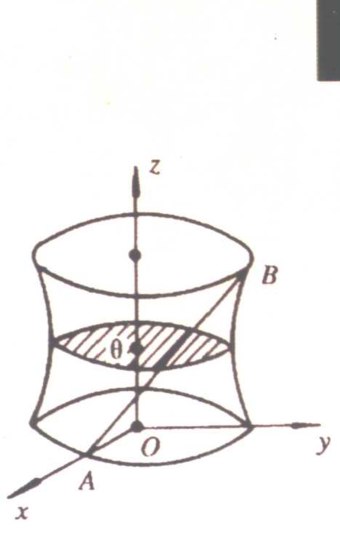
数学考研必备

shu xue kao yan bi bei

华东理工大学 林正国
上海交通大学 王纪林
主编



华东理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学考研必备/林正国,王纪林主编.—上海:华东理工大学出版社,2000.7

ISBN 7-5628-1060-5

Ⅰ.数… Ⅱ.①林…②王… Ⅲ.数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.01

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 29432 号

数学考研必备

华东理工大学 林正国 主编
上海交通大学 王纪林

华东理工大学出版社出版发行

上海市梅陇路 130 号

邮政编码 200237 电话 021—64250306

新华书店上海发行所发行经销

上海长阳印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 21 字数 638 千字

2000 年 7 月第 1 版 2000 年 7 月第 1 次印刷

印数 1-5000 册

ISBN 7-5628-1060-5/O·49 定价 36.00 元

内容提要

本书是为报考硕士研究生,准备数学考试的读者而写。内容精练、论述清晰,完全和硕士生入学考试的要求接轨。

内容包括高等数学、线性代数、概率统计,分9章叙述,并含例题、习题及答案,经实际讲授,效果很好。书末还附2000年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试题及解答,对考生必有启迪。

本书除可供考生作为备考书外,还可供高等院校有关教师和学生参考。

数学考研必备编委会

顾　问	上海师范大学	李新洲
	复 旦 大 学	郑祖康
主　编	华东理工大学	林正国
	上海交通大学	王纪林
编著者	华东理工大学	夏宁茂
	上海交通大学	王亚光
	华东理工大学	冯家裕
	东 华 大 学	李绍宽
	华东理工大学	周根成
	上 海 大 学	刘月英
	华东理工大学	李奕绯
	华东电脑学院	吴琏琨

前　言

在硕士研究生的入学考试中,数学科目的考试对大多数考生而言是相当艰难的一门科目,2000年上海地区数学“二考”的及格率仅有14.9%,可见其困难程度。

究其原因是学生在一年级(最迟二年级)学完了数学,要到四年级的寒假才去参加考试,中间隔了两年,时间较长。

目前流行的参考书、辅导书,一般而言,内容很深,篇幅宏大,学生复习难以下手。因此,本书的编写原则是简明扼要,压缩篇幅。

本书的特点是:应试性强,紧扣考试要求、深入浅出,内容简明、重点突出,思路清晰、逻辑严密,能对考生有所帮助和指导。

在本书编写过程中,得到了华东理工大学教务处领导陈国豪、焦家骏先生的鼓励和帮助,也得到了出版社王席溱先生的热情支持,在此向他们表示衷心的感谢。

限于编者水平,缺点和错误在所难免,欢迎读者批评指正。

林正国 1945年生，1967年毕业于中国科技大学数学系，1981年复旦大学数学研究生毕业，获硕士学位。

师承中科院院士谷超豪、李大潜教授，从事偏微分方程的理论和应用研究工作；现为华东理工大学数学教授。在《中国科学》、《数学年刊》等杂志发表论文30余篇，并著有《微分方程及其应用》、《高等数学自考必备》。

近年致力于考研的数学辅导工作，卓有成效。

目　　录

第1章　函数　极限　连续

1.1　内容提要

1.1.1　函数概念

(1) 函数是表示一种对应的关系。

(2) 研究函数时要注意以下4条性质:单调性、有界性、奇偶性、周期性。

(3) 在确定函数的定义域时要注意:在分式中分母不能为零;在根式中负数不能开偶次根;在对数中,真数要大于零;反正弦、反余弦函数的定义域为$[-1,1]$。

1.1.2　极限

(1) 数列极限的定义。对任一给定的正数ε,若存在正整数N,使当$n>N$时,恒有$|x_n-A|<\varepsilon$,则称数列$\{x_n\}$的极限为A,记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$。

(2) 极限存在的数列一定是有界数列,有界数列不一定有极限。

(3) 函数极限的定义。设函数$f(x)$在x_0的某一领域中有定义(在x_0可以没有定义),若对任一$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,使当$0<|x-x_0|<\delta$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称函数$f(x)$当$x\to x_0$时,以A为极限,记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。

(4) 单侧极限:如果当x从x_0的左侧($x<x_0$)趋于x_0时,$f(x)$

以 A 为极限,即对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,总存在一个正数 δ,使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时,$|f(x) - A| < \varepsilon$ 恒成立,则称 A 为 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的左极限。记作 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$。

如果当 x 从 x_0 的右侧($x > x_0$),趋于 x_0 时,$f(x)$ 以 A 为极限,即对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,总存在一个正数 $\delta > 0$,使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时,$|f(x) - A| < \varepsilon$ 恒成立,则称 A 为 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的右极限。记作 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$。

(5) 极限存在的充要条件:$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充要条件是

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = A。$$

1.1.3 无穷大量与无穷小量

(1) 无穷大量:如果对于任意给定的正数 M,变量 y 在其变化过程中,总有那么一个时刻,在那个时刻以后,不等式 $|y| > M$ 恒成立,则称变量 y 是无穷大量,或称变量 y 趋于无穷大,记作 $\lim y = \infty$。

(2) 无穷小量:以 0 为极限的变量称为无穷小量。常数 0 为无穷小量。

(3) 变量 y 以 A 为极限的充分必要条件是:变量 y 可以表示为 A 与一个无穷小量之和。

(4) 如果变量 α 是无穷小量,变量 y 是有界变量,则变量 αy 是无穷小量。

(5) 在变量 y 的变化过程中,如果 y 是无穷大量,则 $\frac{1}{y}$ 是无穷小量;如果 $y(\neq 0)$ 是无穷小量,则 $\frac{1}{y}$ 是无穷大量。

(6) 设 α,β 是同一变化过程中的两个无穷小量,如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} =$

0,则称 β 是比 α 较高阶无穷小量。

如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = C \neq 0$(常量),则称 β 与 α 是同阶无穷小量。特别当 $C = 1$ 时,称 β 与 α 是等价无穷小量,记作 $\alpha \sim \beta$。

如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$,则称 β 是比 α 较低阶无穷小量。

1.1.4 存在准则与重要极限

(1) 运算法则:在某一变化过程中,若 $\lim x = A, \lim y = B$,则有

① $\lim(x \pm y) = \lim x \pm \lim y = A \pm B$;

② $\lim(Cx) = C\lim x = CA$;

③ $\lim(xy) = \lim x \cdot \lim y = AB$;

④ $\lim \dfrac{x}{y} = \dfrac{\lim x}{\lim y} = \dfrac{A}{B} \quad (B \neq 0)$。

(2) 两个准则:

① 夹逼性准则。如果在某个变化过程中,3 个变量 x、y、z 总有关系 $y \leqslant x \leqslant z$,且 $\lim y = \lim z = A$,则 $\lim x = A$。

② 单调有界必有极限准则。

(3) 两个重要极限:

① $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$;

② $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$。

(4) 当 $x \to 0$ 时,以下变量为等价无穷小量

$x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \ln(1 + x) \sim \sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}$; $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$

1.1.5 函数的连续性

(1) 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个领域内有定义,如果当 x

$\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限存在，而且等于 $f(x)$ 在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$，即有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续。

(2) 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不满足连续条件，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，或者称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断。点 x_0 称为 $f(x)$ 的间断点。

若 $f(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，$f(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 均存在，但 $f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$，则 x_0 点称为 $f(x)$ 的第一类间断点；若 $f(x_0^-)=f(x_0^+)\neq f(x_0)$，则 x_0 点称为可去间断点。

不属于第一类的间断点称为第二类间断点，即 $f(x_0^-)$。$f(x_0^+)$ 中至少有一个不存在，则 x_0 称为第二类间断点。若 $f(x_0^+)$，$f(x_0^-)$ 中至少有一个等于 ∞，则称 x_0 为无穷间断点。

(3) 如果函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则

① 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界，即 $|f(x)|\leqslant l, x\in[a,b]$；

② 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上至少取得最大值和最小值各一次。

③ 以 M,m 分别表示 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值，则对于满足条件 $m\leqslant\mu\leqslant M$ 的任何实数 μ，在 $[a,b]$ 中至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=\mu$。

特别若 $f(a)\cdot f(b)<0$，则在 (a,b) 中至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$。

1.2 例　题

[例 1]　设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}\ (x>0)$，求 $f(x)$。

解　令 $\dfrac{1}{x}=t$，则 $x=\dfrac{1}{t}$（知 $t>0$）。

由此得 $f(t)=\frac{1}{t}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}=\frac{1}{t}+\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}$

故得 $$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

[例 2] 设 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=\cos x+1$，求 $f\left(\cos\frac{x}{2}\right)$。

解 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=\cos x+1=1-2\sin^2\frac{x}{2}+1=2-2\sin^2\frac{x}{2}$

即有 $$f(x)=2-2x^2$$

故 $$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=2-2\cos^2\frac{x}{2}=1-\cos x$$

[例 3] $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{1}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}}$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0}e^{-\frac{x^2}{2}/\sin^2 x}=e^{-\frac{1}{2}}$$

[例 4] $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+\tan x}-\sqrt{2+\sin x}}{x^3}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3[\sqrt{2+\tan x}+\sqrt{2+\sin x}]}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{[\sqrt{2+\tan x}+\sqrt{2+\sin x}]}$$

$$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

[例 5] $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}\cdot\frac{\sin x-x}{x}\cdot\frac{1}{1-\cos x}}$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\frac{\sin x - x}{3}}{\frac{x}{2}}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\cos x - 1}{\frac{3}{2}x^2}} = e^{-\frac{1}{3}}$$

[**例 6**] 问 A,B 为何值时 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{A(1-\cos x)}{x^2} & x < 0 \\ 4 & x = 0 \\ \dfrac{B\sin x + \int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t}{x}, & x < 0 \end{cases}$

在 $x = 0$ 处连续。

解 $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{A(1-\cos x)}{x^2} = A \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \dfrac{A}{2}$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{B\sin x + \int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{B\cos x + \cos x^2}{1} = 1 + B,$$

要使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续,必须使

$$f(0^-) = f(0^+) = f(0),$$

即$\begin{cases} \dfrac{A}{2} = 4 \\ 1 + B = 4 \end{cases}$,故有$\begin{cases} A = 8 \\ B = 3 \end{cases}$

[**例 7**] 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\left(1 + \dfrac{a^x + b^x - 2}{2}\right)^{\frac{2}{a^x + b^x - 2} \cdot \frac{a^x + b^x - 2}{2} \cdot \frac{1}{x}}$

而 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\ln a \cdot x} - 1}{\ln a \cdot x} \cdot \dfrac{\ln a \cdot x}{x} = \ln a$,

同理 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{b^x - 1}{x} = \ln b$,

故 原式 $= e^{\frac{1}{2}(\ln a + \ln b)} = \sqrt{ab}$。

[**例8**] 设 $a > 0, x_1 > 0, x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$ $(n = 1,2,\cdots)$。

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在;(2) 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$。

解 (1) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \geqslant \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a} > 0$,即 $x_n \geqslant \sqrt{a}$,$(n \geqslant 2)$ 即 $\{x_n\}$ 有下界。

而 $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - x_n = \frac{a - x_n^2}{2x_n} \leqslant 0$,即 $\{x_n\}$ 单调下降,因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在。

(2) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \beta$,由 $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ 两边取极限,得

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\beta + \frac{a}{\beta}\right)$$

故 $\beta = \pm\sqrt{a}$(负号舍去) $\beta = \sqrt{a}$。

[例 9] 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1^n + 2^n + \cdots + 10^n}$。

解 $10 = \sqrt[n]{10^n} < \sqrt[n]{1^n + 2^n + \cdots + 10^n} < \sqrt[n]{10 \times 10^n}$

$= 10\sqrt[n]{10}$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{10} = 1$,所以由夹逼性定理知

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1^n + 2^n + \cdots + 10^n} = 10。$$

[例 10] 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} (\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x})$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to+\infty} = -2\sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2} \cdot \sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$

其中 $\left|\sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right| \leqslant 1$,而

$$\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2} = \frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$$

故有 $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} = 0$,

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty} (\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x}) = 0$。

[例 11] $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n})$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\frac{2}{n}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1=\frac{2}{3}\text{。}$$

[例 12] 设 $f(x)=\dfrac{(x-3)(x+1)}{\sqrt{4+3x-x^2}-x+1}$,求:$f(x)$ 的定义域,间断点,连续区间。

解 $4+3x-x^2\geqslant 0$,即 $x^2-3x-4\leqslant 0$。

$$(x+1)(x-4)\leqslant 0,\ -1\leqslant x\leqslant 4$$

使分母 $\sqrt{4+3x-x^2}-x+1=0$,即

$$4+3x-x^2=(x-1)^2$$

$$2x^2-5x-3=0,(2x+1)(x-3)=0$$

$$x_1=-\frac{1}{2},x_2=3\text{。}$$

$f(x)$ 的定义域$\left[-1,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{2},3\right)\cup(3,4]$。

间断点 $-\dfrac{1}{2},3$ 连续区间与定义域相同。

[例 13] 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+i}}$。

解 由 $n+1>\sqrt{n^2+i}>n\quad(1\leqslant i\leqslant n)$

得 $$\sin\frac{\pi}{n+1}<\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+i}}<\sin\frac{\pi}{n},$$

$$n\sin\frac{\pi}{n+1}<\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+i}}<n\sin\frac{\pi}{n},$$

而 $$\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{n+1}=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{\pi}{n+1}=\pi,$$

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n} = \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{\pi}{n} = \pi,$$

得 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+i}} = \pi。$$

[例 14] 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = \int_{-\infty}^{a} te^{2t}\mathrm{d}t$,求 a 的值。

解 左边 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}\cdot\frac{2a}{x-a}\cdot x} = e^{2a}$。

右边 $=\int_{-\infty}^{a} te^{2t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{a} t\mathrm{d}e^{2t} = \frac{1}{2}e^{2t}\cdot t\Big|_{-\infty}^{a} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{a} e^{2t}\mathrm{d}t$

$= \frac{1}{2}e^{2a}a - \frac{1}{4}e^{2a}$。

从而 $e^{2a} = \frac{1}{2}e^{2a}\cdot a - \frac{1}{4}e^{2a}$,解得 $a = \frac{5}{2}$。

[例 15] 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{1+2x^2+x^3} - ax - b\right] = 0$,求 a,b。

解 原式 $= \lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}} - a - \frac{b}{x}\right] = 0$。

而 $\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}} - 1 \sim \frac{2}{3x}$,故 $a = 1, b = \frac{2}{3}$。

[例 16] 证明曲线 $y = x^4 - 3x^2 + 7x - 8$ 在 $(1,2)$ 之间至少与 x 轴有一个交点。

证明 设 $f(x) = x^4 - 3x^2 + 7x - 8$,

由 $f(1) = 1^4 - 3\cdot 1^2 + 7\cdot 1 - 8 = -3 < 0$

$f(2) = 2^4 - 3\cdot 2^2 + 7\cdot 2 - 8 = 10 > 0$

因 $f(1)\cdot f(2) < 0$,又由于 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续,由零点定理得,至少存在一点 $\xi\in(1,2)$ 使得 $f(\xi) = 0$,即 $\xi^4 - 3\xi^2 + 7\xi - 8 = 0$。因此,曲线 $y = x^4 - 3x^2 + 7x - 8$ 在 $(1,2)$ 之间至少与 x 轴有一个交点。

1.3 习　题

1. 设 a 为非零常数,则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}=$ ______。

2. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=$ ______。

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}=$ ______。

4. $\lim\limits_{x\to +0}x\ln x=$ ______。

5. $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$ ______。

6. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$ ______。

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$ ______。

8. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^{x}=8$,则 $a=$ ______。

9. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=$ ______。

10. 已知当 $x\to 0$ 时,$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小,则常数 $a=$ ______。

11. 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,则 $a=$ ______。

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$ ______。

13. 已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{1/x^2}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$ ______。

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$ ______。