

SCHAUM'S  
ouTlines

全美经典 学习指导系列

# 工程电磁场基础

[美] J. A. 埃德米尼斯特尔 著

雷银照 吴静 等 译

涵盖全部课程基础

351道精选习题及其详解

451道补充习题及其答案

迅速提高解题能力

自学的最佳参考书



科学出版社

麦格劳-希尔教育出版集团

全美经典学习指导系列

# 工程电磁场基础

[美]J.A. 埃德米尼斯特尔 著

雷银照 吴 静 等译 钱宝良 校

科学出版社

麦格劳-希尔教育出版集团

2002

## 内 容 简 介

本书是根据美国阿克伦大学 J. A. 埃德米尼斯特尔教授所著的“Theory and Problems of Electromagnetics”（第二版）译出的。

全书共有 17 章，主要介绍了工程电磁场的基本理论，内容涵盖了矢量分析、静电场、恒定电场、恒定磁场、时变场、电磁波、波导、天线、传输线以及磁路等。每章的结构相同，先介绍基本理论，然后给出了习题的详细求解过程，最后列出了一些补充习题，而且所有习题都附有答案。

本书列出了 394 道例题、426 道习题，适合强、弱电专业的本科生、研究生使用，对于从事电磁场课程教学的教师也有参考价值。

**Joseph A. Edminister: Schaum's Outlines Theory and Problems of Electromagnetics, Second Edition**

ISBN: 0 - 07 - 018993 - 5

Copyright © 1995 by the McGraw-Hill Companies, Inc.

Authorized translation from the English language edition published by McGraw-Hill Companies, Inc.

All rights reserved.

本书中文简体字版由科学出版社和美国麦格劳-希尔教育出版集团合作出版，未经出版者书面许可，不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分。

版权所有，翻印必究。

本书封面贴有 McGraw-Hill 公司防伪标签，无标签者不得销售。

图字：01 - 2001 - 1762 号

### 图书在版编目(CIP)数据

工程电磁场基础/[美]埃德米尼斯特尔(Edminister, J. A.)著;雷银照等译. —北京:科学出版社, 2002

(全美经典学习指导系列)

ISBN 7-03-009390-9

I. 工… II. ①埃… ②雷… III. 电磁场-研究 IV. 0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 032671 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

百练印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2002 年 1 月 第 一 版 开本: A4 (890×1240)

2002 年 1 月 第一次印刷 印张: 15 1/4

印数: 1—4 000 字数: 421 000

定价: 26.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

## 译 者 序

电磁场理论是高等学校电类专业的一门技术基础课。由于电磁场无形、无色、无味，看不见摸不着，它的宏观规律隐含在用符号表示的麦克斯韦方程组中，所以这门课抽象、难学，需要反复琢磨才有可能建立正确的物理图像，也只有临摹大量的例题才能较快地掌握分析、求解问题的方法。正是基于这样的认识，我们翻译了这本书。

本书涵盖了工程电磁场基础知识的全部内容，包括矢量分析、静电场、恒定电场、恒定磁场、时变场、电磁波、波导、天线、传输线以及磁路等。全书共 17 章，每章都有相同的结构，先介绍基本理论，然后详细给出了习题的求解过程，最后列出了一些补充习题，而且所有习题都附有答案。本书列出了 394 道例题、426 道习题，特别适合强、弱电专业的本科生、研究生使用，对于从事电磁场课程教学的教师也有参考价值。

本书由雷银照（第 1 章、附录）、吴静（第 7、13、15、16 章）、王新掌（第 5、6、10、12 章）、刘本田（第 8、11、14、17 章）、胡玉霞（第 9 章）、周俊华（第 2 章）、吴素文（第 3 章）、熊华俊（第 4 章）翻译。对于原书中明显的印刷错误，我们在翻译时也都给予了改正。本书由雷银照统稿，并加注了全书的译者注。校对由钱宝良担任。

由于译者的学术水平和英文水平有限，书中可能会有不少错误，欢迎读者批评指正。

译 者

2001 年 3 月 16 日

## 前 言

本书第二版提供了三章新内容——传输线、波导和天线。对于学生和从事电磁场理论研究的专业人员来说，这些内容的引入使本书成为更强有力的工具。在这里，衷心感谢我的同事 M.L.Kult 和 K.F.Lee 对这一有价值资料的贡献。

此版保留第一版的基本做法：“像在其他绍姆大纲的书籍中一样，重点在于如何求解习题。每一章首先介绍基本理论，然后详细列举了大量的习题求解过程，并绘出许多图形，最后附有一些补充习题。全书尽可能使用简单的数学知识，避免抽象方法。在多年的教学实践中，我发现绘制草图有利于求解大部分习题。”

我希望把这本书再一次地奉献给我的学生。

J.A. 埃德米尼斯特尔

# 目 录

<b>第1章 矢量分析</b> .....	1
1.1 引言 .....	1
1.2 矢量符号 .....	1
1.3 矢量代数 .....	1
1.4 坐标系 .....	2
1.5 微分体元、微分面元和微分线元 .....	4
习题求解 .....	4
补充习题 .....	8
<b>第2章 库仑力和电场强度</b> .....	10
2.1 库仑定律 .....	10
2.2 电场强度 .....	11
2.3 电荷分布 .....	11
2.4 标准电荷形态 .....	12
习题求解 .....	13
补充习题 .....	21
<b>第3章 电通量和高斯定律</b> .....	23
3.1 区域内的净电荷 .....	23
3.2 电通量和电通量密度 .....	23
3.3 高斯定律 .....	24
3.4 电通量密度和电场强度之间的关系 .....	24
3.5 特殊高斯面 .....	25
习题求解 .....	26
补充习题 .....	30
<b>第4章 散度和散度定理</b> .....	33
4.1 散度 .....	33
4.2 笛卡儿坐标系中的散度 .....	33
4.3 $\mathbf{D}$ 的散度 .....	34
4.4 $\nabla$ 算子 .....	35
4.5 散度定理 .....	35
习题求解 .....	36
补充习题 .....	40
<b>第5章 静电场中的功、能和位</b> .....	43
5.1 移动点电荷所做的功 .....	43
5.2 静电场的保守性 .....	43
5.3 两点间的电位 .....	44
5.4 点电荷的电位 .....	44
5.5 分布电荷的电位 .....	44
5.6 梯度 .....	45
5.7 $\mathbf{E}$ 和 $V$ 之间的关系 .....	46
5.8 静电场中的能量 .....	46

习题求解 .....	47
补充习题 .....	52
<b>第 6 章 电流、电流密度和导体 .....</b>	<b>55</b>
6.1 引言 .....	55
6.2 运动电荷 .....	55
6.3 运流电流密度 $\mathbf{J}$ .....	55
6.4 传导电流密度 $\mathbf{J}$ .....	56
6.5 电导率 $\sigma$ .....	56
6.6 电流 $I$ .....	57
6.7 电阻 $R$ .....	57
6.8 电流面密度 $\mathbf{K}$ .....	58
6.9 电流的连续性 .....	59
6.10 导体-电介质的边界条件 .....	60
习题求解 .....	61
补充习题 .....	65
<b>第 7 章 电容和电介质 .....</b>	<b>68</b>
7.1 极化强度 $\mathbf{P}$ 和相对介电常量 $\epsilon_r$ .....	68
7.2 电容 .....	68
7.3 多种电介质电容器 .....	69
7.4 电容器中储存的能量 .....	70
7.5 一定电压条件下的 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{E}$ .....	70
7.6 一定电量条件下的 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{E}$ .....	71
7.7 两种电介质分界面上的边界条件 .....	71
习题求解 .....	72
补充习题 .....	78
<b>第 8 章 拉普拉斯方程 .....</b>	<b>81</b>
8.1 引言 .....	81
8.2 泊松方程和拉普拉斯方程 .....	81
8.3 拉普拉斯方程的显形式 .....	81
8.4 惟一性定理 .....	82
8.5 均值定理和最大值定理 .....	82
8.6 笛卡儿坐标系中单变量的解 .....	82
8.7 笛卡儿坐标系中乘积形式的解 .....	83
8.8 圆柱坐标系中乘积形式的解 .....	83
8.9 球坐标系中乘积形式的解 .....	84
习题求解 .....	85
补充习题 .....	92
<b>第 9 章 安培定律与磁场 .....</b>	<b>95</b>
9.1 引言 .....	95
9.2 毕奥-沙伐定律 .....	95
9.3 安培定律 .....	96
9.4 旋度 .....	96
9.5 $\mathbf{J}$ 和 $\mathbf{H}$ 的关系 .....	98
9.6 磁通密度 $\mathbf{B}$ .....	98
9.7 矢量磁位 $\mathbf{A}$ .....	99

9.8 斯托克斯定理 .....	100
习题求解 .....	100
补充习题 .....	105
<b>第 10 章 磁场中的力和转矩</b> .....	<b>108</b>
10.1 作用于粒子上的磁力 .....	108
10.2 电场和磁场共存的区域 .....	108
10.3 作用于电流元上的磁力 .....	109
10.4 功和功率 .....	109
10.5 转矩 .....	110
10.6 平面线圈的磁矩 .....	110
习题求解 .....	111
补充习题 .....	115
<b>第 11 章 电感和磁路</b> .....	<b>118</b>
11.1 电感 .....	118
11.2 规则导体结构的电感 .....	119
11.3 法拉第定律和自感 .....	119
11.4 内电感 .....	120
11.5 互感 .....	120
11.6 磁路 .....	121
11.7 $B-H$ 曲线 .....	122
11.8 磁路安培定律 .....	123
11.9 带有气隙的铁芯 .....	124
11.10 多个线圈 .....	124
11.11 并联磁路 .....	124
习题求解 .....	125
补充习题 .....	133
<b>第 12 章 位移电流和感应电动势</b> .....	<b>136</b>
12.1 位移电流 .....	136
12.2 $J_e$ 与 $J_D$ 的比 .....	137
12.3 法拉第定律和楞次定律 .....	137
12.4 在恒定场中运动的导体 .....	138
12.5 在时变场中运动的导体 .....	139
习题求解 .....	139
补充习题 .....	143
<b>第 13 章 麦克斯韦方程组和边界条件</b> .....	<b>146</b>
13.1 引言 .....	146
13.2 磁场的边界关系 .....	146
13.3 边界上的面电流 .....	147
13.4 边界条件的总结 .....	147
13.5 麦克斯韦方程组 .....	147
习题求解 .....	148
补充习题 .....	152
<b>第 14 章 电磁波</b> .....	<b>154</b>
14.1 引言 .....	154
14.2 波动方程 .....	154



14.3	在笛卡儿坐标系中波动方程的解	154
14.4	弱导电介质中波动方程的解	155
14.5	理想介质中波动方程的解	156
14.6	良导体中波动方程的解 透入深度	156
14.7	垂直入射时的分界面条件	157
14.8	斜入射和斯涅耳定律	158
14.9	垂直极化	159
14.10	水平极化	159
14.11	驻波	159
14.12	功和坡印廷矢量	160
	习题求解	161
	补充习题	166
<b>第 15 章</b>	<b>传输线</b>	<b>169</b>
15.1	引言	169
15.2	分布参数	169
15.3	增量模型 电压 电流	170
15.4	正弦稳态激励	170
15.5	史密斯图	172
15.6	阻抗匹配	174
15.7	单短截线匹配	175
15.8	双短截线匹配	176
15.9	阻抗测量	177
15.10	无损耗线中的瞬变现象	177
	习题求解	179
	补充习题	194
<b>第 16 章</b>	<b>波导</b>	<b>199</b>
16.1	引言	199
16.2	横向场和轴向场	199
16.3	TE 模和 TM 模 波阻抗	200
16.4	轴向场的确定	201
16.5	模的截止频率	201
16.6	主模	202
16.7	无损耗波导中的传输功率	203
16.8	有损耗波导中的功率损耗	204
	习题求解	205
	补充习题	212
<b>第 17 章</b>	<b>天线</b>	<b>214</b>
17.1	引言	214
17.2	电流源和场 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$	214
17.3	电偶极子 (赫兹偶极子) 天线	214
17.4	天线参数	215
17.5	小圆环天线	216
17.6	有限长偶极子	216
17.7	单极子天线	217
17.8	自阻抗和互阻抗	218

---

17.9 接收天线 .....	218
17.10 线性阵列 .....	219
17.11 反射器 .....	220
习题求解 .....	221
补充习题 .....	227
附录 .....	229

## 1.1 引言

向量主要在物理和数学课程的笛卡儿坐标系中引入。虽然在微积分教科书中可以找到有关圆柱坐标的内容,但球坐标的内容却很少提到。在电磁理论中,这三种坐标都要用到。作为向量和坐标系的表示法,不同的书籍可能也不相同。为了提出问题和解决问题,需要对本书中使用的表示法有个彻底的了解。

## 1.2 向量符号

为了把**向量**(具有大小和方向的量)和**标量**(只有大小的量)区别开来,向量符号用黑体表示。**单位向量**的绝对值(大小或长度)是1,本书将始终用小写黑体  $\mathbf{a}$  来表示单位向量。在向量  $\mathbf{A}$  方向上的单位向量可用向量  $\mathbf{A}$  的绝对值除向量  $\mathbf{A}$  确定:

$$\mathbf{a}_A = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \quad \text{或} \quad \frac{\mathbf{A}}{A}$$

用沿着笛卡儿坐标系  $x$ 、 $y$  和  $z$  轴的单位向量  $\mathbf{a}_x$ 、 $\mathbf{a}_y$  和  $\mathbf{a}_z$ , 可以把任意一个向量表示成分量形式:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$$

根据各分量的含义,向量的绝对值可定义为

$$|\mathbf{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

## 1.3 向量代数

1. 向量可以作加减运算。

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \pm \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \pm (B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z) \\ &= (A_x \pm B_x) \mathbf{a}_x + (A_y \pm B_y) \mathbf{a}_y + (A_z \pm B_z) \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

2. 向量运算满足结合律、分配律和交换律。

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \\ k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= k\mathbf{A} + k\mathbf{B}, \quad (k_1 + k_2)\mathbf{A} = k_1\mathbf{A} + k_2\mathbf{A} \\ \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \mathbf{B} + \mathbf{A} \end{aligned}$$

3. 两个向量的点积定义为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad (\text{读作“} \mathbf{A} \text{ 点乘 } \mathbf{B} \text{”})$$

这里  $\theta$  是  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  之间的小夹角<sup>①</sup>。由下面的例1可知

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

在特例情况下有  $|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$ 。

**例1** 向量点积服从分配律和标量乘法规则:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad \mathbf{A} \cdot k\mathbf{B} = k(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

从而有

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot (B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z) \\ &= A_x B_x (\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_x) + A_y B_y (\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_y) + A_z B_z (\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z) \end{aligned}$$

<sup>①</sup> 小夹角是指不大于  $180^\circ$  的角。——译者注

$$+ A_x B_y (\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y) + \dots + A_z B_y (\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_y)$$

由于相同的单位矢量点乘时, 夹角  $\theta = 0^\circ$ , 即  $\cos\theta = 1$ ; 不同的单位矢量点乘时, 夹角  $\theta = 90^\circ$ , 即  $\cos\theta = 0$ , 所以可得

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

4. 两个矢量的叉积定义为

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (AB\sin\theta)\mathbf{a}_n \quad (\text{读作“}\mathbf{A} \text{叉乘}\mathbf{B}\text{”})$$

这里  $\theta$  是  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  之间的小夹角,  $\mathbf{a}_n$  是垂直于从同一点出发的  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  所共同决定的平面的单位矢量。由于  $\mathbf{a}_n$  有两个可选的方向, 所以需要进一步对  $\mathbf{a}_n$  的定义, 我们规定当  $\mathbf{A}$  朝向  $\mathbf{B}$  旋转时, 右手螺旋前进的方向就是所选择的法线的方向(见图1-1)。正是由于方向的原因, 致使叉积不满足交换律, 而满足

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

把叉积展开成分量形式, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \times (B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z) \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{a}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{a}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

上式可用行列式简单地表示成

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

例2 已知  $\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y - 3\mathbf{a}_z$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y$ , 求  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  和  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 。

解

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (2)(1) + (4)(-1) + (-3)(0) = -2$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y - 6\mathbf{a}_z$$

### 1.4 坐标系

一个问题无论是柱对称还是球对称, 都可以在我们所熟知的笛卡儿坐标系中表示和求解, 但这将显示不出对称性, 而且在多数情况下会带来不必要的麻烦。因此, 本书除了使用笛卡儿坐标系以外, 还将用到圆柱坐标系和球坐标系。我们同时研究这三种坐标系以说明它们的相似和不同之处。

用三种坐标系来描述点  $P$ , 笛卡儿坐标系中为  $(x, y, z)$ , 圆柱坐标系中为  $(r, \varphi, z)$ , 球坐标系中为  $(r, \theta, \varphi)$ , 如图1-2所示。我们应严格遵守坐标的表示顺序。角  $\varphi$  在圆柱坐标系和球坐标系中是指同一个角。但在坐标的顺序上,  $\varphi$  位于圆柱坐标系的第二个位置上, 而在球坐标系中它位于第三个位置上。同一个符号  $r$  在圆柱坐标系和球坐标系中有着完全不同的含义。在

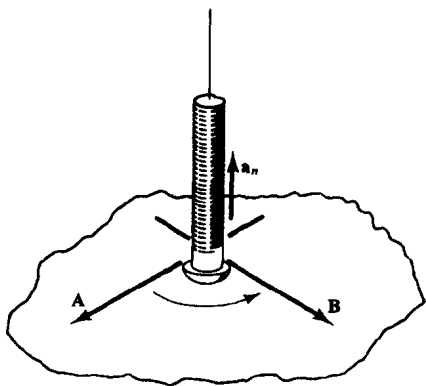
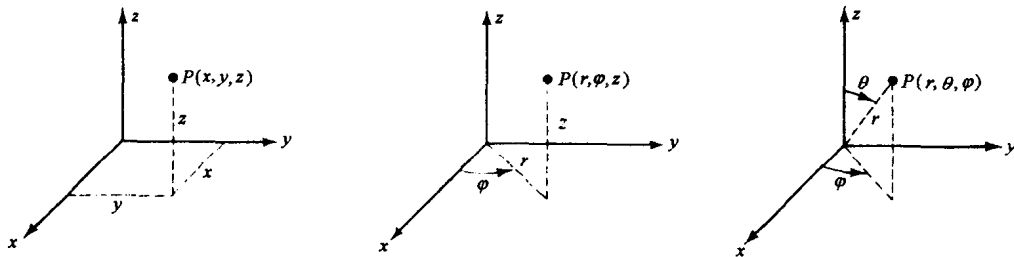


图 1-1



(a) 笛卡儿坐标系

(b) 圆柱坐标系

(c) 球坐标系

图 1-2

圆柱坐标系中  $r$  是点  $P$  到  $xoy$  平面的垂线与  $z$  轴的距离,而在球坐标系中  $r$  是原点到点  $P$  的距离。根据问题的上下文,可以清楚地判断  $r$  的确切含义。

一个点也可以用三个正交曲面来表示,如图 1-3 所示。在笛卡儿坐标系中,三个曲面分别是无限大平面  $x = \text{const.}$ <sup>①</sup>,  $y = \text{const.}$  和  $z = \text{const.}$ 。在圆柱坐标系中,  $z = \text{const.}$  是与笛卡儿坐标系中相同的无限大平面,  $\varphi = \text{const.}$  是一边沿着  $z$  轴的半平面,  $r = \text{const.}$  是直圆柱面,这三个曲面正交且交点就是点  $P$ 。在球坐标系中,  $\varphi = \text{const.}$  是与圆柱坐标系中相同的半平面,  $r = \text{const.}$  是球心位于原点的球面,  $\theta = \text{const.}$  是以  $z$  轴为中心轴、顶点位于坐标原点的直圆锥面。需要注意,角  $\theta$  的范围限定为  $0 \leq \theta \leq \pi$ 。

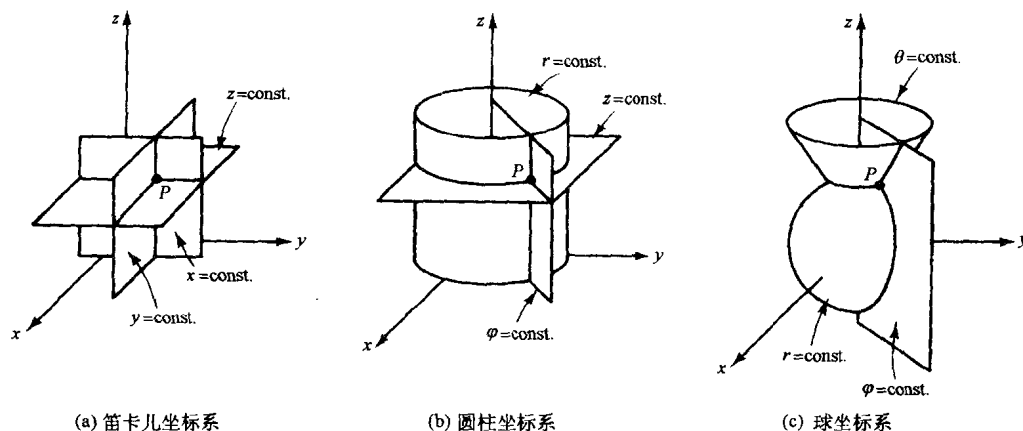


图 1-3

图 1-4 说明,点  $P$  处有三个单位矢量。在笛卡儿坐标系中,单位矢量有固定的方向,而与点  $P$  的位置无关。这在其他两个坐标系中并不成立(但  $\mathbf{a}_z$  的方向例外)。任何一个单位矢量都垂直于它的坐标面,并朝向坐标增加的方向。需要说明的是,这三个坐标系都是右手坐标系:

$$\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z, \quad \mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\varphi = \mathbf{a}_z, \quad \mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\varphi$$

在以上三个坐标系中,一个矢量的分量形式可写为

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z \quad (\text{笛卡儿坐标系})$$

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{a}_r + A_\varphi \mathbf{a}_\varphi + A_z \mathbf{a}_z \quad (\text{圆柱坐标系})$$

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{a}_r + A_\theta \mathbf{a}_\theta + A_\varphi \mathbf{a}_\varphi \quad (\text{球坐标系})$$

应当注意分量  $A_x, A_y, \dots, A_\varphi$  一般不是常数,而是坐标系中坐标的函数。

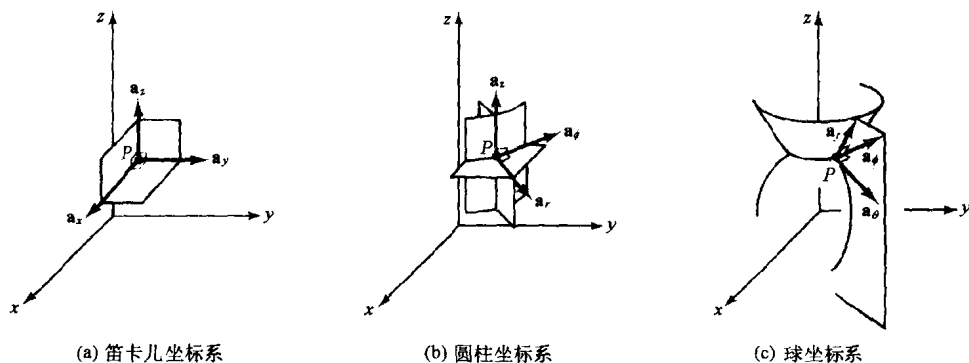


图 1-4

① const. 的含义是常数,它是英文单词 constant 的缩写。以后各章均如此。——译者注

### 1.5 微分体元、微分面元和微分线元

在电磁学中,大部分问题必须通过沿曲线、曲面或区域的积分才能求解,因此我们应对相应的微分元有充分的了解。

微分体元  $dv$  可通过点  $P$  处的坐标增量求出,当点  $P$  的坐标增加为  $(x + dx, y + dy, z + dz)$ , 或  $(r + dr, \varphi + d\varphi, z + dz)$ , 或  $(r + dr, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$  时,微分体积  $dv$  就形成了。在三个坐标系中,取微分体积是一阶无穷小量,微分体积  $dv$  对应的区域是长方体。在三个坐标系中,  $dv$  的表达式由图 1-5 给出。

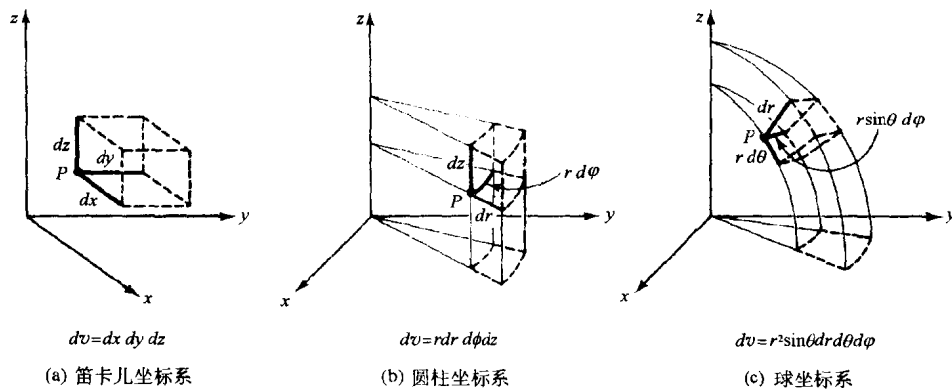


图 1-5

从图 1-5 也可以看出包围微分体积的面元的面积。例如在球坐标系中,垂直于  $\mathbf{a}_r$  的微分面元是

$$dS = (r d\theta)(r \sin\theta d\varphi) = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

微分线元  $dl$  是通过点  $P$  处的增量长方体的对角线长度,所以

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (\text{笛卡儿坐标系})^{\text{①}}$$

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2 \quad (\text{圆柱坐标系})$$

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \quad (\text{球坐标系})$$

### 习 题 求 解

1.1 试说明图 1-6 中从点  $M(x_1, y_1, z_1)$  到点  $N(x_2, y_2, z_2)$  的矢量可表示成

$$(x_2 - x_1)\mathbf{a}_x + (y_2 - y_1)\mathbf{a}_y + (z_2 - z_1)\mathbf{a}_z$$

使用点  $M$  和  $N$  的坐标可以写出图 1-6 中的两个位置矢量  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{A} = x_1\mathbf{a}_x + y_1\mathbf{a}_y + z_1\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{B} = x_2\mathbf{a}_x + y_2\mathbf{a}_y + z_2\mathbf{a}_z$$

于是

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = (x_2 - x_1)\mathbf{a}_x + (y_2 - y_1)\mathbf{a}_y + (z_2 - z_1)\mathbf{a}_z$$

1.2 在笛卡儿坐标系中求从点  $(2, -4, 1)$  到点  $(0, -2, 0)$  的矢量  $\mathbf{A}$ , 并写出它的单位矢量。

$$\mathbf{A} = (0 - 2)\mathbf{a}_x + [-2 - (-4)]\mathbf{a}_y + (0 - 1)\mathbf{a}_z = -2\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$$

$$|\mathbf{A}|^2 = (-2)^2 + (2)^2 + (-1)^2 = 9$$

$$\mathbf{a}_A = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = -\frac{2}{3}\mathbf{a}_x + \frac{2}{3}\mathbf{a}_y - \frac{1}{3}\mathbf{a}_z$$

①  $dx^2$  应理解为  $(dx)^2$ ,  $dy^2$ ,  $dz^2$ ,  $dr^2$ ,  $d\theta^2$  和  $d\varphi^2$  也是同样含义。——译者注

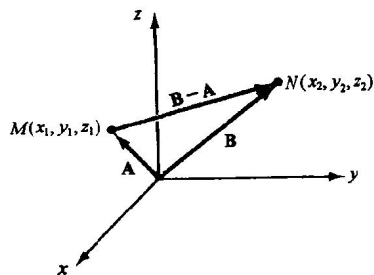


图 1-6

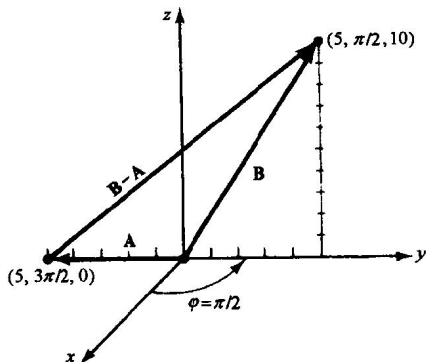


图 1-7

1.3 在圆柱坐标系中求点  $(5, 3\pi/2, 0)$  和点  $(5, \pi/2, 10)$  之间的距离。

**解** 首先写出笛卡儿坐标系中的位置矢量  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  (见图 1-7):

$$\mathbf{A} = -5\mathbf{a}_y, \quad \mathbf{B} = 5\mathbf{a}_y + 10\mathbf{a}_z$$

这样,  $\mathbf{B} - \mathbf{A} = 10\mathbf{a}_y + 10\mathbf{a}_z$ , 从而两点间的距离是

$$|\mathbf{B} - \mathbf{A}| = 10\sqrt{2}$$

在笛卡儿坐标系中, 两点间的矢量可用习题 1.1 的方法得到, 但在圆柱坐标系中却不能用相同的方法获得。

1.4 试说明  $\mathbf{A} = 4\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$  和  $\mathbf{B} = \mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y - 4\mathbf{a}_z$  正交。

**解** 因为矢量的点积包含  $\cos\theta$ , 所以任意两个非零矢量的点积为零意味着  $\theta = 90^\circ$ , 而

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (4)(1) + (-2)(4) + (-1)(-4) = 0$$

1.5 已知  $\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y$  和  $\mathbf{B} = 6\mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_z$ , 试分别用 (a) 叉乘, (b) 点乘求矢量间的小夹角。

**解** (a)

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -16\mathbf{a}_x + 8\mathbf{a}_y + 12\mathbf{a}_z$$

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{(2)^2 + (4)^2 + (0)^2} = 4.47, \quad |\mathbf{B}| = \sqrt{(0)^2 + (6)^2 + (-4)^2} = 7.21$$

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \sqrt{(-16)^2 + (8)^2 + (12)^2} = 21.54$$

由于  $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin\theta$ , 所以

$$\sin\theta = \frac{21.54}{(4.47)(7.21)} = 0.668 \quad \text{或} \quad \theta = 41.9^\circ$$

(b)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (2)(0) + (4)(6) + (0)(-4) = 24$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|} = \frac{24}{(4.47)(7.21)} = 0.745 \quad \text{或} \quad \theta = 41.9^\circ$$

1.6 已知  $\mathbf{F} = (y-1)\mathbf{a}_x + 2x\mathbf{a}_y$ , 求点  $(2, 2, 1)$  处的矢量及该矢量在  $\mathbf{B}$  上的投影, 这里  $\mathbf{B} = 5\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$ 。

**解**  $\mathbf{F}(2, 2, 1) = (2-1)\mathbf{a}_x + (2)(2)\mathbf{a}_y = \mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y$

如图 1-8 所示,  $\mathbf{A}$  在  $\mathbf{B}$  上的投影可通过  $\mathbf{B}$  的单位矢量与  $\mathbf{A}$  的点乘得到:

$$\mathbf{A} \text{ 在 } \mathbf{B} \text{ 上的投影} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_B = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}$$

因此, 在点  $(2, 2, 1)$  处, 有

$$\mathbf{F} \text{ 在 } \mathbf{B} \text{ 上的投影} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_B = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = \frac{(1)(5) + (4)(-1) + (0)(2)}{\sqrt{30}} = \frac{1}{\sqrt{30}}$$

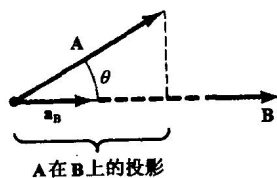


图 1-8

1.7 已知  $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_z$ ,  $\mathbf{C} = 2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$ , 求  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ , 并与  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  比较。

**解** 先计算

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$$

进而

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$$

类似地可以计算出  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = 2\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$ 。因此,在矢量三重积中必须先进行圆括弧中的叉积运算。

1.8 用习题 1.7 中的矢量  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{C}$ , 求  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ , 并与  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$  比较。

由习题 1.7 可知,  $\mathbf{B} \times \mathbf{C} = -4\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$ , 则

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = (1)(-4) + (1)(-1) + (0)(2) = -5$$

同样由习题 1.7 知,  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 2\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$ , 这样

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = (2)(0) + (-2)(2) + (-1)(1) = -5$$

在标量三重积中圆括弧不是必需的, 因为只有先计算叉积才有意义。通常, 标量三重积可表示为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

只要矢量呈现有相同的循环次序, 其结果都是一样的。在这个循环次序中, 标量三重积没有符号变化。

1.9 求圆柱坐标系中从  $z$  轴上的点  $z=h$  指向点  $(r, \varphi, 0)$  的单位矢量, 见图 1-9。

从图 1-9 可看出, 矢量  $\mathbf{R}$  是两个矢量的差:

$$\mathbf{R} = r\mathbf{a}_r - h\mathbf{a}_z, \quad \mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} = \frac{r\mathbf{a}_r - h\mathbf{a}_z}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

在以上表达式中角度  $\varphi$  虽然没有明确显示出来, 但是  $\mathbf{R}$  和  $\mathbf{a}_R$  都通过  $\mathbf{a}$ , 随着  $\varphi$  变化。

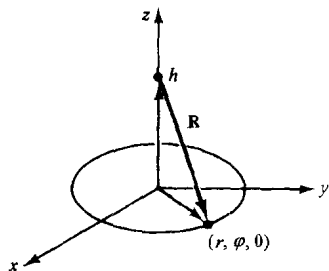


图 1-9

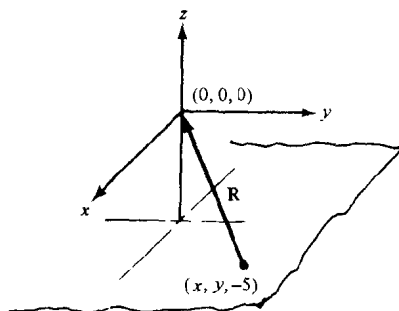


图 1-10

1.10 试写出在平面  $z = -5$  上的任意点指向原点的单位矢量, 见图 1-10。

由于该问题是在笛卡尔坐标系中提出的, 所以利用习题 1.1 中的两点公式, 可得

$$\mathbf{R} = -x\mathbf{a}_x - y\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z, \quad \mathbf{a}_R = \frac{-x\mathbf{a}_x - y\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + 25}}$$

1.11 利用球坐标系, 求半径为  $a$  的球面上环带  $0 \leq \theta \leq \beta$  的表面积 (见图 1-11), 进一步再求出当  $\alpha = 0$  和  $\beta = \pi$  时的表面积。

由图 1-5(c) 可写出球面的微分面元为

$$dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

于是

$$A = \int_0^{2\pi} \int_\alpha^\beta a^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 2\pi a^2 (\cos\alpha - \cos\beta)$$

把  $\alpha = 0$  和  $\beta = \pi$  代入上式, 得  $A = 4\pi a^2$ , 这是整个球的表面积。



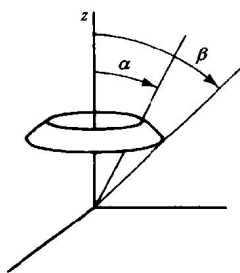


图 1-11

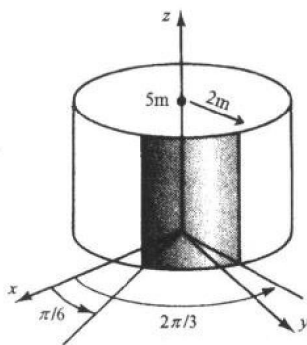


图 1-12

1.12 利用微分体元求半径为  $a$  的球的体积。

**解** 由图 1-5(c)可知  $dv = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$ , 从而得

$$v = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^a r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi a^3$$

1.13 利用圆柱坐标系, 求直圆柱的侧面面积, 其中  $r = 2\text{m}$ ,  $h = 5\text{m}$ ,  $30^\circ \leq \varphi \leq 120^\circ$ , 见图 1-12。

**解** 由于微分面元  $dS = r d\varphi dz$ , 所以

$$A = \int_0^5 \int_{\pi/6}^{2\pi/3} 2 d\varphi dz = 5\pi \text{ m}^2$$

1.14 把笛卡儿坐标系中的矢量

$$\mathbf{A} = y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{a}_z$$

变换成圆柱坐标系中的矢量。

**解** 参考图 1-2(b)可知

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

因此

$$\mathbf{A} = r\sin\varphi\mathbf{a}_x + r\cos\varphi\mathbf{a}_y + r\cos^2\varphi\mathbf{a}_z$$

现在分别写出笛卡儿坐标系中的单位矢量在  $\mathbf{a}_r$ ,  $\mathbf{a}_\varphi$  和  $\mathbf{a}_z$  上的投影:

$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_r = \cos\varphi, \quad \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\varphi = -\sin\varphi, \quad \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_z = 0$$

$$\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_r = \sin\varphi, \quad \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\varphi = \cos\varphi, \quad \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z = 0$$

$$\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r = 0, \quad \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\varphi = 0, \quad \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = 1$$

所以

$$\mathbf{a}_x = \cos\varphi\mathbf{a}_r - \sin\varphi\mathbf{a}_\varphi, \quad \mathbf{a}_y = \sin\varphi\mathbf{a}_r + \cos\varphi\mathbf{a}_\varphi, \quad \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z$$

于是

$$\mathbf{A} = 2r\sin\varphi\cos\varphi\mathbf{a}_r + (r\cos^2\varphi - r\sin^2\varphi)\mathbf{a}_\varphi + r\cos^2\varphi\mathbf{a}_z$$

1.15 在圆柱坐标系中, 一大小为 10 的矢量从点  $(5, 5\pi/4, 0)$  指向原点, 见图 1-13。试写出该矢量在笛卡儿坐标系中的表达式。

**解** 在圆柱坐标系中, 该矢量可被表示成  $10\mathbf{a}_r$ , 而  $\varphi = \pi/4$ , 这样

$$A_x = 10\cos\frac{\pi}{4} = \frac{10}{\sqrt{2}},$$

$$A_y = 10\sin\frac{\pi}{4} = \frac{10}{\sqrt{2}}, \quad A_z = 0$$

所以

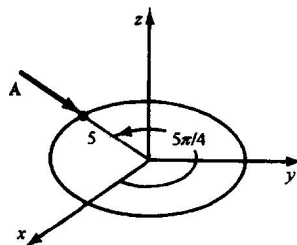


图 1-13