SCHAUM'S ouTlines

全美经典 学习指导系列

# 工程电磁场基础

〔美〕J. A. 埃德米尼斯特尔 著

雷银照 吴静 等 译

涵盖全部课程基础

351道精选习题及其详解

451道补充习题及其答案

迅速提高解题能力

自学的最佳参考书

科学出版社

麦格劳-希尔教育出版集团

全美经典学习指导系列

# 工程电磁场基础

〔美〕J.A. 埃德米尼斯特尔 著

雷银照　吴　静　等译　钱宝良 校

科学出版社

麦格劳-希尔教育出版集团

2002

## 内 容 简 介

本书是根据美国阿克伦大学J.A. 埃德米尼斯特尔教授所著的“Theory and Problems of Electromagnetics”（第二版）译出的。

全书共有17章，主要介绍了工程电磁场的基本理论，内容涵盖了矢量分析、静电场、恒定电场、恒定磁场、时变场、电磁波、波导、天线、传输线以及磁路等。每章的结构相同，先介绍基本理论，然后给出了习题的详细求解过程，最后列出了一些补充习题，而且所有习题都附有答案。

本书列出了394道例题、426道习题，适合强、弱电专业的本科生、研究生使用，对于从事电磁场课程教学的教师也有参考价值。

**Joseph A. Edminister: Schaum's Outlines Theory and Problems of Electromagnetics, Second Edition**

**ISBN:0-07-018993-5**



**图字：01-2001-1762号**

**图书在版编目(CIP)数据**

工程电磁场基础/〔美〕埃德米尼斯特尔（Edminister, J. A.）著；雷银照等译. —北京：科学出版社，2002

（全美经典学习指导系列）

ISBN 7-03-009390-9

Ⅰ. 工… Ⅱ. ①埃… ②雷… Ⅲ. 电磁场-研究 Ⅳ. 0441. 4

中国版本图书馆CIP数据核字（2001）第032671号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年1月第 一 版 开本：A4（890×1240）

2002年1月第一次印刷 印张：15 1/4

印数：1—4 000 字数：421 000

**定价：26.00元**

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

# 译 者 序

电磁场理论是高等学校电类专业的一门技术基础课。由于电磁场无形、无色、无味，看不见摸不着，它的宏观规律隐含在用符号表示的麦克斯韦方程组中，所以这门课抽象、难学，需要反复琢磨才有可能建立正确的物理图像，也只有临摹大量的例题才能较快地掌握分析、求解问题的方法。正是基于这样的认识，我们翻译了这本书。

本书涵盖了工程电磁场基础知识的全部内容，包括矢量分析、静电场、恒定电场、恒定磁场、时变场、电磁波、波导、天线、传输线以及磁路等。全书共17章，每章都有相同的结构，先介绍基本理论，然后详细给出了习题的求解过程，最后列出了一些补充习题，而且所有习题都附有答案。本书列出了394道例题、426道习题，特别适合强、弱电专业的本科生、研究生使用，对于从事电磁场课程教学的教师也有参考价值。

本书由雷银照（第1章、附录）、吴静（第7、13、15、16章）、王新掌（第5、6、10、12章）、刘本田（第8、11、14、17章）、胡玉霞（第9章）、周俊华（第2章）、吴素文（第3章）、熊华俊（第4章）翻译。对于原书中明显的印刷错误，我们在翻译时也都给予了改正。本书由雷银照统稿，并加注了全书的译者注。校对由钱宝良担任。

由于译者的学术水平和英文水平有限，书中可能会有不少错误，欢迎读者批评指正。

译　者

2001年3月16日

# 前　言

本书第二版提供了三章新内容——传输线、波导和天线。对于学生和从事电磁场理论研究的专业人员来说，这些内容的引入使本书成为更强有力的工具。在这里，衷心感谢我的同事 M.L.Kult 和 K.F.Lee 对这一有价值资料的贡献。

此版保留第一版的基本做法："像在其他绍姆大纲的书籍中一样，重点在于如何求解习题。每一章首先介绍基本理论，然后详细列举了大量的习题求解过程，并绘出许多图形，最后附有一些补充习题。全书尽可能使用简单的数学知识，避免抽象方法。在多年的教学实践中，我发现绘制草图有利于求解大部分习题。"

我希望把这本书再一次地奉献给我的学生。

J.A. 埃德米尼斯特尔

# 目　录

# 第1章 矢量分析

## 1.1 引言

矢量主要在物理和数学课程的笛卡儿坐标系中引入。虽然在微积分教科书中可以找到有关圆柱坐标的内容,但球坐标的内容却很少提到。在电磁理论中,这三种坐标都要用到。作为矢量和坐标系的表示法,不同的书籍可能也不相同。为了提出问题和解决问题,需要对本书中使用的表示法有个彻底的了解。

## 1.2 矢量符号

为了把**矢量**(具有大小和方向的量)和**标量**(只有大小的量)区别开来,矢量符号用黑体表示。**单位矢量**的绝对值(大小或长度)是1,本书将始终用小写黑体 **a** 来表示单位矢量。在矢量 **A** 方向上的单位矢量可用矢量 **A** 的绝对值除矢量 **A** 确定:

$$\mathbf{a}_A = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \quad 或 \quad \frac{\mathbf{A}}{A}$$

用沿着笛卡儿坐标系 $x$、$y$ 和 $z$ 轴的单位矢量 $\mathbf{a}_x$、$\mathbf{a}_y$ 和 $\mathbf{a}_z$,可以把任意一个矢量表示成分量形式:

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z$$

根据各分量的含义,矢量的绝对值可定义为

$$|\mathbf{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

## 1.3 矢量代数

1. 矢量可以作加减运算。

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \pm \mathbf{B} &= (A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z) \pm (B_x\mathbf{a}_x + B_y\mathbf{a}_y + B_z\mathbf{a}_z)\\ &= (A_x \pm B_x)\mathbf{a}_x + (A_y \pm B_y)\mathbf{a}_y + (A_z \pm B_z)\mathbf{a}_z\end{aligned}$$

2. 矢量运算满足结合律、分配律和交换律。

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$$

$$k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}, \quad (k_1 + k_2)\mathbf{A} = k_1\mathbf{A} + k_2\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

3. 两个矢量的**点积**定义为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta \qquad (读作“\mathbf{A}点乘\mathbf{B}”)$$

这里 $\theta$ 是 **A** 和 **B** 之间的小夹角①。由下面的例1可知

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

在特例情况下有 $|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$。

**例1** 矢量点积服从分配律和标量乘法规则:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \qquad \mathbf{A} \cdot k\mathbf{B} = k(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

从而有

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z) \cdot (B_x\mathbf{a}_x + B_y\mathbf{a}_y + B_z\mathbf{a}_z)\\ &= A_xB_x(\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_x) + A_yB_y(\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_y) + A_zB_z(\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z)\end{aligned}$$

---

① 小夹角是指不大于180°的角。——译者注

$$+ A_xB_y(\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y) + \cdots + A_zB_y(\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_y)$$

由于相同的单位矢量点乘时，夹角 $\theta=0°$，即 $\cos\theta=1$；不同的单位矢量点乘时，夹角 $\theta=90°$，即 $\cos\theta=0$，所以可得

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

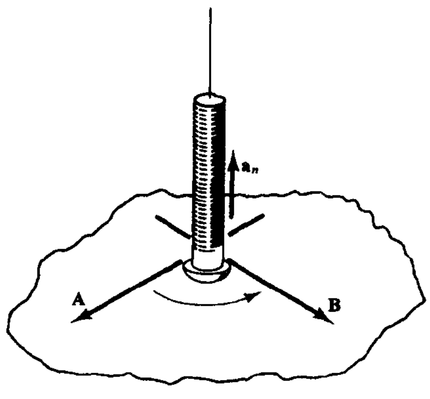



图 1-1

4. 两个矢量的**叉积**定义为

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (AB\sin\theta)\mathbf{a}_n \qquad (\text{读作“A 叉乘 B”})$$

这里 $\theta$ 是 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 之间的小夹角，$\mathbf{a}_n$ 是垂直于从同一点出发的 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 所共同决定的平面的单位矢量。由于 $\mathbf{a}_n$ 有两个可选的方向，所以需要对 $\mathbf{a}_n$ 有更进一步的定义，我们规定当 $\mathbf{A}$ 朝向 $\mathbf{B}$ 旋转时，右手螺旋前进的方向就是所选择的法线的方向（见图1-1）。正是由于方向的原因，致使叉积不满足交换律，而满足

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

把叉积展开成分量形式，有

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z) \times (B_x\mathbf{a}_x + B_y\mathbf{a}_y + B_z\mathbf{a}_z) \\ &= (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{a}_x + (A_zB_x - A_xB_z)\mathbf{a}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{a}_z\end{aligned}$$

上式可用行列式简单地表示成

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

**例 2**　已知 $\mathbf{A}=2\mathbf{a}_x+4\mathbf{a}_y-3\mathbf{a}_z$，$\mathbf{B}=\mathbf{a}_x-\mathbf{a}_y$，求 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$。

**解**

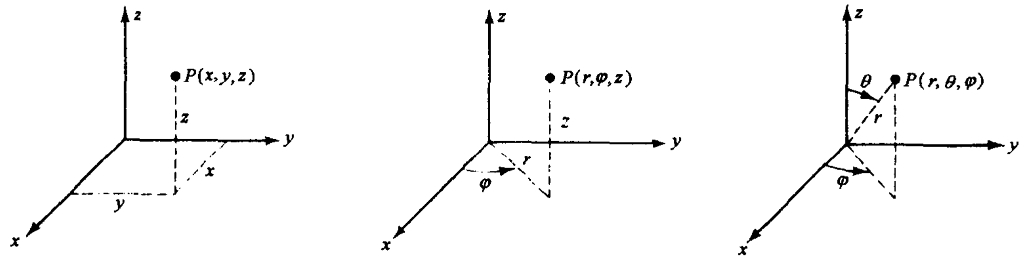
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=(2)(1)+(4)(-1)+(-3)(0)=-2$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y - 6\mathbf{a}_z$$

### 1.4　坐标系

一个问题无论是柱对称还是球对称，都可以在我们所熟知的笛卡儿坐标系中表示和求解，但这将显示不出对称性，而且在多数情况下会带来不必要的麻烦。因此，本书除了使用笛卡儿坐标系以外，还将用到圆柱坐标系和球坐标系。我们同时研究这三种坐标系以说明它们的相似和不同之处。

用三种坐标系来描述点 $P$，笛卡儿坐标系中为 $(x,y,z)$，圆柱坐标系中为 $(r,\varphi,z)$，球坐标系中为 $(r,\theta,\varphi)$，如图 1-2 所示。我们应严格遵守坐标的表示顺序。角 $\varphi$ 在圆柱坐标系和球坐标系中是指同一个角。但在坐标的顺序上，$\varphi$ 位于圆柱坐标系的第二个位置上，而在球坐标系中它位于第三个位置上。同一个符号 $r$ 在圆柱坐标系和球坐标系中有着完全不同的含义。在

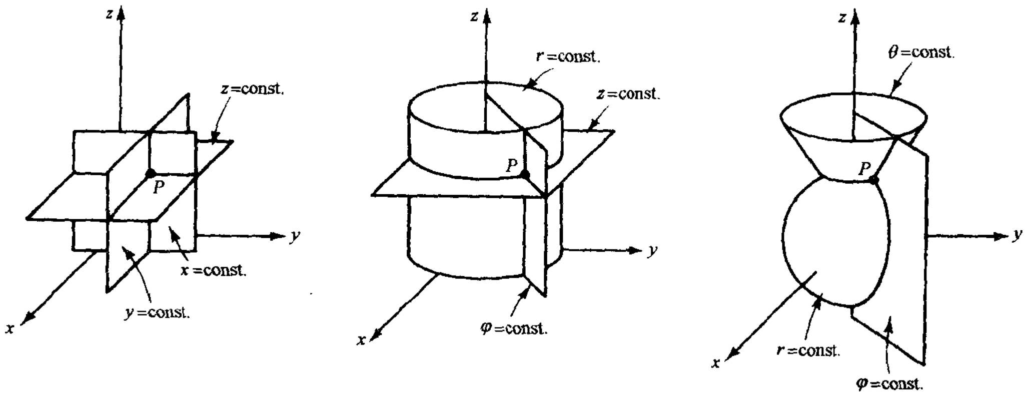



(a) 笛卡儿坐标系　　(b) 圆柱坐标系　　(c) 球坐标系

图 1-2

圆柱坐标系中 $r$ 是点 $P$ 到 $xoy$ 平面的垂线与 $z$ 轴的距离，而在球坐标系中 $r$ 是原点到点 $P$ 的距离。根据问题的上下文，可以清楚地判断 $r$ 的确切含义。

一个点也可以用三个正交曲面来表示，如图 1-3 所示。在笛卡儿坐标系中，三个曲面分别是无限大平面 $x=$ const.[①]，$y=$ const. 和 $z=$ const.。在圆柱坐标系中，$z=$ const. 是与笛卡儿坐标系中相同的无限大平面，$\varphi=$ const. 是一边沿着 $z$ 轴的半平面，$r=$ const. 是直圆柱面，这三个曲面正交且交点就是点 $P$。在球坐标系中，$\varphi=$ const. 是与圆柱坐标系中相同的半平面，$r=$ const. 是球心位于原点的球面，$\theta=$ const. 是以 $z$ 轴为中心轴、顶点位于坐标原点的直圆锥面。需要注意，角 $\theta$ 的范围限定为 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$。



(a) 笛卡儿坐标系　(b) 圆柱坐标系　(c) 球坐标系

图 1-3

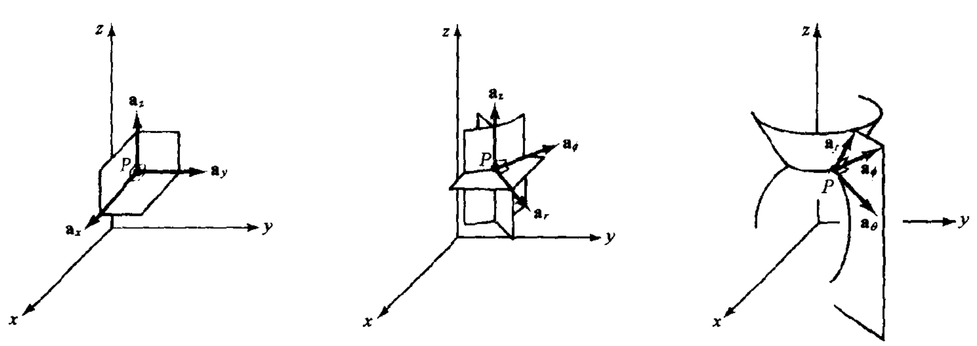
图 1-4 说明，点 $P$ 处有三个单位矢量。在笛卡儿坐标系中，单位矢量有固定的方向，而与点 $P$ 的位置无关。这在其他两个坐标系中并不成立（但 $\mathbf{a}_z$ 的方向例外）。任何一个单位矢量都垂直于它的坐标面，并朝向坐标增加的方向。需要说明的是，这三个坐标系都是右手坐标系：

$$\mathbf{a}_x\times\mathbf{a}_y=\mathbf{a}_z,\quad \mathbf{a}_r\times\mathbf{a}_\varphi=\mathbf{a}_z,\quad \mathbf{a}_r\times\mathbf{a}_\theta=\mathbf{a}_\varphi$$

在以上三个坐标系中，一个矢量的分量形式可写为

$$\mathbf{A}=A_x\mathbf{a}_x+A_y\mathbf{a}_y+A_z\mathbf{a}_z\quad(\text{笛卡儿坐标系})$$
$$\mathbf{A}=A_r\mathbf{a}_r+A_\varphi\mathbf{a}_\varphi+A_z\mathbf{a}_z\quad(\text{圆柱坐标系})$$
$$\mathbf{A}=A_r\mathbf{a}_r+A_\theta\mathbf{a}_\theta+A_\varphi\mathbf{a}_\varphi\quad(\text{球坐标系})$$

应当注意分量 $A_x, A_y, \cdots, A_\varphi$ 一般不是常数，而是坐标系中坐标的函数。



(a) 笛卡儿坐标系　(b) 圆柱坐标系　(c) 球坐标系

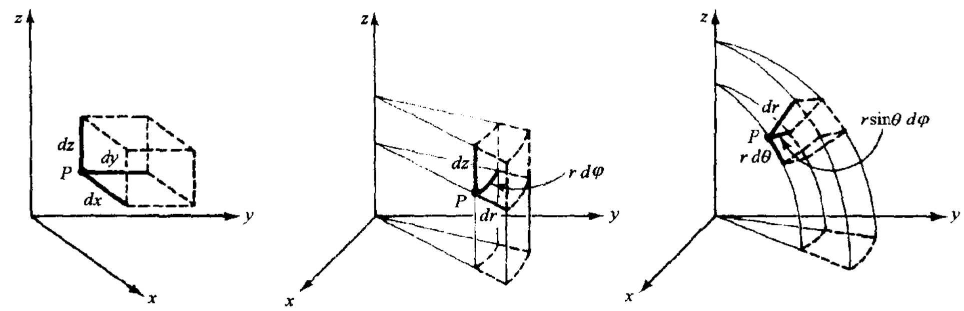
图 1-4

① const. 的含义是常数，它是英文单词 constant 的缩写。以后各章均如此。——译者注

### 1.5 微分体元、微分面元和微分线元

在电磁学中，大部分问题必须通过沿曲线、曲面或区域的积分才能求解，因此我们应对相应的微分元有充分的了解。

微分体元 $dv$ 可通过点 $P$ 处的坐标增量求出，当点 $P$ 的坐标增加为 $(x+dx, y+dy, z+dz)$，或 $(r+dr, \varphi+d\varphi, z+dz)$，或 $(r+dr, \theta+d\theta, \varphi+d\varphi)$ 时，微分体积 $dv$ 就形成了。在三个坐标系中，取微分体积是一阶无穷小量，微分体积 $dv$ 对应的区域是长方体。在三个坐标系中，$dv$ 的表达式由图 1-5 给出。




$dv=dx\,dy\,dz$　　$dv=rdr\,d\phi dz$　　$dv=r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$

(a) 笛卡儿坐标系　　(b) 圆柱坐标系　　(c) 球坐标系

图 1-5

从图 1-5 也可以看出包围微分体积的面元的面积。例如在球坐标系中，垂直于 $\mathbf{a}_r$ 的微分面元是

$$dS = (rd\theta)(r\sin\theta d\varphi) = r^2\sin\theta d\theta d\varphi$$

微分线元 $dl$ 是通过点 $P$ 处的增量长方体的对角线长度，所以

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \text{(笛卡儿坐标系)}^{①}$$

$$dl^2 = dr^2 + r^2d\varphi^2 + dz^2 \quad \text{(圆柱坐标系)}$$

$$dl^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2 \quad \text{(球坐标系)}$$

## 习 题 求 解

**1.1** 试说明图 1-6 中从点 $M(x_1, y_1, z_1)$ 到点 $N(x_2, y_2, z_2)$ 的矢量可表示成

$$(x_2 - x_1)\mathbf{a}_x + (y_2 - y_1)\mathbf{a}_y + (z_2 - z_1)\mathbf{a}_z$$

[redacted] 使用点 $M$ 和 $N$ 的坐标可以写出图 1-6 中的两个位置矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$：

$$\mathbf{A} = x_1\mathbf{a}_x + y_1\mathbf{a}_y + z_1\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{B} = x_2\mathbf{a}_x + y_2\mathbf{a}_y + z_2\mathbf{a}_z$$

于是
$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = (x_2 - x_1)\mathbf{a}_x + (y_2 - y_1)\mathbf{a}_y + (z_2 - z_1)\mathbf{a}_z$$

**1.2** 在笛卡儿坐标系中求从点 $(2, -4, 1)$ 到点 $(0, -2, 0)$ 的矢量 $\mathbf{A}$，并写出它的单位矢量。

[redacted]
$$\mathbf{A} = (0-2)\mathbf{a}_x + [-2-(-4)]\mathbf{a}_y + (0-1)\mathbf{a}_z = -2\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$$

$$|\mathbf{A}|^2 = (-2)^2 + (2)^2 + (-1)^2 = 9$$

$$\mathbf{a}_A = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = -\frac{2}{3}\mathbf{a}_x + \frac{2}{3}\mathbf{a}_y - \frac{1}{3}\mathbf{a}_z$$

---

① $dx^2$ 应理解为 $(dx)^2$，$dy^2$、$dz^2$、$dr^2$、$d\theta^2$ 和 $d\varphi^2$ 也是同样含义。—— 译者注

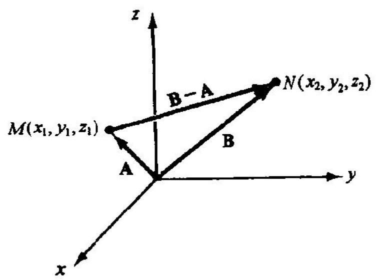



图 1-6

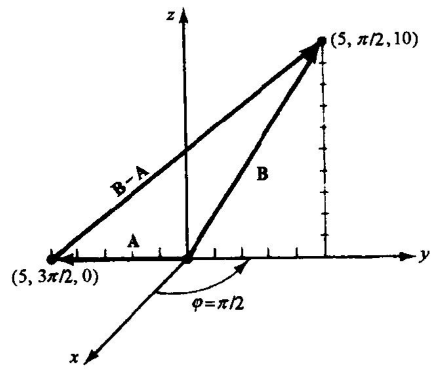



图 1-7

**1.3** 在圆柱坐标系中求点$(5,3\pi/2,0)$和点$(5,\pi/2,10)$之间的距 离。

**解** 首先写出笛卡儿坐标系中的位置矢量 **A** 和 **B**(见图 1-7)：

$$\mathbf{A} = -5\mathbf{a}_y, \qquad \mathbf{B} = 5\mathbf{a}_y + 10\mathbf{a}_z$$

这样，$\mathbf{B}-\mathbf{A} = 10\mathbf{a}_y + 10\mathbf{a}_z$，从而两点间的距离是

$$|\mathbf{B}-\mathbf{A}| = 10\sqrt{2}$$

在笛卡儿坐标系中，两点间的矢量可用习题 1.1 的方法得到，但在圆柱坐标系中却不能用相同的方法获得。

**1.4** 试说明 $\mathbf{A}=4\mathbf{a}_x-2\mathbf{a}_y-\mathbf{a}_z$ 和 $\mathbf{B}=\mathbf{a}_x+4\mathbf{a}_y-4\mathbf{a}_z$ 正交。

**解** 因为矢量的点积包含 $\cos\theta$，所以任意两个非零矢量的点积为零意味着 $\theta=90°$，而

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (4)(1) + (-2)(4) + (-1)(-4) = 0$$

**1.5** 已知 $\mathbf{A}=2\mathbf{a}_x+4\mathbf{a}_y$ 和 $\mathbf{B}=6\mathbf{a}_y-4\mathbf{a}_z$，试分别用(a)叉乘，(b)点乘求矢量间的小夹角。

**解** (a)

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -16\mathbf{a}_x + 8\mathbf{a}_y + 12\mathbf{a}_z$$

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{(2)^2+(4)^2+(0)^2} = 4.47, \qquad |\mathbf{B}| = \sqrt{(0)^2+(6)^2+(-4)^2} = 7.21$$

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = \sqrt{(-16)^2+(8)^2+(12)^2} = 21.54$$

由于$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta$，所以

$$\sin\theta = \frac{21.54}{(4.47)(7.21)} = 0.668 \quad 或 \quad \theta = 41.9°$$

(b)

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (2)(0) + (4)(6) + (0)(-4) = 24$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|} = \frac{24}{(4.47)(7.21)} = 0.745 \text{ 或 } \theta = 41.9°$$

**1.6** 已知 $\mathbf{F}=(y-1)\mathbf{a}_x+2x\mathbf{a}_y$，求点$(2,2,1)$处的矢量及该矢量在 **B** 上的投影，这里 $\mathbf{B}=5\mathbf{a}_x-\mathbf{a}_y+2\mathbf{a}_z$。

**解** $\mathbf{F}(2,2,1) = (2-1)\mathbf{a}_x + (2)(2)\mathbf{a}_y = \mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y$

如图 1-8 所示，**A** 在 **B** 上的投影可通过 **B** 的单位矢量与 **A** 的点乘得到：

$$\mathbf{A}\text{ 在 }\mathbf{B}\text{ 上的投影} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{a}_B = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}$$

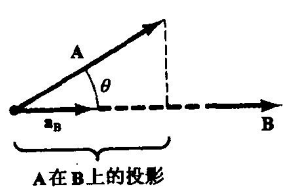



图 1-8

因此，在点$(2,2,1)$处，有

$$\mathbf{F}\text{ 在 }\mathbf{B}\text{ 上的投影} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{a}_B = \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = \frac{(1)(5)+(4)(-1)+(0)(2)}{\sqrt{30}} = \frac{1}{\sqrt{30}}$$

**1.7** 已知 $\mathbf{A}=\mathbf{a}_x+\mathbf{a}_y$，$\mathbf{B}=\mathbf{a}_x+2\mathbf{a}_z$，$\mathbf{C}=2\mathbf{a}_y+\mathbf{a}_z$，求$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$，并与$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$比较。

**解** 先计算

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=2\mathbf{a}_x-2\mathbf{a}_y-\mathbf{a}_z$$

进而

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z\\ 2 & -2 & -1\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=-2\mathbf{a}_y+4\mathbf{a}_z$$

类似地可以计算出 $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=2\mathbf{a}_x-2\mathbf{a}_y+3\mathbf{a}_z$。因此，在矢量三重积中必须先进行圆括弧中的叉积运算。

**1.8** 用习题 1.7 中的矢量 **A**、**B** 和 **C**，求 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$，并与 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$ 比较。

[redacted] 由习题 1.7 可知，$\mathbf{B}\times\mathbf{C}=-4\mathbf{a}_x-\mathbf{a}_y+2\mathbf{a}_z$，则

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}=(1)(-4)+(1)(-1)+(0)(2)=-5$$

同样由习题 1.7 知，$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=2\mathbf{a}_x-2\mathbf{a}_y-\mathbf{a}_z$，这样

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}=(2)(0)+(-2)(2)+(-1)(1)=-5$$

在标量三重积中圆括弧不是必需的，因为只有先计算叉积才有意义。通常，标量三重积可表示为

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}$$

只要矢量呈现有相同的循环次序，其结果都是一样的。在这个循环次序中，标量三重积没有符号变化。

**1.9** 求圆柱坐标系中从 $z$ 轴上的点 $z=h$ 指向点 $(r,\varphi,0)$ 的单位矢量，见图 1-9。

[redacted] 从图 1-9 可看出，矢量 **R** 是两个矢量的差：

$$\mathbf{R}=r\mathbf{a}_r-h\mathbf{a}_z,\quad \mathbf{a}_R=\frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}=\frac{r\mathbf{a}_r-h\mathbf{a}_z}{\sqrt{r^2+h^2}}$$

在以上表达式中角度 $\varphi$ 虽然没有明确显示出来，但是 **R** 和 $\mathbf{a}_R$ 都通过 $\mathbf{a}_r$ 随着 $\varphi$ 变化。

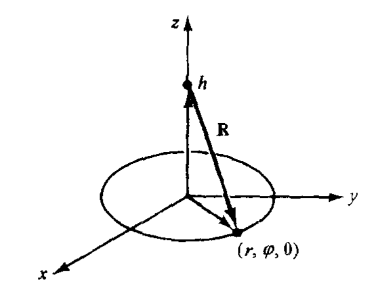



图 1-9

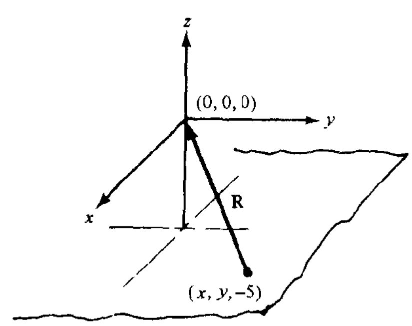



图 1-10

**1.10** 试写出在平面 $z=-5$ 上的任意点指向原点的单位矢量，见图 1-10。

[redacted] 由于该问题是在笛卡儿坐标系中提出的，所以利用习题 1.1 中的两点公式，可得

$$\mathbf{R}=-x\mathbf{a}_x-y\mathbf{a}_y+5\mathbf{a}_z,\quad \mathbf{a}_R=\frac{-x\mathbf{a}_x-y\mathbf{a}_y+5\mathbf{a}_z}{\sqrt{x^2+y^2+25}}$$

**1.11** 利用球坐标系，求半径为 $a$ 的球面上环带 $0\leqslant\theta\leqslant\beta$ 的表面积（见图 1-11），进一步再求出当 $\alpha=0$ 和 $\beta=\pi$ 时的表面积。

[redacted] 由图 1-5(c) 可写出球面的微分面元为

$$dS=r^2\sin\theta d\theta d\varphi$$

于是

$$A=\int_0^{2\pi}\int_\alpha^\beta a^2\sin\theta d\theta d\varphi=2\pi a^2(\cos\alpha-\cos\beta)$$

把 $\alpha=0$ 和 $\beta=\pi$ 代入上式，得 $A=4\pi a^2$，这是整个球的表面积。

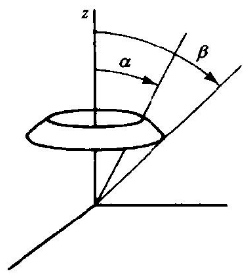



图 1-11

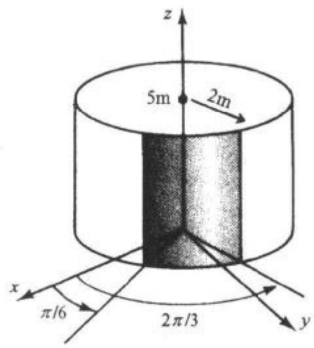



图 1-12

**1.12** 利用微分体元求半径为 $a$ 的球的体积。

**解** 由图 1-5(c)可知 $dv = r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi$，从而得

$$v = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi = \frac{4}{3}\pi a^3$$

**1.13** 利用圆柱坐标系，求直圆柱的侧面面积，其中 $r = 2\mathrm{m}$，$h = 5\mathrm{m}$，$30° \leqslant \varphi \leqslant 120°$，见图 1-12。

**解** 由于微分面元 $dS = r d\varphi dz$，所以

$$A = \int_0^5\int_{\pi/6}^{2\pi/3} 2d\varphi dz = 5\pi\ \mathrm{m}^2$$

**1.14** 把笛卡儿坐标系中的矢量

$$\mathbf{A} = y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{a}_z$$

变换成圆柱坐标系中的矢量。

**解** 参考图 1-2(b)可知

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,\quad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

因此
$$\mathbf{A} = r\sin\varphi\mathbf{a}_x + r\cos\varphi\mathbf{a}_y + r\cos^2\varphi\mathbf{a}_z$$

现在分别写出笛卡儿坐标系中的单位矢量在 $\mathbf{a}_r$，$\mathbf{a}_\varphi$ 和 $\mathbf{a}_z$ 上的投影：

$$\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_r = \cos\varphi,\ \mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\varphi = -\sin\varphi,\ \mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_z = 0$$

$$\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{a}_r = \sin\varphi,\ \mathbf{a}_y\cdot\mathbf{a}_\varphi = \cos\varphi,\quad \mathbf{a}_y\cdot\mathbf{a}_z = 0$$

$$\mathbf{a}_z\cdot\mathbf{a}_r = 0,\qquad \mathbf{a}_z\cdot\mathbf{a}_\varphi = 0,\quad \mathbf{a}_z\cdot\mathbf{a}_r = 1$$

所以

$$\mathbf{a}_x = \cos\varphi\mathbf{a}_r - \sin\varphi\mathbf{a}_\varphi,\quad \mathbf{a}_y = \sin\varphi\mathbf{a}_r + \cos\varphi\mathbf{a}_\varphi,\quad \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z$$

于是
$$\mathbf{A} = 2r\sin\varphi\cos\varphi\mathbf{a}_r + (r\cos^2\varphi - r\sin^2\varphi)\mathbf{a}_\varphi + r\cos^2\varphi\mathbf{a}_z$$

**1.15** 在圆柱坐标系中，一大小为 10 的矢量从点$(5, 5\pi/4, 0)$指向原点，见图 1-13。试写出该矢量在笛卡儿坐标系中的表达式。

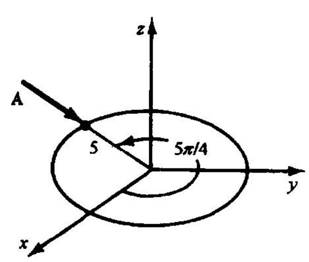



图 1-13

**解** 在圆柱坐标系中，该矢量可被表示成 $10\mathbf{a}_r$，而 $\varphi = \pi/4$，这样

$$A_x = 10\cos\frac{\pi}{4} = \frac{10}{\sqrt{2}},$$

$$A_y = 10\sin\frac{\pi}{4} = \frac{10}{\sqrt{2}},\quad A_z = 0$$

所以