科學圖書大庫

# 高等工程數學

(第七冊)

譯者 黃友訓

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

監修人　徐銘信　發行人　王洪鎧

# 科學圖書大庫



中華民國六十八年三月二十日再版

# 高等工程數學

## （第七冊）

基本定價　1.60

譯者　黃友訓　私立逢甲學院教授



(67)局版臺業字第1810號

出版者　財團法人　臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號　電話7813686 7815250號

發行者　財團法人　臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第１５７９５號

承印者　大興圖書印製有限公司三重市三和路四段一五一號　電話9719739

# 譯 者 序

本叢書共有六冊原名 Ingenieur-Mathematik ，內容具有許多優點。例如（1）材料新穎而豐富，適合工程師在大學研究高深學問之需要；（2）本書的重點，不在證明許多定理，而在鼓勵讀者起初最好不倚賴書中之提示，而獨立解答各習題；（3）介紹新的數學觀念，培養純粹數學的思考方式；（4）各章附有問題與實例，切於實際的應用；（5）每冊後面增加研討許多問題的附錄，其中對觀念的分析比較，對習題之求解更爲重要；（6）本書頗適合於我國各大學工學院所訂新的課程標準。按照新的規定，微積分與微分方程均屬工學院一年級必修科目；讀完微積分與微分方程，接着讀這本書，在程度上有相當的啣接。

本叢書直譯之名，應爲“工程師數學”，根據原著者弁文所說，這六冊叢書是由教工學院的講義整理而成；在證明方面不夠嚴密，但對於工程上的應用特別注重。所以用於工學院比較適合；因此本人決定改用“高等工程數學”此一比較符合原著者數學目的之書名。

本叢書第一冊原著頗多在文字上不能自圓其說（譯者按：原著者本人之德文亦並不高明）與排版錯誤之處，均經譯者逐次予以訂正。

黃友訓謹識

民國五十九年七月於逢甲學院土木工程學系。

# 弁 言

本叢書第一冊開始就講到級數，而將級數戴上“工程師數學”的頭銜者，其用意並非對工程師所指定的一種特殊數學，以表示與自然科學家所用的數學，或與所謂純粹數學有相反的內容之意；本書第一冊所講的級數，主要是針對工科各學系的學生可能應用之問題；就是自然科學的定律也應該就其重點加以說明。決定這一個目標，一則是為了對教材有所選擇，而此教材主要是滿足直至特許工程師前期考試（ Diplomvorprüfung ；譯者按：德國之 Diplom 學位等於英美之碩士學位）所需要之普通數學講授者。二則本書第一冊中也為此包含一些工業大學第一學期一開始就習慣採用的教材；於是對於所有———好比由於工業實習———高中畢業後不立即繼續深造的學生而言，容易使之進入高深數學而尋求自修的門徑。

除了對教材有所挑選之外，本人認為尚有重要的一點，即本叢書與一般數學教授所用的書籍，在數學的方法上大有區別。譬如按照目前的習慣，研讀數學時特別就其通俗性着重於觀念的澄清，進而加以分析，並且劃分其有效境界；但初入世的工程師與自然科學家所面對的問題，是有計劃的或有效驗的觀念問題；從他們感興趣的狹窄領域而言，此觀點對於他們自然較為親切，而且對於他們日後的任務總要作為有所依據的準繩。這是為了工程師數學（簡稱工程數學）所能做的明顯結論，應該在此處就函數觀念中一個例子予以說明。工程學生對於一般的函數觀念，是絲毫不感覺興趣的；通常所觀察病理上的情形，據他們看來，自始就無甚興趣或者甚至令人討厭的稀奇古怪之事物。但此處使適合而有效的進入分析的函數，却以解剖（即外科手術，俗稱開刀；在數學上則稱為運算）為出發點；借助於運算才產生許多不同的函數：由四則法（即加減乘除之總稱）導致多項式及有理函數；由多項式利用趨於極限的解析運算遂產生冪級數；由積分運算導入特別的超越函數（對數）；又由構成逆函數（或稱反函數）的運算，則以解析的方式導致指數函數與三角函數。然後由三角函數所組成的級數（即福里哀級數）有效的產生進入任意函數的廣大途徑。此外，具有歷史性的分析法，其過程直入十九世紀依

然不生變化；我們也要注意"functio"這個字，它與"operatio"一字相同，都是由並不古老的拉丁文而來，具有"功用"，"作用"，或"機能"（德文稱爲 Verrichtung）之意義。然而有效驗的觀點並非陳腐的老生長談，在現代的基本學理探討上（以 Lorenzen 一人爲例）（譯者按：Dr. Paul Lorenzen 爲西德 Erlangen 大學之數學教授，著有"數學"一書，共一百七十三頁），業已指出：Lorenzen 博士在數學上對基本理論發生困難的克服，做了有用的一種列式假設，使該理論的確能夠成立。——再則在大部份數學教科書中作爲基礎的函數觀念，對許多應用方面的目的而言，也還是過於狹隘：二十世紀中所引用的一般化函數（例如分配律）已成爲不可或缺的數學理論，而在工程數學的圖示方面亦不能無之；本書決定把一般化函數附加於福里哀級數（Fouriersche Reihen）作有效驗的運用。

於是對於純粹數學的思考方式，自然不應該隨便剝奪其所賦與之權利；但如果到處適用的說法以及抽象的澄清有其必要的話，這種思考的方式總是不可付諸闕如的。凡特許工程師（Diplomingenieur；譯者按：凡在德國工業大學各工程學系畢業之學生，均稱爲特許工程師，或稱爲國授工程師）按其地位的固有意義，均負有發展新方法的使命（但非應用陳舊的方法；如用老的方法，那就沒有進大學研讀的必要了！）；他對數學的抽象批評方面所需要者，與對積極有效方面所需要者完全相同。本書中有關利用德得欽氏綫段分割法（Dedekindsche Schnitte）對實數的引用各章，不應該當作教育的裝飾品看待；各該章節乃帶來重要的思考方式！尤其每冊後面增加研討許多問題的附錄，其中對觀念的分析比較，對習題的解答求得若干方法更爲重要。附錄的內容絕對不是多餘的。但讀者對各章所附一大堆實際例題，一定要等到融會貫通之後，才好澈底從事於該附錄內容之研讀。爲使讀者百尺竿頭再對各論題作進一步之研究起見，本叢書每冊最後尙且介紹若干參考書籍，以便讀者選購。

本工程數學叢書並不缺乏精良優美的圖形表示。這些圖示，除了具備任何教科書所應有的目的外，對於後起之秀的工程師（讀者按：應指正在大專院校肄業之學生而言）尙有參考研讀之功用。本叢書是屬於袖珍小冊子的性質，因爲作者在此處有意遷就適先所提及的二功用之一：對課堂聽教授講解之領悟應該有所幫助。此時如果它的結構與體裁有若干地方與剛才的聽講稍有偏差時，那是無關宏旨的；對於同一論題從多方面去認識與了解，總屬有益之舉。本書各章末了所附的問題與實例，乃爲了加深讀者的理解而加工修訂的。其目的在使讀者起初最好不倚賴書中之提示，而獨立自主的去求解各

課題！

最後，主要是 C. Schmieden 教授對作者所給予寶貴而親切的規勸與忠告，令人萬分感激。又教育委員H.J. Vollrath博士，候補工程師 H. Bött-Chen，及候補數學家 G.W. Thiel 諸位先生對原稿的共同閱讀與脩改，以及對附圖之謄清與描繪，均有莫大之贊助。還有對出版書局的熱誠合作，亦須在此表示感謝之忱.

Detlef Laugwitz 1963年暑假期間於西德 Darmstadt

# 目　錄

# 第一章　對高等工程數學應有之預備習題
## (Vorbereitungen für Ingenieurmathematik)

### 習題1.1

設$P(x)=gx^2+hx+k$為一含有整數係數$g$,$h$及$k$之多項式。

試證明：倘如對$x$的無理值而言，$P(x)$始終具有無理值的話，是則$g=0$.

【提示】函數$P_0(x)=hx+k$對無理數$x$總是含有無理值$P_0(x)$的，這是顯而易見之事實。因此，吾人只須加以證明者，即在$g\neq 0$的情形之下，對無理數$x$而言，$p$可以取得無理值。如將$P(x)$予以變形：

$$P(x)=g\left(x+\frac{h}{2g}\right)^2-\frac{h^2}{4g}+k$$

便可令人立即看出這種情形。

然後對$x=\sqrt{2}-\dfrac{h}{2g}$而言，吾人求得有理值如下：

$$P(x)=k+2g-\frac{h^2}{4g}$$

### 習題1.2

求下列多項式的零點位置

$P_4(x)=x^4-x^3-10x^2-x+1$

並且把曲綫的變跡形狀（或稱進行全貌）畫出來！

【提示】多項式的係數構成一個「迴字」，或稱「字謎」（Palindrom;譯者按：所謂「字謎」，乃指字母倒讀或順讀俱有意義而言；例如Gras一字，倒讀應為Sarg）。請參看本叢書第一册第八十一頁在問題與實例中之第四例題。

【答案】

所求之零點位置應為：

$$x_1=\frac{\sqrt{5}-3}{2},$$

$$x_2=-\frac{\sqrt{5}+3}{2},$$

$$x_3=\frac{4+\sqrt{12}}{2},$$

$$x_4=\frac{4-\sqrt{12}}{2},$$

## 習題1.3

試求下列**多項式**的零點位置：

$P_4(x)\equiv x^4-4\sqrt{3}x^3+16x^2-8\sqrt{3}x+3$

並將曲綫的進行全貌作草圖表示之！

【提示】可利用**霍納三角範式**（Hornersches Schema）按 $z=x-\sqrt{3}$ 的乘冪，將**多項式**展開成爲級數。

【答案】對 $z$ 自乘四次的**多項式**求得如下：

$$Q_4(z)=z^4-2z^2$$

所求之零點位置應爲：

$$x_{1,2}=\sqrt{3}$$
$$x_{3,4}=\sqrt{3}\pm\sqrt{2}$$

## 習題1.4

用「近似求法」計算 $\sqrt[6]{72}$ 之結果，其誤差應小於0.003者。

【提示】可用另外一種寫法：

$$\sqrt[6]{72}=2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{6}}$$

並且按照本叢書第一册第一十八頁所講的**二項展開式**予以展開。由此形成的**交錯級數**乃作十分良好之收斂。爲了概略估計誤差的大小，可以應用略去的第一項。

【答案】用**二項展開式**求得：

$$\sqrt[6]{72}=2\left[1+\frac{1}{48}-\frac{5}{72\cdot 64}\pm\cdots\right]$$

如在第二項之後將級數予以中斷，便可求出「根」的近似值如下：

$$\sqrt[6]{72}\approx 2.0417$$

如用第三項估計誤差的大小，則得：

$$誤差 \leq \frac{5\cdot 2}{72\cdot 64} = \frac{5\cdot 2}{4608} < 0.003$$

## 習題1.5

試求下式之「實根」：

$$P_3(x) \equiv x^3 + x - 1$$

其精確程度計算到小數點以下兩位爲止。

【提示】從一個草圖中令人明白看出所求的零點，其位置乃在0與1之間。利用本叢書第一册第七十一頁所講的 **霍納表格**(或稱**霍納三角範式**)，可將零點的位置予以更爲明確的界限，而且再用**牛頓氏的疊代漸近法**（見本叢書第一册第七十六頁所討論者）修正其數值。

【答案】所求的零點所在應爲

$$x_0 = 0.68$$

至於這個數值的精度就在小數點以下的第二位，可如下列之方式令人一看就明白：

用**霍納表格**求得的數值應爲

$$P_3(0.69) = +0.0185$$

$$P_3(0.67) = -0.0292$$

由正負號的變換可以斷定 $x_0 = 0.68$ 這個數值的精準程度，的確是在小數點以下第二位。

## 習題1.6

試對下列**多項式**

$$P_4(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

的零點位置進行計算，其精度以小數點後第二位爲準；適用於這個**多項式**者應爲：

$$P_4(-1) = P_4(0) = P_4(+1) = P_4(2) = 1$$

【提示】爲了要決定**多項式**（此**多項式**是易於求解者）的係數，吾人求得一個**線性方程系**。該多項式之形態如下式所示：

$$P_4(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1$$

與本叢書第一册第八十一頁所提出來的第四例題頗爲類似的，上列**多項式**可以利用**代換法** $z = x - \frac{1}{x}$ 使之變成**二次多項式**，其零點位

置可作初步之決定者。

【答案】多項式在 $z$ 處的零點位置應爲 $z_{1,2}=+1$。由此求得多項式在 $x$ 處的零點位置如下：

$$x_{1,2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\qquad x_{3,4}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

## 習題1.7

由一個四次的多項式已知下列導來式：

$y'(0)=2$；　$y''(0)=-282$；　$y'''(0)=12$；　$y^{(IV)}(0)=24$

此外 $y(1)=-135$。試求該多項式及其所屬全部的零點！

【提示】可用一般的形式假設多項式的形態如下式所示：

$$y(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

然後爲了要決定多項式的係數，吾人求得由四個方程式所組成的一個簡單方程系。這些係數乃構成一個字謎（Palindrom）。對於這種情形，讀者可參看本叢書第一册第八十一頁的內容。

【答案】零點的位置如下：

$$y(x)=x^4+2x^3-141x^2+2x+1$$

$$x_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{117}}{2}$$

$$x_{3,4}=\frac{-13\pm\sqrt{165}}{2}$$

## 習題1.8

試求下列多項式的所有「根」：

$$P_4(z)=z^4-2sz^3+2(1+2p)z^2-2sz+1$$

其中是以 $s$ 與 $p$ 代表下面相等的數值：

$$s=\cos\phi_1+\cos\phi_2$$

$$p=\cos\phi_1\cdot\cos\phi_2$$

並問：實值零點究竟適用 $\phi_1$ 與 $\phi_2$ 那一個數值？

【提示】多項式的係數構成一個「字謎）（參看本叢書第一册第八十一頁所提出來的第四例題）。

【答案】吾人求得四個零點的位置如下：

$$z_1=\cos\phi_1+i\sin\phi_1=e^{i\phi_1}$$

$$z_2=\cos\phi_1-i\sin\phi_1=e^{-i\phi_1},$$
$$z_3=\cos\phi_2+i\sin\phi_2=e^{i\phi_2},$$
$$z_4=\cos\phi_2-i\sin\phi_2=e^{-i\phi_2}.$$

假如$\phi_1$與$\phi_2$是純虛數的話，以上各零點便屬「實數」的。

## 習題1.9

在下列兩個齊次的方程系中

a)
$$\begin{aligned}3x+2y+4z&=\lambda x,\\ 2x+3y-z&=\lambda y,\\ 4x-y+9z&=\lambda z,\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}x+3y-3z&=\lambda x,\\ -2x+8y-5z&=\lambda y,\\ -2x+6y-3z&=\lambda z,\end{aligned}$$

試求$\lambda$的數值；對此數值而言，該方程系是含有非微解（卽不恒等於零）的。根據$\lambda$的數值，再計算所屬的各種解法。

【提示】符合於一個齊次方程系所屬非微解的條件應爲：該方程系的係數行列式必須自行消失（卽等於零之意）！這個條件在兩種情形之下提供一個用$\lambda$來表示的三次方程式。

【答案】a)
$$\begin{aligned}\lambda_1&=-4 & x:y:z&=-2:5:1,\\ \lambda_2&=+2 & x:y:z&=2:1:-1,\\ \lambda_3&=11 & x:y:z&=1:0:2;\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\lambda_1&=1 & x:y:z&=1:1:1,\\ \lambda_2&=2 & x:y:z&=3:1:0,\\ \lambda_3&=3 & x:y:z&=0:1:1.\end{aligned}$$

## 習題1.10

設二整數$m$與$n$不能用「3」來除盡，那末$m^6-n^6$可用「9」來除盡；試證明之！

【提示】令$m=3p\pm1$及$n=3q\pm1$，其中$p$與$q$代表兩個整數。然後$m$與$n$不能用「3」除盡，而且

$$m^6-n^6=9[3^4(p^6-q^6)\pm6\cdot3^3(p^5\pm q^5)+\cdots+$$
$$+\cdots+15(p^2-q^2)\pm2(p\pm q)]$$

因爲在方括弧以內的式子是一個整數，所以這就是我們所要提供的

證明。

## 習題1.11

試證明：假如$N$不是一個質數（或稱素數），是則 $2^N-1$ 亦非素數。

【提示】設若$N$不是一個質數，則此數$N$可以寫成一個乘積：$N=p\cdot q$，其中 $p$ 與 $q$ 是代表大於「1」的兩個整數。

$$2^N-1=(2^p)^q-1=(2^p-1)\{(2^p)^{q-1}+(2^p)^{q-2}+\cdots+2^p+1\}.$$

至此已提供了我們的證明，因爲 $2^N-1$ 是當作大於「1」的兩個整數之乘積表示出來了。

## 習題1.12

試證明：假如$m=2^n$ 而 $n$ 是爲整數又$\geq 0$時，則 $1+2^m+4^m$ 用「7」來除，總是除得盡的。

【提示】可用完全歸納法求證。

## 習題1.13

設有二數 $a$ 與 $b$ 如下：

$$a=\sqrt[5]{\frac{137}{138}}\quad,\qquad b=\sqrt[3]{\frac{229}{230}}$$

此二數中究竟那一個數較大？試詳加分析！

【提示】可改寫成爲下面的形式：

$$a=\sqrt[5]{1-\frac{1}{138}}\ ,\qquad b=\sqrt[3]{1-\frac{1}{230}}$$

應該按照本叢書第一册第一十八頁所討論的**二項公式**，將此二「根」展開成爲級數。這兩個級數之區別，是從第三項開始。

【答案】$b-a\approx\dfrac{1}{690^2}$

## 習題1.14

設$F(x)=2^{-x}\cot\dfrac{\alpha}{2^x}$（$\alpha>0$，固定不變）

$a$） 試求　$\triangle(x)\underset{\text{def}}{\equiv}F(x+1)-F(x)$

$b$） 利用 $a$）項所求得的結果，再計算下列和數

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2^n}\tan\frac{\alpha}{2^n}$$

c）最後決定 $\lim\limits_{N\to\infty} S_N$（意即 $S_N$ 的極限值）。

【提示】a）利用關係式 $\cot 2\delta=\frac{1}{2}(\cot\delta-\tan\delta)$，$\triangle(x)$ 是易於求出來的。

b）根據 a）項所求得的結果，令人看出：有限級數的各項是與$\triangle$($N-1$）相符合的。吾人如果利用$\triangle(x)$的**定義方程式**，則級數之和立即可以求得。

c）$S_N$ 的極限值，其求法如下：

$$\lim_{N\to\infty} S_N=-\cot\alpha+\lim_{\varepsilon=\frac{1}{2^N}\to 0}\left\{\frac{\cot\alpha\varepsilon}{1/\varepsilon}\right\}=$$

$$=-\cot\alpha+\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\cos\alpha\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon}{\sin\alpha\varepsilon}\right\}=\frac{1}{\alpha}-\cot\alpha.$$

【答案】a）$\triangle(x)=\dfrac{1}{2^{x+1}}\tan\dfrac{\alpha}{2^{x+1}}$，

b）$S_N=\dfrac{1}{2^N}\cot\dfrac{\alpha}{2^N}-\cot\alpha$，

c）$\lim\limits_{N\to\infty} S_N=\dfrac{1}{\alpha}-\cot\alpha.$

## 習題1.15

適用於實數 $a$，$b$，與 $c$ 者，有如下面所列的式子：

$$(ab+bc+ac)^2-3abc(a+b+c)\geq 0$$

試證明之！

【提示】上式的左邊可以當作「平方和」來表示。

【答案】$(ab+bc+ac)^2-3abc(a+b+c)$

$$=\frac{1}{2}\{a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2\}.$$

因為一個實數的平方（或稱二次冪）總是大於零或等於零，所以我們的主張就已獲得證明如上。

## 習題1.16

試證明下列的不等式

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqq \frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|},$$

其中 $a$ 與 $b$ 是代表實數或複數者。

【提示】本題可利用一種眞實情形，即一個和數的總計是小於或最多等於總計的和數。

【答案】

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}=1-\frac{1}{1+|a+b|} \leqq 1-\frac{1}{1+|a|+|b|}$$

$$=\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \leqq \frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

## 習題1.17

設數串（或稱敍列）$a_n$ 是決定於下列的循環公式（或稱遞推公式）

$$a_{n+2}=\frac{2}{3} a_{n+1}+\frac{1}{3} a_n \quad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

令 $a_1=5$ 及 $a_2=1$。試證明極限值 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 的存在情形，並且計算它的大小！

【提示】首先構成各個差分的敍列：

$$a_1-a_2=4$$

$$a_2-a_3=-\frac{1}{3} \cdot 4$$

$$\vdots$$

$$a_{n-1}-a_n=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} \cdot 4$$

然後把所有這些方程式加起來，就可以求得 $a_n$。

【答案】 $a_n=2-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}$

$\lim a_n=2$

## 習題1.18

試求兩條曲線的交會點，此曲線是用極坐標來表示者：

$$r=2a\cos\vartheta$$

$$r=\frac{a}{\cos\vartheta}$$

【提示】極坐標與笛卡兒坐標之間的聯帶關係，將於下面第3.67習題及第3.2圖中詳加說明。吾人易於確實相信者，即第一條曲線是以$P(x_0,y_0)=P(a,0)$這個點爲中心，以$a$爲半徑的一個「圓」，而第二條曲線却爲一條直線$x=a$。

【答案】取個交會點是用笛卡兒坐標來表示者：

$$P_1(+a,+a)\text{ 及 }P_2(+a,-a)$$

## 習題1.19

試討論下列各表面的形狀：

a）$z=2xy$

b）$z=x^2-y^2$

c）$z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

此外，還要決定等高曲線的形狀，以及與平面$\phi=$konst及柱面$r=$konst的交會點（konst 代表常數；$r$與$\phi$代表平面極坐標）。試問：假如$x-y$平面的$(x,y)$這個點沿着一條直線$\phi=$konst（konst 代表常數）向坐標原點作進入之移動時，該$z$究將趨向於採取那一種數值？

【提示】如用柱面坐標$(z,r,\phi)$～～～見「附註」～～來表示，各表面含有比較簡單的方程式如下：

a）$z=r^2\sin 2\phi$

b）$z=r^2\sin 2\left(\phi+\dfrac{\pi}{4}\right)$，

c）$z=\cos 2\phi$

爲首兩個表面是恒等的，所不同者只是b）項依$z$軸作$\dfrac{\pi}{4}$之旋轉而已。在c）項方面，$z$與$r$絲毫不發生關係。

附註：柱面坐標與笛卡兒坐標之間的連帶關係，將於後面「習題4.18」及第4.1圖中開始加以應用。

【答案】a）$z$趨向於0，$(\phi=k)$

b） $z$ 趨向於0，

c） $z$ 趨向於 $\cos 2k$.

## 習題1.20

一端鬆緊，一端固定的一根橫梁，其彎曲振動的頻率方程式如下式所示:

$$\tan x = \tanh x$$

試對此超越方程式所屬「根」的位置，作圖說明概括之情形。就最小的正號「根」而言，應該決定近似值的一個修正數爲 $x_0=\dfrac{5\pi}{4}=3,926991\cdot$

爲此要設法爲 $\tanh x$ 求得一個近似公式，而且由此獲得 $\tanh x_0$ 的一個近似值；法將 $\tanh$ 公式按照小的數量 $e^{-x}$ 予以展開，成爲一個級數。

【提示】吾人求得：

$$\tanh x=\frac{e^{+x}-e^{-x}}{e^{+x}+e^{-x}}=1-2e^{-2x}\pm\cdots\cdots$$

由此可知 $\tanh x_0 \approx 1-2e^{-\frac{5\pi}{2}}$

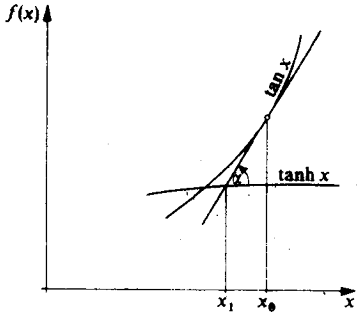


圖 1－1

現在可將兩個函數 $\tan x$ 及 $\tanh x$ 的進展全貌，在 $x_0$ 的附近作一略圖，如第 1.1 圖所示。我們從這個略圖中便可讀出

$$\frac{d}{dx}[\tan x]_{x_0}=2=\tan\alpha\approx\frac{\tan x_0-\tanh x_0}{x_0-x_1}$$

由此求得改正過的近似值如下：

$$x_1=x_0+\frac{1}{2}[\tanh x_0-\tan x_0].$$