为实轴上的点

把它们排序,正如前面已指出的那样.然后我们可以证明在这条直线上存在着不能表示为有理数的点(如$\sqrt{2}$,π 等等).这些无理数可用各种不同方式定义,其中之一利用了戴德金(Dedekind)分割的思想(见习题 34),从这一点可说明关于无理数怎样应用代数的一般规则.关于实数就不作进一步的说明了.

点集,区间

位于实轴上的点(实数)集称为一维点集.

满足 $a \leqslant x \leqslant b$ 的 x 点集称为闭区间,用$[a,b]$表示;$a<x<b$ 集合称为开区间,用(a,b)表示;集合 $a<x \leqslant b$ 和$a \leqslant x<b$,分别用$(a,b]$和$[a,b)$表示,称为半开半闭区间.

能表示一个集合中的任何数或任何点的记号 x 称为变量.给定的数 a 或b 称为常量.

例:满足$|x|<4$ 即 $-4<x<4$ 的全体 x 组成的集合表示为$(-4,4)$,是一个开区间.

集合 $x>a$ 也能表示成$a<x<\infty$,这样的一个集合称为无穷或无界区间,类似地$-\infty<x<+\infty$表示所有的实数 x.

可数性

一个集合称为是可数的,如果这个集合的元素与自然数构成 1-1 对应的关系.

例:偶自然数 2,4,6,8,…是可数集,因为有如下的 1-1 对应:

$$\begin{array}{lccccc} \text{已知集} & 2 & 4 & 6 & 8 & \cdots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \text{自然数} & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \end{array}$$

一个集合是无限的,如果它与它的一个子集构成 1-1 对应的关系.一个可数的无限集称为可数无限的.

有理数集是可数无限的,而无理数集或全体实数不是可数无限的(见习题 17~20).

集合中元素的个数称为它的基数.可数无限集的基数指定为$\aleph_0$(希伯来字母阿列夫零),实数集(或与实数集 1-1 对应的任何集)的基数定为 C,C 称为连续统的基数.

邻域

所有满足$|x-a|<\delta$ 的点x 组成的集合称为a 的一个δ 邻域,其中 $\delta>0$.所有满足 $0<|x-a|<\delta$ 的点组成的集合称为a 的一个去心δ 邻域,这里 $x=a$ 点除去了.

极限点

若一数 l 的每一个去心δ 邻域中都包含某一集合中的元素,则称 l 为这个集合的极限点或聚点.换句话说即对任何 $\delta>0$,无论 δ 多么小,总能找到这个集中不同于 l 的点 x,满足$|x-l|<\delta$.考虑到越来越小的 δ 值,我们看到必有无穷多个这样的 x 值.

一有限集不可能有极限点,无限集可能有也可能没有极限点.自然数集没有极限点,而有理数集有无限多个极限点.

包含所有极限点的集合称为闭集.有理数集不是闭集,因为像极限点$\sqrt{2}$就不是这个集合的元素(见习题 5),但集合 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 是闭集.

界

如果对一个集合中的所有数 x,存在一个数 M,满足 $x \leqslant M$,则称这个集是上有界的,M 为它的一个上界.类似地,若 $x \geqslant M$,则这个集是下有界的,m 称为它的一个下界.如果对所有的 x 有 $m \leqslant x \leqslant M$,则称这个集是有界的.

如果数$\underline{M}$ 满足:这个集中没有一个元素比它大,但对每个 $\varepsilon>0$,至少有一个元素超过$\underline{M}-\varepsilon$,则称$\underline{M}$ 为这个集的上确界(l. u. b).类似地如果这个集中没有一个元素比 $\overline{M}$ 小,但对

每个 $\varepsilon>0$,至少存在一个元素小于 $\overline{M}+\varepsilon$,则称 $\overline{M}$ 是这个集的下确界(g.l.b).

魏尔斯特拉斯-波尔察诺(Weierstrass-Bolzano)定理

魏尔斯特拉斯-波尔察诺定理:每个有界的无限集至少有一个极限点.这个定理的证明在第三章习题23中给出.

代数数和超越数

考虑方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0, \tag{1}$$

其中 $a_0\neq0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是整数,n 为正整数,则称(1)式为整系数多项式方程.n 称为方程的次数.若一个数 x 是某个整系数多项式方程的解,则称这个数为代数数,不能成为一个整系数多项式方程的解的数称为超越数.

例:$\frac{2}{3}$ 和 $\sqrt{2}$ 分别是方程 $3x-2=0$ 和 $x^2-2=0$ 的解,因而它们都是代数数.

可以证明,数 π 和 e 是超越数.但我们还不能确定像 $e\pi$ 或 $e+\pi$ 这样的数是代数数还是超越数.

代数数的集合是一个可数的无限集(见习题23),但超越数的集合是一个不可数的无限集.

复数系

由于没有一个实数 x 满足多项式方程 $x^2+1=0$ 或相类似的方程,所以引入了复数集.

我们可以把复数看作具有 $a+bi$ 这种形式,其中 a、b 是实数,分别称为这个数的实部和虚部,$i=\sqrt{-1}$ 称为虚数单位.两个复数 $a+bi$ 和 $c+id$ 是相等的当且仅当 $a=c,b=d$.只要在复数 $a+bi$ 中令 $b=0$ 即得实数,故我们可以把实数集看成是复数集的子集.复数 $0+0i$ 相当于实数.

$a+bi$ 的绝对值或模定义为 $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$.$a+bi$ 的共轭复数定义为 $a-bi$,复数 z 的共轭复数常用 $\bar{z}$ 或 z^* 表示.

复数集满足第4页上1～9条规则,因此构成一个域.在用复数进行运算时,我们可以像在实数代数中的运算一样进行运算,只要在 i^2 出现时用 -1 代替.复数的不等式没有定义.

从复数公理基础的观点来看,把一个复数处理成具有某种运算规则的实数 a 和 b 的序对 (a,b) 是合乎需要的,当然这些规则应该是等同于上面提到的那些规则.例如我们规定 $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$,$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$,$m(a,b)=(ma,mb)$,等等.我们发现 $(a,b)=a(1,0)+b(0,1)$,把这与 $a+bi$ 联系起来,i 相当于记号 $(0,1)$.

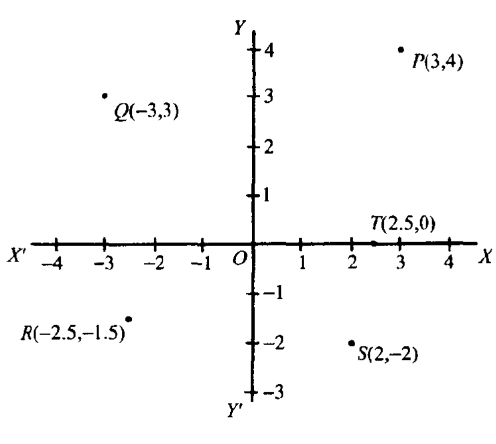

图 1-2

复数的极式

若在两条相互垂直的轴 $X'OX$ 和 $Y'OY$(x 轴和 y 轴)上选定了刻度,如图1-2,我们可通过序对 (x,y),在这些线决定的平面上标出任何点的位置.称 (x,y) 为这个点的直角坐标.例如在图2-1中 P、Q、R、S、T 标明了这些点的位置.

由于复数 $x+iy$ 可看成一个序对 (x,y),所以我们可以用 xy 平面上的点表示这种数,这种平面我们称为复平面.参照图1-3,我们看到 $x=$

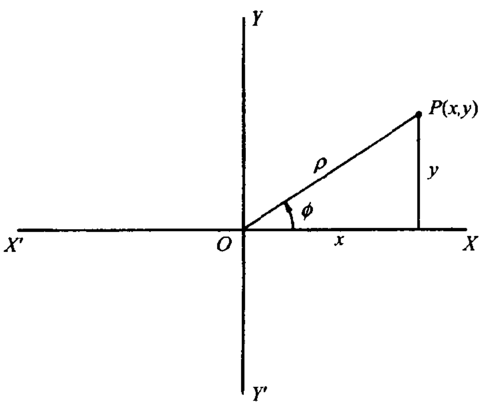

图 1-3

$\rho\cos\phi$, $y=\rho\sin\phi$,其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}=|x+iy|$. ϕ 称为辐角,是指直线 OP 与轴 OX 正向构成的夹角,于是有

$$z = x + iy = \rho(\cos\phi + i\sin\phi), \tag{2}$$

称这种形式为复数的极式,其中 ρ 和 ϕ 称为极坐标.有时为方便起见将 $\cos\phi+i\sin\phi$ 记为 $\mathrm{cis}\phi$.

如果 $z_1=x_1+iy_1=\rho_1(\cos\phi_1+i\sin\phi_1)$, $z_2=x_2+iy_2=\rho_2(\cos\phi_2+i\sin\phi_2)$,那么有

$$z_1z_2 = \rho_1\rho_2\{\cos(\phi_1+\phi_2)+i\sin(\phi_1+\phi_2)\}, \tag{3}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\{\cos(\phi_1-\phi_2)+i\sin(\phi_1-\phi_2)\}, \tag{4}$$

$$z^n = \{\rho(\cos\phi+i\sin\phi)\}^n = \rho^n(\cos n\phi + i\sin n\phi), \tag{5}$$

其中 n 是任一实数,方程(5)有时称为棣莫弗(De-Moivre)定理.我们可利用这一式子确定复数的根.例如若 n 是一个正整数,则

$$\begin{aligned} z^{\frac{1}{n}} &= \{\rho(\cos\phi+i\sin\phi)\}^{1/n} \\ &= \rho^{1/n}\left\{\cos\left(\frac{\phi+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\phi+2k\pi}{n}\right)\right\}, k=0,1,2,3,\cdots,n-1. \end{aligned} \tag{6}$$

由此可见,一般地 $z^{\frac{1}{n}}$ 有 n 个不同的值.后面(第十一章)将指出 $e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi$,其中 $e=2.71818\cdots$,称这为欧拉公式.

数学归纳法

数学归纳法原理是正整数的一个重要性质.在证明一个涉及所有正整数的命题时,例如当 $n=1,2,3$ 时已知命题是正确的,而对所有的整数猜测命题也是成立时,数学归纳法尤其有用.证明方法包含以下几步:

1. 证明 $n=1$(或 n 为其他某个正整数)时命题成立.
2. 假定 $n=k$ 时命题成立,其中 k 是任何正整数.
3. 从 2 中的假定出发证明 $n=k+1$ 时命题一定是成立的
   这是建立归纳的证明部分,或许是困难的或许是不可能的.
4. 由于 $n=1$ 时命题是正确的(从第 1 步).所以从第 3 步对 $n=1+1=2$ 命题一定是正确的,从这可得到 $n=2+1=3$ 时命题是正确的,等等,故对所有的正整数命题是正确的.

习题与解答

数的运算

1. 假定 $x=4$, $y=15$, $z=-3$, $p=\frac{2}{3}$, $q=-\frac{1}{6}$, $r=\frac{3}{4}$,计算(a) $x+(y+z)$,(b) $(x+y)+z$,(c) $p(qr)$,(d) $(pq)r$,(e) $x(p+q)$.

解 ☞ (a) $x+(y+z)=4+[15+(-3)]=4+12=16$.

(b) $(x+y)+z=(4+15)+(-3)=19-3=16$.

(a)与(b)相等这一个事实阐明了加法的结合律.

(c) $p(qr)=\frac{2}{3}\left\{\left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\right\}=\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{24}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{8}\right)=-\frac{2}{24}=-\frac{1}{12}$.

(d) $(pq)r=\left\{\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)\right\}\left(\frac{3}{4}\right)=\left(-\frac{2}{18}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=\left(-\frac{1}{9}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{3}{36}=-\frac{1}{12}$.

(c)与(d)相等这一事实阐明了乘法结合律.

(e) $x(p+q)=4\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)=4\left(\frac{4}{6}-\frac{1}{6}\right)=4\cdot\left(\frac{3}{6}\right)=\frac{12}{6}=2$.

另一解法：$x(p+q)=xp+xq=(4)\left(\frac{2}{3}\right)+(4)\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{8}{3}-\frac{4}{6}$

$=\frac{8}{3}-\frac{2}{3}=\frac{6}{3}=2$(利用乘法分配律).

2. 解释为什么不能把(a) $\frac{0}{0}$,(b) $\frac{1}{0}$看作是数?

解 ☞　(a) 如果我们把满足 $bx=a$ 的那个数(假定它是存在的)定义为$\frac{a}{b}$,那么 0/0 就是满足 $0\cdot x=0$ 的那个数 x,但是这对所有数都是成立的.由于没有惟一的一个数来表示 0/0,所以我们认为它不能定义为数.

(b) 正如(a)中一样,如果我们把 1/0 设为数 x(假定它存在),则需满足 $0\cdot x=1$,可见没有这样的数存在.

由于这些原因,我们必须把除以零看成是无意义的.

3. 化简$\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3}$.

解 ☞　假定可约因子$(x-3)$不为零,即 $x\neq3$,则有$\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3}=\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+1)}=\frac{x-2}{x+1}$;当 $x=3$ 时,已知分式是没有定义的.

有理数和无理数

4. 证明奇整数的平方是奇数.

证明 ☞　任何奇整数可表为 $2m+1$ 形式,因$(2m+1)^2=4m^2+4m+1$ 比偶整数 $4m^2+4m=2(2m^2+2m)$多 1,故结果成立.

5. 证明任一有理数的平方均不会是 2.

证明 ☞　设 p/q 是一有理数,它的平方为 2.其中 p/q 是最简式,即 p 和 q 除 ±1 外无其他的公共整数因子(有时我们称这样的整数是互素的),则$(p/q)^2=2$,$p^2=2q^2$,p^2 是偶数,由习题 4 得 p 是偶数,因为若 p 为奇数则 p^2 也是奇数,从而 $p=2m$.

将 $p=2m$ 代入 $p^2=2q^2$ 中得到 $q^2=2m^2$,于是 q^2 是偶数,从而 q 也是偶数.

这样 p 和 q 有公共的因子 2,与原假设矛盾.从而可得任一有理数的平方都不是 2.

6. 说出如何找一有理数,使它的平方任意地逼近于 2.

解 ☞　我们限制在正有理数中进行讨论.由于$(1)^2=1$,$(2)^2=4$,所以我们可选择 1 和 2 之间的有理数,即 1.1,1.2,1.3,…,1.9.

由于$(1.4)^2=1.96$,$(1.5)^2=2.25$,所以我们可考虑 1.4 和 1.5 之间的有理数,即1.41,1.42,…,1.49.

继续使用这种方法,我们可得到越来越逼近的有理数近似值,即$(1.414213562)^2$ 比 2 小,而$(1.414213563)^2$比 2 大.

7. 已知方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$,其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 是整数,a_0 和 a_n 不为 0,证明如果此方程有有理根 p/q,则 p 一定整除a_n,q 一定整除a_0.

证明 ☞　由于 p/q 是方程的一个根,故我们可将其代入方程中,并用 q^n 乘等式两边,得

$$a_0p^n+a_1p^{n-1}q+a_2p^{n-2}q+\cdots+a_{n-1}pq^{n-1}+a_nq^n=0, \tag{1}$$

再用 p 除两边,得

$$a_0p^{n-1}+a_1p^{n-2}q+\cdots+a_{n-1}q^{n-1}=-\frac{a_nq^n}{p}. \tag{2}$$

因(2)式的左边是一个整数,故(2)式的右边也必须是一个整数,那么由 p 和 q 是互素的,p 不能整除 q^n,得 p 必须整除 a_n.

类似地,移动(1)式的第一项,并用 q 除等式两边,同理可说明 q 一定整除 a_0.

8. 证明$\sqrt{2}+\sqrt{3}$不是有理数

证明 ☞ 若 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$,则 $x^2=5+2\sqrt{6}$,$x^2-5=2\sqrt{6}$,平方得 $x^4-10x^2+1=0$,由习题7知这个方程的有理根只可能是 ±1,而 ±1 不能满足方程,这就推出满足方程的根$\sqrt{2}+\sqrt{3}$不是有理数.

9. 证明任意两个有理数之间定有另一个有理数.

证明 ☞ 若 a,b 是有理数,则$\frac{a+b}{2}$是介于 a 和 b 之间的有理数.

为了证明这一点,假定 $a<b$,两边同加上 a,得 $2a<a+b$,$a<\frac{a+b}{2}$.

类似地两边加 b,得 $a+b<2b$,$\frac{a+b}{2}<b$.

于是有 $a<\frac{a+b}{2}<b$.

为了证明$\frac{a+b}{2}$是有理数,设 $a=\frac{p}{q}$,$b=\frac{r}{s}$,其中 p,q,r,s 是整数,且 $q\neq0$,$s\neq0$,则$\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{ps}{qs}+\frac{qr}{qs}\right)=\frac{ps+qr}{2qs}$是有理数.

不等式

10. x 取什么值时不等式 $x+3(2-x)\geqslant4-x$ 成立?

解 ☞ 要使不等式 $x+3(2-x)\geqslant4-x$ 成立,只要满足 $x+6-3x\geqslant4-x$,$6-2x\geqslant4-x$,$6-4\geqslant2x-x$,$2\geqslant x$,即 $x\leqslant2$.

11. x 取什么值时,不等式 $x^2-3x-2<10-2x$ 成立?

解 ☞ 要使这个不等式成立,只要满足 $x^2-3x-2-10-2x<0$,$x^2-x-12<0$,或$(x-4)(x+3)<0$.

这最后的不等式仅在下列情形成立:

情形1:$x-4>0$ 且 $x+3>0$,即 $x>4$ 且 $x<-3$.这是不可能的,因为 x 不能既比4大,又比 -3 小.

情形2:$x-4<0$ 且 $x+3<0$,即 $x<4$ 且 $x>-3$,当 $-3<x<4$ 时这是可以的.

因此对满足 $-3<x<4$ 的点 x,此不等式成立.

12. 若 $a\geqslant0,b\geqslant0$,证明$\frac{1}{2}(a+b)\geqslant\sqrt{ab}$.

证明 ☞ 常用的一种证法是通过假定要证的结果是成立的,由此进行正确的运算得出一个已知的结论,然后再逆推这些步骤(假定这是可行的),结论就得到了.

在这题中,由结论出发,随后得到 $a+b\geqslant2\sqrt{ab}$,$(a+b)^2\geqslant4ab$,$a^2-2ab+b^2\geqslant0$.即$(a-b)^2\geqslant0$.这是正确的.逆推这些步骤.即得要证的结果.

另一证法:由于$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant0$,所以有 $a-2\sqrt{ab}+b\geqslant0$,即$\frac{1}{2}(a+b)\geqslant\sqrt{ab}$.

这个结论可推广为$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$,其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是非负数,左、右两边分别称为数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的算术平均和几何平均.

13. 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是任意实数,证明施瓦茨(Schwarz)不等式

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2).$$

证明 ☞ 对任一实数 λ,有

$$(a_1\lambda+b_1)^2+(a_2\lambda+b_2)^2+\cdots+(a_n\lambda+b_n)^2\geqslant0,$$

展开,合并得到

$$A^2\lambda^2+2C\lambda+B^2\geqslant0, \tag{1}$$

其中

$$A = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2, B = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2, C = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n. \tag{2}$$

现将(1)式写成

$$\lambda^2 + \frac{2C}{A^2}\lambda + \frac{B^2}{A^2} \geqslant 0 \text{ 或} \left(\lambda + \frac{C}{A^2}\right)^2 + \frac{B^2}{A^2} - \frac{C^2}{A^4} \geqslant 0. \tag{3}$$

但这最后一个不等式对所有实数 λ 成立当且仅当$\frac{B^2}{A^2} - \frac{C^2}{A^4} \geqslant 0$ 或 $C^2 \leqslant A^2B^2$，利用(2)式，就得出了所要证的不等式.

14. 证明：对所有大于 1 的正整数 n，$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1$.

证明 ☞　设 $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$，则有$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}$，两式相减，$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}$，从而有 $S_n = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1$.

指数，根和对数

15. 计算下列各式：

(a) $\frac{3^4 \cdot 3^8}{3^{14}} = \frac{3^{4+8}}{3^{14}} = 3^{4+8-14} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

(b) $\sqrt{\frac{(5\cdot10^{-6})(4\cdot10^2)}{8\cdot10^5}} = \sqrt{\frac{5\cdot4}{8}\cdot\frac{10^{-6}\cdot10^2}{10^5}} = \sqrt{2.5\cdot10^{-9}} = \sqrt{25\cdot10^{-10}} = 5\cdot10^{-5}$，即 0.00005.

(c) $\log_{2/3}\left(\frac{27}{8}\right) = x$，则$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$，即 $x = -3$.

(d) $(\log_a b)(\log_b a) = u$，令 $\log_a b = x$，$\log_b a = y$，假定 a、$b > 0$，且 a、$b \neq 0$，则有

$$a^x = b,\ b^y = a \text{ 和} u = xy.$$

因$(a^x)^y = a^{xy} = b^y = a$，所以有 $a^{xy} = a'$，即 $xy = 1$，这就是所要求的值.

16. 若 $M>0, N>0, a>0$，但 $a \neq 1$，证明 $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$.

证明 ☞　设 $\log_a M = x$，$\log_a N = y$，则有 $a^x = M$，$a^y = N$，因此

$$\frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \text{即} \log_a \frac{M}{N} = x - y = \log_a M - \log_a N.$$

可数性

17. 证明在 0 和 1 之间且包含 0 和 1 的所有有理数组成的集合是可数的.

证明 ☞　先写出分母是 2 的所有分式，然后写出分母是 3 的分式，…，像$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$，…这种相等的分式仅写一次，那么与自然数之间有如下的 1-1 对应.

有理数	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}\cdots$
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
自然数	1	2	3	4	5	6	7	8	9…

因此在 0 和 1 之间(包含 0 和 1)的所有有理数组成的集合是可数的，且有基数$\aleph_0$ (见p.4).

18. 若 A 和 B 是两个可数集，证明 A 和 B 中所有元素组成的集合也是可数的.

证明 ☞　由于 A 是可数的，所以在 A 中的元素与自然数之间存在 1－1 对应，因此我们可用 a_1, a_2, a_3，…表示这些元素.

类似地，我们可用 b_1, b_2, b_3，…表示 B 中的元素.

情形 1　假若 A 中的元素均不同于 B 中的元素，我们可建立如下的 1－1 对应：

A 或 B	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3	$\cdots$
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
自然数	1	2	3	4	5	6$\cdots$	

因此由 A 和 B 中所有元素组成的集合也是可数的.

情形 2 若 A 中的一些元素与 B 中的一些元素相同,如习题 17 那样这些元素仅数一次,则属于 A 或 B 中的元素组成的集合是可数的.

由属于 A 或 B(或两者)中的所有元素组成的集合常称为 A 和 B 的并,用 $A\cup B$ 或 $A+B$ 表示.

由包含在 A 和 B 中的元素组成的集合称为 A 和 B 的交,记为 $A\cap B$ 或 AB.若 A 与 B 是可数的,则 $A\cap B$ 也是可数的.

由在 A 中但不在 B 中的元素组成的集合记为 $A-B$.若 $\bar{B}$ 表示不在 B 中的元素组成的集合,则我们也可记 $A-B=A\bar{B}$.若 A 和 B 是可数的,则 $A-B$ 也是可数的.

19. 证明所有的正有理数集是可数的.

证明 ☞ 考虑所有 $x>1$ 的有理数,对每一个这样的有理数,我们可与 $(0,1)$ 上一个且仅有一个 $\frac{1}{x}$ 对应起来,即在大于 1 的所有有理数与 $(0,1)$ 上的所有有理数之间存在着一个 $1-1$ 对应,由习题 17,后一个集合是可数的,从而所有大于 1 的有理数集也是可数的.

于是由习题 18 可推出由所有正有理数组成的集合是可数的(因为这是由两个可数集组成的,一个是在 0 和 1 之间的有理数集,一个是大于等于 1 的有理数集).

由此可见有理数集是可数的(见习题 59).

20. 证明 $[0,1]$ 上所有实数组成的集合是不可数的.

证明 ☞ $[0,1]$ 上的每一个实数有一个小数展开式 $0.a_1a_2a_3\cdots$,其中 $a_1,a_2,\cdots$ 是 $0,1,2,\cdots,9$ 中任一数,假定有限位小数如 0.7324 写成 0.732400…和 0.7323999…是相同的.

如果 $[0,1]$ 上的所有实数是可数的,那么这个集合与自然数之间可以建立如下的 $1-1$ 对应.

$1\leftrightarrow 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\cdots$

$2\leftrightarrow 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\cdots$

$3\leftrightarrow 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\cdots$

$\cdots$

现在我们构造一数 $0.b_1b_2b_3b_4\cdots$,其中 $b_1\neq a_{11},b_2\neq a_{22},b_3\neq a_{33},b_4\neq a_{44},\cdots$,且在某个位置后的所有 b_i 不都是 9.

这个数,在 $[0,1]$ 中,且不同于上面列出的所有数,因此不在此列中,这与包含 $[0,1]$ 中的所有数的假设相矛盾.

由这矛盾推出 $[0,1]$ 上所有实数与自然数不能建立 $1-1$ 对应,即 $[0,1]$ 上的实数集是不可数的.

极限点,界,魏尔斯特拉斯-波尔察诺定理

21. (a)证明数 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots$ 组成的无限集是有界的.

(b)确定这个集的上确界(l.u.b)和下确界(g.l.b).

(c)证明 0 是这个集的极限点.(d)这个集是闭集吗?(e)这集是如何阐明魏尔斯特拉斯-波尔察诺定理?

解 ☞ (a)由于这个集合中的所有元素都小于 2,大于 -1,故这个集合是有界的,2 是它的一个上界,-1 是它的一个下界.

我们可找到更小的上界(如 $\frac{3}{2}$)和更大的下界(如 $-\frac{1}{2}$).

(b)由于这个集合中没有元素比 1 大,且对每一正数 ε,至少存在一个元素(也就是 1)超过 $1-\varepsilon$,故 1 是这个集的上确界.

由于这个集中没有元素比 0 小,且对任一正数 ε,至少存在一个元素小于 $0+\varepsilon$(为了达到这个目的,我们总能选到这样的数 $\frac{1}{n}$,其中 n 是大于 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的正整数).故 0 是这个集的下确界.

(c)设 x 是这个集的任一元素,对任一正数 δ,由于我们总能找到满足 $0<|x|<\delta$ 的元素 x,(即我们总能选 x 为数 $\frac{1}{n}$,其中 n 是大于 $\frac{1}{\delta}$ 的正整数),故 0 是这个集的极限点,换句话说就是不管 $\delta>0$ 取得多

小,0 的去心 δ 邻域中总包含这个集中的元素.

(d)这个集不是闭集,因为极限点 0 不属于这个集合.

(e)由于这个集是有界和无限的,据魏尔斯特拉斯-波尔察诺定理它至少有一个极限点.我们发现这个集合确实属于这种情况,因而说明了这个定理.

代数数和超越数

22. 证明$\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$是代数数.

证明 ☞　设 $x=\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$,则 $x-\sqrt{3}=\sqrt[3]{2}$,两边立方、化简得　$x^3+9x-2=3\sqrt{3}(x^2+1)$,然后两边平方、化简得 $x^6-9x^4-4x^3+27x^2+36x-23=0$.

由于这是一个整系数的多项式方程,所以它的一个解$\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$是代数数.

23. 证明所有的代数数组成的集合是一个可数集.

证明 ☞　代数数是形如 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 这样的多项式方程的解,其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 是整数.

设 $P=|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_n|+n$,对任意给定的 P 值,仅可能有有限个多项式方程,于是仅可能有有限个代数数.

为避免重复,相应于 $P=1,2,3,4,\cdots$记下所有的代数数,这样所有的代数数与自然数之间可以构成 1-1 对应,因而它是可数的.

复数

24. 计算下列各式:

(a) $(4-2i)+(-6+5i)=4-2i-6+5i=4-6+(-2+5)i=-2+3i$.

(b) $(-7+3i)-(2-4i)=-7+3i-2+4i=-9+7i$.

(c) $(3-2i)(1+3i)=3(1+3i)-2i(1+3i)=3+9i-2i-6i^2$

$=3+9i-2i+6=9+7i$.

(d) $\dfrac{-5+5i}{4-3i}=\dfrac{-5+5i}{4-3i}\cdot\dfrac{4+3i}{4+3i}=\dfrac{(-5+5i)(4+3i)}{16-9i^2}=\dfrac{-20-15i+20i+15i^2}{16+9}$

$=\dfrac{-35+5i}{25}=\dfrac{5(-7+i)}{25}=-\dfrac{7}{5}+\dfrac{1}{5}i$.

(e) $\dfrac{i+i^2+i^3+i^4+i^5}{1+i}=\dfrac{i-1+(i)^2(i)+(i^2)^2+(i^2)^2\cdot i}{1+i}=\dfrac{i-1-i+1-i}{1+i}$

$=\dfrac{i}{1+i}\cdot\dfrac{1-i}{1-i}=\dfrac{i-i^2}{1-i^2}=\dfrac{i+1}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$.

(f) $|3-4i||4+3i|=\sqrt{(3)^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{(4)^2+(3)^2}=(5)(5)=25$.

(g) $\left|\dfrac{1}{1+3i}-\dfrac{1}{1-3i}\right|=\left|\dfrac{1-3i}{1-9i^2}-\dfrac{1+3i}{1-9i^2}\right|=\left|\dfrac{-6i}{10}\right|=\sqrt{(0)^2+\left(-\dfrac{6}{10}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$.

25. 若 z_1,z_2 是两复数,证明$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$.

证明 ☞　设 $z_1=x_1+iy_1,z_2=x_2+iy_2$.则

$$
\begin{aligned}
|z_1z_2|&=|(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)|=|x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1)|\\
&=\sqrt{(x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2}=\sqrt{x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2}\\
&=\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}=|x_1+iy_1|\cdot|x_2+iy_2|\\
&=|z_1|\cdot|z_2|.
\end{aligned}
$$

26. 解方程 $x^3-2x-4=0$.

证明 ☞　利用习题 7,可能的有理根是 ±1、±2、±4,通过代入方程试验发现 $x=2$ 是方程的根,那么给定方程可以写成$(x-2)(x^2+2x+2)=0$.而二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解是$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,对 $a=1,b=2,c=2$,得 $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}=\dfrac{-2\pm2i}{2}=-1\pm i$.