

概 率 论 与 误 差 论 概 要

概 率 论 与 误 差 论 概 要

潘 德 惠 编 著

51.71
22.01

版 社

辽 宁 人 民 出 版 社

21.71
750.1

概 率 論 與 誤 差 論 概 要

潘 德 惠 編 著

辽 宁 人 民 出 版 社

1963年·沈阳

概率論与誤差論概要

潘德惠編著

☆

辽宁人民出版社出版（沈阳市大西路二段同心东里12号）沈阳市书刊出版业营业许可证文出字第1号
沈阳新华印刷厂印刷 辽宁省新华书店发行

850×1168毫米 $\frac{1}{32}$ · 6%印张 · 160,000字 · 印数：1—6,800 1963年6月第1版
1963年6月第1次印刷 统一书号：13090·15 定价(9)0.90元

內 容 提 要

概率論与誤差論是研究科学技术領域內很多实际問題都要用到的一門数学学科。

本書扼要地介紹了概率論与誤差論的基本知識及其应用。

全書分三章：第一章講随机事件和概率的基本知識；第二章講随机变数和与随机变数有关的理論以及处理实际应用中常遇到的一些問題的方法；第三章是在前两章的基础上講解了誤差理論及最小二乘法原理，并介紹了在实验、观测等工作中寻求最确值的方法。

本書內容簡明扼要，凡具有一般微积分知識的讀者都能看懂。可供需要这方面知識的科学技术工作者閱讀，也可作为理工科大学学生与教师的参考書。

序

目前在很多科学技术領域內研究一些实际問題时，經常要用到与概率及誤差理論有关的知識，因此，这方面的基础理論就成为許多专业的科学技术人員所必需的了。

本書是作为一本概率論与誤差理論入門的書来編写的。目的是想使在工作和学习中需要这些知識的工程技术工作者和大学生們能了解并熟悉这方面的基本理論与应用。因而內容力求簡明扼要，便于自学。

全書分三章。第一章从随机事件出发，介紹了概率論中最基本的一些問題及应用。第二章較細致地介紹了与随机变数有关的一些理論以及应用上最常遇到的一些問題的处理方法。为了較深入地敘述一些理論，这一章里还加入了斯蒂阶积分这一內容，这对学过一般微积分知識的讀者來說，閱讀起来是毫无困难的。第三章是在前两章的基础上介紹了誤差理論及最小二乘法，可供做實驗及觀測等工作的科技人員和学生們参考。

为了不使篇幅过大，本書只介紹了概率方面最常用的一些基本知識。对这方面有特殊需要或有興趣的讀者，可以在本書的基础上深入地閱讀其他的一些書籍，例如本書后边列出的一部分参考書。書中用小字排印的部分和各章后边的附录，是給

— 1 —

06499

要深入钻研的讀者預备的；不十分需要的話，可略去不看。

本書是在一九五七年我編写《应用高等数学》初稿的基础上作了一些修改与增补整理出来的。書中一部分材料曾用作教材。为使自学的讀者較深入地体会一些問題，各部分都配备了一定数量的习题，其中很多曾留給学生們作过。

由于个人經驗少，兼水平所限，書中一定会有很多体会不深之处，甚至錯誤的地方也在所难免，因此，很可能滿足不了讀者的要求。好在今天我們大家在党的“双百”方針的指导下，要共同来进行科学的实践和探討。我殷切地期望各方面志的同們能多給本書提出批評和指正。

本書的編写得到了我們教研室很多同志的关心和鼓励。辽宁省科协、省数理学学会对本書的出版都給了很大的帮助。学会的丁紅人同志更为此出力不少。当本書出版之际，謹在此一并表示衷心的感谢。

潘 德 惠

一九六二年国庆前夕于东北工学院

目 录

第一章 随机事件	1
§ 1 引論	1
§ 2 事件的分类与概率的古典定义	2
§ 3 几何概率	6
§ 4 概率的加法定理	10
§ 5 条件概率与概率的乘法定理	12
§ 6 概率的统计定义	19
§ 7 概率論研究的主題与基本公理	22
§ 8 公理的推論	24
§ 9 全概率公式	25
§ 10 假設概率与貝叶斯公式	26
§ 11 排列与組合的几个問題	28
§ 12 π 的瓦利斯公式	32
§ 13 司特林公式	35
§ 14 重复事件的概率	38
§ 15 事件重复发生的最可能的次数	40
§ 16 柏努里定理	43
§ 17 普阿松公式	48
§ 18 笛莫佛—拉普拉斯定理	50
§ 19 笛莫佛—拉普拉斯积分定理	56
§ 20 随机事件間的回归系数与相关系数	59

附录:

积分	$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt$	66
----	-------------------------------	----

第二章 随机变数.....68

§ 1	随机变数	68
§ 2	离散随机变数的分布律	69
§ 3	連續随机变数的概率密度	72
§ 4	随机变数的分布函数	75
§ 5	随机变数的概率密度的例子	76
§ 6	分布函数的例子、連續性及間断点的意义	80
§ 7	数学期望 (平均值)	85
§ 8	斯蒂阶积分	88
§ 9	数学期望的一般定义及举例	92
§ 10	和的数学期望	96
§ 11	乘积的数学期望	99
§ 12	方差与均方差	101
§ 13	方差的性質	105
§ 14	切比雪夫不等式	111
§ 15	切比雪夫定理	112
§ 16	切比雪夫定理的两个重要的特例——柏努里定理与普阿松定理, 切比雪夫定理的推广——馬尔科夫定理	115
§ 17	矩	118
§ 18	特征函数	121
§ 19	随机变数間的回归系数与相关系数	131

附录:

关于随机变数的貝叶斯公式	138
--------------	-----

第三章 誤差論 143

§ 1 引論	143
§ 2 誤差的分布法則	144
§ 3 精確度、中誤差及最確偏差	150
§ 4 最小二乘法原理	155
§ 5 中誤差及其性質	157
§ 6 殘差、平均值的中誤差及最確偏差	161
§ 7 觀測的權與不等權的觀測	164
§ 8 間接觀測、觀測方程及法方程	167
§ 9 中誤差的討論	170
§ 10 精確度不同（不等權）的觀測	174
§ 11 間接觀測問題的解法及舉例	176
§ 12 求相對極值的拉格朗奇方法	179
§ 13 條件觀測	182
§ 14 函數逼近問題與平方平均收斂	185

附錄:

關於最小二乘法原理的注釋	197
--------------------	-----

第一章 随机事件

§ 1 引 論

我們日常觀測某个对象时，度量上一般总是要产生誤差的。在三五次觀測中，誤差的出現似乎没有什么規律，但随着觀測次数的增多，則可以发现小誤差比大誤差出現的次数多，这就是所謂統計上的規律性。觀測的次数越多，則这种規律性也就越明显。在很多自然科学、技术科学与經濟理論等方面全会遇到許多种現象，它們每一次的发生都是偶然的，但对这些現象的多数次发生來說，就和上边所述的誤差出現一样，会看出来它們的某些規律性来了。概率論就是研究多数事件的这种規律性的一門数学科学，它的应用是相当广泛的。本章討論的是概率論中的一些最基本的問題。

概率論中把所研究的事象叫作**事件**。例如从盒子里抽签时签的出現，打扑克时王牌的出現，火車誤点迷站等都是事件的例子。

很多事件的发生是偶然的，我們不可能很有把握地預料它們是否会发生；但可以設法研究它們在何种程度上能发生或不发生，即判定它們发生的可能性的**大小**。我們說某事件发生的可能性很大或是很小，一般都是以日常的生活經驗来对待的。要是用数字来表示这种可能性的大小，則是某一事件发生的概

率很大或是很小。如果某事件发生的概率非常小，则这件事就几乎不会发生。例如虽然听说过火车有脱轨的事，但这个事件发生的概率非常小，所以我们都很坦然地坐火车旅行。相反的，有很大概率的事件就几乎总是发生的。例如从二楼上掉下来，摔伤或死亡的概率就非常大，虽然也可能有个别的人安全地落在地上，但毕竟还很少有人愿意作这个试验。

概率论在技术科学方面的用处很大。例如对产品质量的检查、对军事射击理论的研究以及对保险事业中很多问题的探讨等，都要用到概率论的知识。此外，书中第三章的最小二乘法原理，也是在概率论的基础上建立起来的。

§ 2 事件的分类与概率的古典定义

上节已经说过，概率论中首先遇到的就是事件的概念。**事件是指这样的现象：在既定的一些条件下它或发生或是不发生，而没有第三种可能的。**以后用 A, B, C 等表示事件。

在一定的条件下必定要发生的事件称为**必然事件**。一定不会发生的事件叫作**不可能事件**。可能发生也可能不发生的事件叫作**随机事件**。

例如一年中（条件）出现春天的事件就是必然事件，一个人（条件）永不死亡的事件是不可能事件。从很多产品中任取出一件（条件），取出一级品的事件就是随机事件。因为取出的可能是一级品，也可能不是一级品。

在一定的条件下，两个事件 A 与 B 不可能同时发生的，叫作**不相容事件**。两个以上的事件最多只有一个能出现的，叫作**一组互不相容事件**（也叫作两两不相容的一组事件）。

例如有一张公债券参加抽签还本，可被抽中（事件 A ），或未抽中（事件 B ），这两个事件是不相容的。又如从学校中选代表一人，选出教师的事件是 A ，选出职工的事件是 B ，选

出學生的事件是 C ，則 A, B, C 是一組互不相容事件。

在一定的條件下，兩個事件 A 與 B ， A 發生時 B 也可能發生，則稱二事件是**相容的**。例如擲一個骰子（條件）出現奇數點的事件與出現“5”點的事件就是相容的，因為出現的奇數點可能就是“5”。

在一定的條件下，一組事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中至少必有一個要發生時，稱這組事件為**完備的**。例如某班學生選班長，必須從適合以下三個條件中至少一個的人中選（條件）。這三個條件的一個是肯努力钻研，學習成績優秀；一個是身體好，能熱心工作；再一個是工作能力强，積極肯幹。選出適合這三種條件的班長的三個事件就構成一個完備事件組。因為必定選出具備這三種條件中的一種、甚至兩種或三種的學生。

設二事件構成一個完備組，且二者不相容，則稱此二事件是**對立的**或是**互余的兩個事件**。一個用 A 表示時，另一個就表示為 $\bar{A}$ ，顯然 $\overline{(\bar{A})} = \bar{\bar{A}} = A$ 。例如某列車準時進站與不準時進站這兩個事件就是對立的。因為二者構成了一個完備組，且不相容。

若一切事件都是必然事件或不可能事件，那麼就沒有研究概率論的必要了。但我們在上一節已經說過，有一些事件，我們說其中某一件事較另一件事發生的“可能性較大”。這樣就會產生諸事件發生的可能程度的比較問題，這也就是概率論的基本問題。想要把可能性程度用數量表達並且用數學的方法進行研究，首先就必須了解什麼樣的一些事件是具有“等可能性”的。

在某一個條件下一些事件都可能發生，如果我們有充分的根據，不能認為某一事件發生的可能性比另一事件發生的可能性為大時，就稱這些事件具有**等可能性**，或者說這些事件是**等可能的**。

例如把一個質量分布均勻的骰子隨意擲出去，出現六個點數的六個事件就是等可能的。

以下來討論如何用數字來表達某事件發生的客觀上可能程度的問題。

為了說明這一點，先考慮在一定條件下與事件 A 有關的事件組：

$$E_1, E_2, E_3, \dots, E_n.$$

這組事件具有以下三種性質：

1. 任兩個事件 E_i, E_j ($i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n$) 都是不相容的。

2. 這組事件是完備的。

3. 這組事件是等可能的，並且已知其中某些事件出現時，事件 A 即發生；另一些事件出現時，事件 A 就不發生。並知在所給條件下，只有當此組內某些事件發生時，事件 A 才能發生。

以上所說的事件組，稱為所給條件下的**完全事件組**。

例如擲一個質量分布均勻的骰子， A 表示出現偶數點的事件。所給的條件是只擲一個骰子，出現每個點的六個事件就形成一個完全事件組：

$$E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, \dots$$

E_i 表示出現第 i 個點的事件。在此， E_2, E_4, E_6 出現時，事件 A 發生；而事件 E_1, E_3, E_5 出現時，事件 A 不發生。在擲一個骰子的條件下，只有當 E_2, E_4, E_6 出現時， A 才發生。

完全事件組中，某些 E_i 的出現會引起事件 A 發生時，這些事件 E_i 稱為**有利於事件 A 的事件**，而另一些稱為**不利於 A 的事件**。

在上例中 E_2, E_4, E_6 有利於 A ； E_1, E_3, E_5 不利於 A 。

設完全事件組內有利於 A 的事件有 m 個，則定義事件 A 的**概率 $P(A)$** 是

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (\text{概率的古典定義})$$

从此定义可以看出

$$0 \leq P(A) \leq 1,$$

即任何事件的概率总界乎 0 与 1 之間。如果 A 是必然事件，一切 E_i 都有利于 A ，則 $P(A) = n/n = 1$ 。若 A 是不可能事件，一切 E_i 都不利于 A ，則 $P(A) = \frac{0}{n} = 0$ 。反过来说也全成立^{*}。

由定义可知 A 不发生的概率是 $1 - P(A)$ 。

这里要提出一点值得注意的事项，即某事件 A 发生（例如投骰子出 1 点）的概率并不是試行若干次中 A 发生的次数与試行次数之比。这个比值一般叫作事件 A 重复发生的**頻率**。試驗証明，当試行的次数相当多时，事件 A 重复发生的頻率总是近于相同的，并且試行的次数越多，相对頻率与事件 A 的概率 $P(A)$ 越很少能有較大的偏差（参照 § 16）。例如試擲一个骰子，次数越多，出現 1 点的頻率一般就越近于 $\frac{1}{6}$ ；而从概率的定义知道，出現 1 点的概率确是 $\frac{1}{6}$ 。

封·米賽斯 (R. von Mises) 曾这样提出概率的定义：用 μ 表示作 n 次試驗中事件 A 发生的次数，既然随着試驗的次数 n 增大，頻率 $\frac{\mu}{n}$ 对概率 $P(A)$ 的偏差“越减小”，則在 $n \rightarrow \infty$ 时就应该有

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu}{n}。$$

封·米賽斯以此作为概率 $P(A)$ 的定义。它曾遭到苏联数学家辛欽 (А. Я. Хинчин) 等的严詞批判，說明了这一定义是不可采纳的，因为它已走上了唯心論的路。在封·米賽斯的主张里，概率已失去了作为“眞实现象的客觀数字特征”的性質。若按这种主张，在作无穷多次試驗之先就不能說出概率是多大，而无穷多次的試驗又无法实现，因而也就无法应用概率研究什么了。这样要求頻率趋于概率的想法是研究任何問題都

^{*} 这里指 n 是有限值的情形。对 § 3 的情形，这个結論就未必正确了。

不会产生的。实际誰也不会因为不能对身長作无穷多次測量并檢驗結果是否趋于一个极限，就不认为身長存在，更不能因为这个度量序列沒有极限，就說某个人“沒有身長”。

例 1. 箱內装同样規格的两个零件，一个是一級品，一个是二級品，取出一个后，放入箱內再取一次，两次中至少有一次取出一級品的概率如何？

此問題可有四种等可能的事件产生：

甲、第一次取出一級品，第二次也取出一級品；

乙、第一次取出一級品，第二次取出二級品；

丙、第一次取出二級品，第二次取出一級品；

丁、第一次取出二級品，第二次也取出二級品。

設两次中至少有一次取出一級品的事件为 A ，則甲乙丙三事件都对 A 有利，因而所求概率为 $\frac{3}{4}$ 。

同理，两次全取出一級品的概率是 $\frac{1}{4}$ ，两次中取出一级一級品的概率是 $\frac{1}{2}$ 。

习 題

1. 擲两个骰子，得 5 点的概率如何？

2. 一批产品共 100 件，其中有五件廢品。任取一件，不是廢品的概率如何？

§ 3 几 何 概 率

上节所述的概率定义，一般称为概率的“古典定义”。但很早以前就有人注意到，只考虑依照有穷多个等可能事件的事件組所定的“古典的”概率定义是不够的^{*)}。这时已經有些問題使令当时不能不对概率的定义作些补充来构成一种新概念，而使之对无穷多个等可能事件依然适用。

^{*)} 參看本章 § 6。

想法是这样的：在一平面区域 A 内有一个区域 B ，在 A 内任取一点，此点在 B 内的“概率”如何？

这时在 A, B 二区域内的点，都是无穷多个，显然用“古典的”概率定义无法解决。为解决此问题，我们在区域所在平面上作等间隔的两组平行线，作成同样面积的正方形网。我们认为在平面上取一些点，相当于在各个正方形内只取一点，就

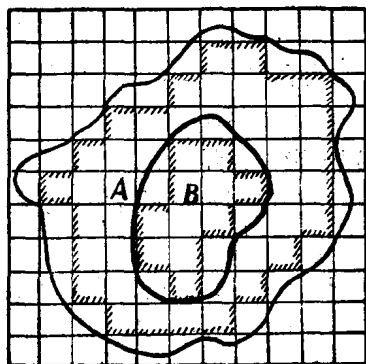


图 1-1

就是说把各个正方形都看作一个点。取 A 内一点，就认为是取完全含在 A 内的正方形上的一个点（对 B 也同样理解）。于是所求的概率是完全含在 A 内的正方形数除完全含在 B 内正方形数的商。自然我们会想到使这样的正方网格“越小越好”。取正方形边长趋于零时，上述商的极限，也就是 A 的面积除 B 面积的商，就作为问题的答案。

当 A, B 是直线线段时，答案就是长度的商； A, B 是空间区域时，答案就是体积的商； A, B 是曲线线段、曲面块等情形，全与此相仿。

这样，在 A 内任取一点，落在子区域 B 内的概率与 B 在 A 内的位置无关，与 B 的形状也无关，只是与 A, B 二者的度量（长度，面积，体积等）有关，而此时概率的定义取成：

$$P = \frac{B \text{ 的度量}^*)}{A \text{ 的度量}}$$

*) 从而可以看出： $P=1$ 未必是必然事件； $P=0$ 也未必是不可能事件。因为 A 的一部分 B 的度量可能与 A 的度量一样。例如 A 表正方形区域， B 表正方形内去掉两个对角线剩下的部分，但二者面积一样。此外， A 的一部分 B 的度量也可能是零。例如 B 是一条对角线，它的面积就是零。

例 1. 綫段 AA' 上有一点 A'' ，設 AA' 的长为 a ， AA'' 的长为 b ，在 AA' 上任取一点落在 AA'' 上的概率为 b/a 。

例 2. 甲乙两台机器約定上午八时到九时运到工地，到工地立即开始工作。但一台机器独自工作不能超过二十分鐘，如另一台机器不在前一台运到后二十分鐘內运到并参加工作，則工程不能正式开工。設两台机器运到的时刻是彼此独立的，就是說一台运到的时刻对另一台运到的时刻毫无影响，求工程能正式开工的概率。

用 x 表甲运到的时刻， y 表乙运到的时刻，能正式开工的必充条件是 $|x-y| \leq 20$ 。

用 x, y 表平面上点的直角坐标，且不妨設 $0 \leq x \leq 60$ ， $0 \leq y \leq 60$ ，因为已經規定是在同一个小时内运到。这里取“分”

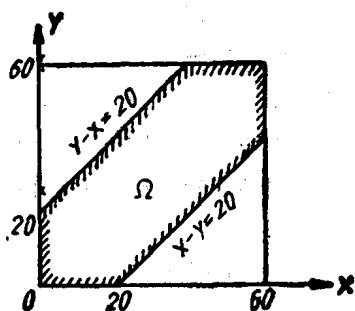


图 1-2

为時間单位。一切可能的情形全被如图的正方形上的点表出，表示运到的时刻相差不超过二十分鐘，即能正式开工的点，全落在 Ω 区域内。

反过来，正方形区域上每个点，都表示两台机器运到的一种情形，而 Ω 区上的每个点都表示能正式开工的一种情况。

按上述定义，所求概率等于 Ω 的面积与正方形面积之比：

$$P = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}。$$

例 3. 卜丰 (Buffon) 問題，在平面上作一族平行綫，每相邻二綫的距离为 $2a$ ，在平面上任投一細針，此針长小于相邻二平行綫的距离，設針长为 $2l$ 时，則 $l < a$ ，求此針与任一条直綫相交的概率。

用 x 表針中点到最近一条平行綫的距离， φ 表針与平行綫