初中同步类型题规范解题题典 2001

海淀名师

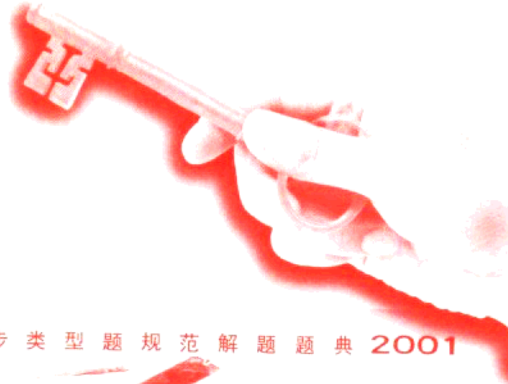
解题新思路

杨晓民 闫彩娟 主编

- 同步题解 实用过人
- 名题典范 一通百通
- 读题解题 全新思维

初三数学

中国和平出版社



初中同步类型题规范解题题典2001

海淀名师

解题新思路

杨晓民 闫彩娟 主编

初三数学

中国和平出版社

1EAE·28/07

初中同步类型题规范解题题典
海淀名师解题新思路
初三数学

主　编　杨晓民　闫彩娟
副主编　王贺纯　陈　波　蒋晓娟　孙艳华

*

中国和平出版社出版发行
（北京市东城区和平里东街民旺甲 19 号　100013）
电话：84252781
北京泽明印刷有限责任公司印刷　新华书店经销
2001 年 6 月第 2 版　2001 年 6 月第 3 次印刷
开本：850×1168 毫米　1/32　印张：17　字数：549 千字
ISBN 7—80101—924—5/G·697　定价：18.00 元

前　言

编写目的

为了帮助广大中学生选择科学有效的思维方式和学习方法，走出学习的误区；教会中学生思考问题解决问题的方法，从而帮助中学生拓宽知识面，培养创新思维，从"学会"向"会学"转变，全面提高素质，以迎接新世纪的挑战。我们根据教育部最新颁布的教学大纲的要求，配合现行教材及培养学生解决问题的能力的需要，编写了这套《海淀名师解题新思路》丛书。

本书特点

本丛书与现行教材同步，全书从"题"的角度强化和训练学生对"知识点"的理解和掌握。从中揭示各知识点应用的范围和规律，并通过示范解题培养学生分析和解决问题的能力。

①不容置疑的权威性。本套丛书的编写者全是教学第一线的特高级教师，他们具有丰富的教学经验与最新最巧的解题思路。

②新颖实用。选题新颖、难易适度，循序渐进，梯度适当，便于各年级学生跟踪学习。

③重分析、重规范。通过分析和介绍"方法"揭示规律，通过"规范解"让学生清楚怎样解题才能得高分。

④题型全、新，容量大，各类题型分配比例合理，便于学生全面系统地掌握所学知识。

⑤重效减负。所使用的例题和习题皆是名题、典型题，针对性强，有助于学生排除题海困扰达到减轻负担、事半功倍的效果。

丛书栏目

本丛书根据学科不同，设计了不同的题型。所设栏目包括【解析】【解题思路】【规范解】【答案】【得分点精析】【解题关键】【错解剖析】，体现了本丛书的实用性和示范性。

真诚愿望

本丛书内容充实实用，若读者能从中得到一点启示，快速提高学习成绩，这是我们的最大心愿。此外，由于编写时间仓促，水平有限，难免出现不足之处，恳请读者给予指正，使之日臻完善。

目 录

上篇 代数部分

下篇 几何部分

代数部分

第十二章　一元二次方程

基础知识

一、一元二次方程

1. 整式方程的概念：方程的两边都是关于未知数的整式，这样的方程叫整式方程.

2. 一元二次方程的概念：只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是2的整式方程叫一元二次方程.

由定义可知必须同时满足：(1)方程中含有一个未知数；(2)未知数的最高次数是2；(3)方程是整式方程，这三个条件的方程才是一元二次方程.

3. 一元二次方程的一般式：$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$

4. 一元二次方程的四种解法：

(1)直接开平方法：$(x-a)^2=b(b\geqslant 0)$　解得 $x=a\pm\sqrt{b}$

注意：若 $b<0$ 时，方程 $(x-a)^2=b$ 无解.

(2)配方法：是以配方为手段，以直接开平方法为基础的一种解一元二次方程的方法.

(3)公式法：

① 一元二次方程求根公式的推导过程：

用配方法解一般形式的一元二交方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$

解：$\because a\neq 0$，$\therefore$ 方程的两边都除以 a，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

移项：得 $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$

配方：得 $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$

即：$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

$\because a\neq 0$，$\therefore 4a^2>0$

$\therefore$ 当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，$\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\geqslant 0$

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

②公式：$\boxed{x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}(b^2-4ac\geqslant 0)}$

注意：(ⅰ)求根公式专指一元二次方程的求根公式．只有确认方程是一元二次方程时，方可使用；(ⅱ)$b^2-4ac\geqslant 0$，其公式成立的条件．

(4)因式分解法：

注意：用因式分解法解一元二次方程的关键一是将方程右边化为0，二是熟练地掌握多项式因式分解的方法．

二、一元二次方程的根的判别式

1．一元二次方程的根的判别式：b^2-4ac 叫一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的差别式，通常用"Δ"表示．

2．一元二次方程的根的情况与判别式 Δ 的关系：

(1)判别式定理：

$\Delta>0\Rightarrow$方程有两个不相等的实数根

$\Delta=0\Rightarrow$方程有两个相等的实数根

$\Delta<0\Rightarrow$方程没有实数根

$\Delta\geqslant 0\Rightarrow$方程有两个实数根

(2)判别式定理的逆定理：

方程有两个不相等的实数根$\Rightarrow\Delta>0$

方程有两个相等的实数根$\Rightarrow\Delta=0$

方程没有实数根$\Rightarrow\Delta<0$

方程有两个实数根$\Rightarrow\Delta\geqslant 0$

3．一元二次方程根的判别式的应用．

(1)不解方程，判定根的情况．

(2)根据方程根的情况，确定方程中字母系数的取值范围．

(3)应用判别式证明方程根的情况．

三、一元二次方程的根与系数的关系

1. 一元二次方程的根与系数的关系(韦达定理)

若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两个实数根是 x_1、x_2,则

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

2. 韦达定理的两个重要推论

(1)如果方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根是 x_1,x_2,那么 $x_1+x_2=-p,x_1\cdot x_2=q$.

(2)以两个数 $x_1\cdot x_2$ 为根的一元二次方程(二次项系数为1)是:

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=0$$

3. 一元二次方程的根与系数的关系的应用.

(1)验根:不解方程,利用韦达定理可以检验两个数是不是一元二次方程的两个根.

(2)由已知方程的一个根,求出另一个根及未知系数.

(3)不解方程,可以利用韦达定理求,$x_1^2+x_2^2,x_1^3+x_2^3,\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2},x_1-x_2,(x_1-x_2)^2,x_1^3-x_2^3,\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}$ 等等.

(4)已知方程的两根求作这个一元二次方程.

(5)已知两数的和与积,求这两个数.

(6)已知方程两个根满足某种关系,确定方程中字母系数的值.

(7)证明方程系数之间的特殊关系.

(8)解决其它问题,如讨论根的范围,判定三角形的形状等.

(9)根的符号的讨论:

利用韦达定理,还可进一步讨论根的符号,设一元二次方程.

$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两根为 x_1、x_2.

①当 $\Delta\geqslant0$,且 $x_1\cdot x_2>0$ 时,两根同号;

(ⅰ)当 $\Delta\geqslant0$ 且 $x_1\cdot x_2>0$,且 $x_1+x_2>0$ 时,两根同时为正数.

(ⅱ)当 $\Delta\geqslant0$ 且 $x_1\cdot x_2>0$ 且 $x_1+x_2<0$ 时,两根同时为负数.

②当 $\Delta>0$ 且 $x_1\cdot x_2<0$ 时,两根异号.

(ⅰ)当 $\Delta>0$ 且 $x_1\cdot x_2<0, x_1+x_2>0$ 时,两根异号且正根的绝对值较大.

(ⅱ)当 $\Delta>0$ 且 $x_1\cdot x_2<0, x_1+x_2<0$ 时,两根异号且负根的绝对值较大.

四、二次三项式的因式分解

1. 二次三项式的因式分解公式:

若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两个实数根是 x_1、x_2,则

$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$　$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$,即 $\dfrac{b}{a}=-(x_1+x_2)$　$\dfrac{c}{a}=x_1\cdot x_2$

$$
\begin{aligned}
\therefore ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\
&= a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2]\\
&= a(x-x_1)(x-x_2)
\end{aligned}
$$

分解公式:$\boxed{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq0)}$

五、一元二次方程的应用

1. 面积问题;
2. 数字问题;
3. 平均增长率(或降低率)问题;
4. 浓度问题.

六、分式方程

1. 分式方程的概念.
2. 解分式方程的基本思想:分式方程 $\xrightarrow{\text{转化}}$ 整式方程.
3. 解分式方程的基本方法:

①去分母;

②换元法.

4. 字母系数的分式方程的解法.
5. 列分式方程解应用题.

七、无理方程

1. 无理方程、有理方程、代数方程的概念.
2. 代数方程的分类:

$$\text{代数方程}\begin{cases}\text{有理方程}:\begin{cases}\text{整式方程}\begin{cases}\text{一元一次方程}\\\text{一元二次方程}\\\text{高次方程}\end{cases}\\\text{分式方程}\end{cases}\\\text{无理方程}\end{cases}$$

3. 解无理方程的基本思想：无理方程$\xrightarrow{\text{转化}}$有理方程

4. 解无理方程的基本方法：

(1)两边平方法；

(2)换元法.

5. 解无理方程产生增根的原因.

6. 验根

八、二元二次方程组

1. 二元二次方程及二元二次方程组.

2. 解二元二次方程组的基本思想和方法.

解二元二次方程组的基本思想是"转化"，将二元转化为一元，将二次转化为一次，转化的基本方法是"消元"和"降次"，因此，掌握好消元和降次的一些方法和技巧是解二元二次方程组的组键.

九、本章注意事项

1. 在解一元二次方程、分式方程、无理方程及二元二次方程组时，方法的选择是关键，灵活选择恰当的解法，会给解题带来很大的方便，反之方法选择不当，有时会使方程(组)很难解或无法解. 一般来说，方法选择的顺序是，先特殊后一般.

2. 在应用一元二次方程的根与系数的关系定理时，要注意讨论隐含条件：(1) $a\neq0$ 是否满足；(2) $\Delta\geqslant0$ 是否具备.

3. 在使用换元法解方程(组)时，切忌半途而废，以为把辅助元的值求出来就结束了.

中考聚焦

这一章在中考占有十分重要的位置，不仅有一元二次方程和分式方程的解法，而且要有它们的实际应用题，并且和实际生活紧密相连，还有更重要的题型：一是一元二次方程根的判别式和一元二次方程根和系数的关系

与代数中的函数联系起来,出代数方面的综合题;二是根的判别式、韦达定理与平面几何结合起来,出数学综合题.这两类题型多数都是最后压轴题,开放型试题.

典型试题分析

例1. 把方程 $(1-3x)(x+3)=2x^2+1$ 化成一般形式,并写出方程中二次项系数,一次项系数和常数项.

分析: 把一个一元二次方程化成一般式后若二次系数是负数时,我们就把方程两边都乘以 -1,使二次项系数变成正数.这样对以后解一元二次方程可以减少错误,另外一次项系数及常数项要包括性质符号.

解: 去括号得 $x-3x^2+3-9x=2x^2+1$

移项,合并同类项得 $-5x^2-8x+2=0$

即:$5x^2+8x-2=0$

$\therefore$ 此方程的二次项系数是5,一次项系数是8,常数项是 -2.

例2. 用开平方法解下列方程:

(1) $4x^2-3=0$　　(2) $(x-1)^2=5$

(3) $(x-2)^2=(2x+3)^2$　　(4) $3x^2+15=0$

分析: 当方程是形如 $(ax+b)^2=p(p\geqslant 0)$ 时,用开平方法比较简单,但要注意两边同时开平方时,要注意取正负号,不要与求算术平方根相混淆.

解: (1) 原方程变形为:$x^2=\frac{3}{4}$

$\therefore x_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$　　$x_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $x-1=\pm\sqrt{5}$

$\therefore x_1=1+\sqrt{5}$　$x_2=1-\sqrt{5}$

(3) 可把 $x-2$ 看成是 $(2x+3)^2$ 的平方根

$\therefore x-2=\pm(2x+3)$

即 $x-2=2x+3$ 或 $x-2=-(2x+3)$

$\therefore x_1=-5$　　$\therefore x_2=-\frac{1}{3}$

(4) 原方程可化为:

$x^2=-5$

∵负数没有平方根

∴原方程无实数根

例 3. 用配方法解方程 $x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}=0$

分析: 当二次项系数为1时,应配上"一次项系数一半的平方",但需注意配方时应在方程两边同时加上所配的那个数.

解: 移项,得 $x^2+\frac{1}{6}x=\frac{1}{3}$

配方,得 $x^2+\frac{1}{6}x+\left(\frac{1}{12}\right)^2=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{12}\right)^2$

即:$\left(x+\frac{1}{12}\right)^2=\frac{49}{144}$

解这个方程,得 $x+\frac{1}{12}=\pm\frac{7}{12}$

$\therefore x_1=\frac{1}{2}\quad x_2=-\frac{2}{3}$

例 4. 用公式法解方程:$4P=1-\frac{3}{2}P^2$

分析: 将方程化简为一般式.

解: 移项,得 $\frac{3}{2}p^2+4p-1=0$

$\because a=\frac{3}{2}\quad b=4\quad c=-1$

$\Delta=4^2-4\times\frac{3}{2}\times(-1)=22>0$

$\therefore p=\frac{-4\pm\sqrt{22}}{2\times\frac{3}{2}}=\frac{-4\pm\sqrt{22}}{3}$

$\therefore p_1=\frac{\sqrt{22}-4}{3}\qquad p_2=\frac{-\sqrt{22}-4}{3}$

例 5. 解关于 x 的方程:

$x^2+mx+2=mx^2+3x(m\neq1)$

分析: 先把方程化成一般形式,正确掌握各项系数,把 a、b、c 的值代入公式计算即可.

解: 将原方程化为一般式:得

$(1-m)x^2+(m-3)x+2=0(1-m\neq0)$

这里 $a=1-m$,$b=m-3$,$c=2$

$\because b^2-4bc=(m-3)^2-4(1-m)\cdot 2=(m+1)^2\geqslant 0$

$\therefore x=\dfrac{-(m-3)\pm\sqrt{(m+1)^2}}{2(1-m)}=\dfrac{-(m-3)\pm(m+1)}{2(1-m)}$

$\therefore x_1=\dfrac{-m+3+m+1}{2(1-m)}=\dfrac{2}{1-m}$

$x_2=\dfrac{-m+3-m-1}{2(1-m)}=1$

例 6. 解关于 x 的方程:

$x^2-a(3x-2a+b)-b^2=0$

分析:这个方程的字母系数中有 a 和 b 为避免混淆,不要再写 $a=1,b=-3a$ 等,可直接写出 x^2 的系数、x 的系数,常数项得.

$(-3a)^2-4(2a^2-ab-b^2)=(a+2b)^2$

解:整理后,得 $x^2-3ax+(2a^2-ab-b^2)=0$

这里 x^2 的系数是 1,x 的系数是 $-3a$,常数项是 $2a^2-ab-b^2$,而 $(-3a)^2-4(2a^2-ab-b^2)=a^2+4ab+4b^2=(a+2b)^2\geqslant 0$

$\therefore x=\dfrac{3a\pm\sqrt{(a+2b)^2}}{2}=\dfrac{3a\pm(a+2b)}{2}$

$\therefore$ 原方程的解是:$x_1=\dfrac{3a+a+2b}{2}=2a+b$

$x_2=\dfrac{3a-a-2b}{2}=a-b$

例 7. 因式分解法解下列方程.

(1)$(x+3)(x-1)=5$　　(2)$3(x+1)^2-2x^2=-2$

(3)$x^2-2(\sqrt{3}+\sqrt{5})x+4\sqrt{15}=0$　　(4)$(2y+1)^2-8(2y+1)+15=0$

分析:当方程的一边能够分解成两个一次因式,而另一边等于零的时候,才能应用因式分解法.

解:(1)原方程变形得:$x^2+2x-8=0$

$(x+4)(x-2)=0$

$\therefore x+4=0$ 或 $x-2=0$

$\therefore x_1=-4\quad x_2=2$

(2)原方程变形,得

$3(x+1)^2-2(x^2-1)=0$

$(x+1)[3(x+1)-2(x-1)]=0$

$\therefore x+1=0$ 或 $3x+3-2x+2=0$

解得 $x_1=-1 \quad x_2=-5$

(3) $\because 4\sqrt{15}=(-2\sqrt{3})(-2\sqrt{5})$ $\therefore$ 方程左边可以用十字相乘法分解因式.

解：原方程化为 $(x-2\sqrt{3})(x-2\sqrt{5})=0$

$\therefore x-2\sqrt{3}=0$ 或 $x-2\sqrt{5}=0$

$\therefore x_1=2\sqrt{3} \quad x_2=2\sqrt{5}$

(4)原方程就是：

$[(2y+1)-3]\cdot[(2y+1)-5]=0$

$2y+1-3=0$ 或 $2y+1-5=0$

$\therefore y_1=1 \quad y_2=2$

例 8. 用适当的方法，解下列关于 x 的一元二次方程：

(1) $x^2-4ax=b^2-4a^2$ (2) $x^2-b^2=a(3x-3a+b)$

分析：含字母系数的一元二次方程，首选方法是因式分解法或直接开平方法，如果用公式法解，其中判别式的化简并配成完全平方式较复杂，代入求根公式计算较繁.

解：(1)原方程可化为：$x^2-4ax+4a^2-b^2=0$

即：$(x-2a)^2-b^2=0$

$(x-2a+b)(x-2a-b)=0$

$\therefore x_1=2a-b \quad x_2=2a+b$

另解：原方程可化为：$x^2-4ax+4a^2=b^2$

即：$(x-2a)^2=b^2$

$x-2a=\pm b$

$\therefore x_1=2a+b \quad x_2=2a-b$

(2)原方程可化为：$x^2-3ax+2a^2-ab-b^2=0$

即：$x^2-3ax+(2a+b)(a-b)=0$

$[x-(2a+b)][x-(a-b)]=0$

$\therefore x_1=2a+b \quad x_2=a-b$

例 9. 解关于 x 的方程 $(m-1)x^2+2mx+(m+3)=0$

分析：关于 x 的方程，$ax^2+bx+c=0$，$a=0$ 时，一元一次方程必有一个解，只有 $a\neq0$ 时，才是一元二次方程．当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，才可利用

求根公式求出它的两个实数根，而当 $b^2-4ac<0$ 时，原方程无解.

解：当 $m=1$ 时，原方程为一元一次方程 $2x+(1+3)=0$

$\therefore x=-2$

当 $m\neq1$ 时，原方程是一元二次方程.

$$\because \Delta=(2m)^2-4(m-1)(m+3)$$
$$=4m^2-4(m^2+2m-3)$$
$$=4(3-2m)$$

(1)当 $m<\dfrac{3}{2}$ 且 $m\neq1$ 时，$\Delta>0$

$$x=\frac{-2m\pm\sqrt{4(3-2m)}}{2(m-1)}$$

$$\therefore x_1=\frac{-m+\sqrt{3-2m}}{m-1}\qquad x_2=\frac{-m-\sqrt{3-2m}}{m-1}$$

(2)当 $m=\dfrac{3}{2}$ 时，$\Delta=0$

$\therefore x_1=x_2=-3$

(3)当 $m>\dfrac{3}{2}$ 时，$\Delta<0$ 原方程无实根.

例 **10.** 不解方程，判别下列方程根的情况：

(1)$x(4x-7)=3$　　(2)$4x^2=\dfrac{12x-1}{8}$

(3)$2x^2+x+1=0$

分析：先化一般式，然后求“Δ”的值，根据“Δ”的值判定根的情况.

解：(1)原方程可化为：$4x^2-7x-3=0$

$$\because \Delta=(-7)^2-4\times4\times(-3)$$
$$=49+48>0$$

$\therefore$原方程有两个不相等的实数根.

(2)原方程可化为：$36x^2-12x+1=0$

$\because \Delta=(-12)^2-4\times36\times1=0$

$\therefore$原方程有两上相等的实数根.

(3)$\because \Delta=1-4\times2\times1=-7<0$

$\therefore$原方程没有实数根.

例 **11.** 当 k 为何值时，关于 x 的方程 $(k-1)x^2+(2k-1)x+(k+1)=0$

(1)有两个不相等的实数根.

(2)有两个相等的实数根.

(3)无实数根

分析:在运用根的判别式解题时,不能忽略二次项系数不为零这一条件.

解:(1)$\because \begin{cases} k-1\neq 0 & (1) \\ \Delta=(2k-1)^2-4(k-1)(k+1) \\ \quad =-4k+5>0 & (2) \end{cases}$

解得:(1)$k\neq 1$

(2)$k<\dfrac{5}{4}$

$\therefore$当 $k<\dfrac{5}{4}$ 且 $k\neq 1$ 时,方程有两个不相等的实数根.

(2)$\because \Delta=0$,即 $-4k+5=0$,得 $k=\dfrac{5}{4}$

$\therefore$当 $k=\dfrac{5}{4}$,方程有两个相等的实数根.

(3)$\because \Delta<0$,即 $-4k+5<0$,得 $k>\dfrac{5}{4}$

$\therefore$当 $k>\dfrac{5}{4}$ 时,方程没有实数根.

例 12. 证明方程 $3mx^2-(2m+3n)x+2n=0(m\neq 0)$ 有两个实数根.

分析:欲证方程有两个实数根,只须证判别式 $\Delta\geqslant 0$.

证明:$\because m\neq 0$ 且 $\Delta=[-(2m+3n)]^2-4\cdot 3m\cdot 2n$

$=4m^2+12mn+9n^2-24mn$

$=(2m-3n)^2$

$\because (2m-3n)^2\geqslant 0 \qquad \therefore \Delta\geqslant 0$

$\therefore$方程 $3mx^2-(2m+3n)x+2n=0$ 有两个实数根.

例 13. 已知 a、b、c 是$\triangle ABC$ 的三条边,求证关于 x 的方程.

$b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$ 没有实数根.

分析:要证:一元二次方程没有实数根,只须证判别式 $\Delta<0$,根据条件 a、b、c 为三角形三边长,应联想到 a、b、c 均是正数,三角形两边之和大于第三边.

证明:$\because \Delta=(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2$

$=(b^2+c^2-a^2+2bc)(b^2+c^2-a^2-2bc)$