中国农业系统工程丛书

农业系统线性规划

山东科学技术出版社

中国农业系统工程丛书

农业系统线性规划

*

山东科学技术出版社出版

(济南市玉函路)

山东省新华书店发行

山东新华印刷厂德州厂印刷

*

850×1168毫米32开本　12.375印张　2插页　266千字

1988年1月第1版　　1988年1月第1次印刷

印数：1—5,000

ISBN 7—5331—0218—5/S·33

定价 4.00 元

目　　录

第一章　线性规划概述

线性规划是辅助人们进行科学管理的一种数学方法，是运筹学的重要组成部分，在工农业生产、经济管理、交通运输等方面都有极为广泛的应用。

线性规划主要研究有限资源的最佳配置，即最大限度地发挥有限资源的作用，提高经济效益，做到耗费较少的人力、物力和财力，创造出较高的经济价值，产生较大的社会效益，从而为领导部门的决策科学化提供依据。

第一节　线性规划引例

本节，列举一些例子来阐明线性规划所研究的问题和它的数学模型。

一、运输问题

生产实践中会遇到各种物资调运问题。如果处理得当，就可以节省原材料、运费和时间，否则，就会造成不必要的浪费。

【例1】两个化肥厂A_1和A_2，分别生产同类化肥2 300吨与2 700吨，供应B_1、B_2、B_3三个地区。三地区的化肥需要量以及化肥厂到三个地区的距离见表1－1。

表1—1　　产、销量与距离表

化肥厂 \ 距离（公里） \ 销地	B_1	B_2	B_3	产化肥量（吨）
A_1	50	60	70	2 300
A_2	60	110	160	2 700
销化肥量（吨）	1 700	1 800	1 500	5 000

问两个厂生产的化肥应如何调运，才能使总运输量最少？

解：如果根据就近运输原则编制的调运方案（表1—2中方案一）与另一调运方案（表1—2中方案二）进行比较：

表1—2　　调运方案表　　单位：吨、公里

化肥厂 \ 销地	B_1			B_2			B_3		
	距离	方案一	方案二	距离	方案一	方案二	距离	方案一	方案二
A_1	50	1 700		60	600	800	70		1 500
A_2	60		1 700	110	1 200	1 000	160	1 500	
销化肥量	1 700			1 800			1 500		

可得方案一的总运输量（吨公里）为：

$$S_1 = 50\times1\ 700 + 60\times600 + 110\times1\ 200 + 160\times1\ 500$$
$$= 493\ 000 \text{（吨公里）}$$

方案二的总运输量（吨公里）为：

$$S_2 = 60\times1\ 700 + 60\times800 + 110\times1\ 000 + 70\times1\ 500$$
$$= 36\ 500 \text{（吨公里）}$$

结果表明，采用不同的调运方案，其总运输量也不相同，且按就近运输编制的方案并不是最佳方案。为了确定最佳调运方案，把调运的化肥量设成变量，用x_{ij}表示由A_i（$i=1,2$）化肥厂运往B_j（$j=1，2，3$）销地的化肥量。调运方案见表1—3。

表1—3　　调 运 方 案 表　　单位：吨、公里

化肥厂＼货运量＼销地	B_1		B_2		B_3		产化肥量
	货运量	距离	货运量	距离	货运量	距离	
A_1	x_{11}	50	x_{12}	60	x_{13}	70	2 300
A_2	x_{21}	60	x_{22}	110	x_{23}	160	2 700
销化肥量	1 700		1 800		1 500		5 000

根据产销平衡要求，从A_1厂运往三个地区的化肥总量应该等于A_1厂的总产量2 300吨，于是有：

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=2\ 300$$

同理，从A_2厂运往三个地区的化肥总量应该等于A_2厂的总产量2 700吨，于是又得到：

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=2\ 700$$

另一方面，两个化肥厂供给B_1地区的化肥量之和应该等于B_1地区的需要量1 700吨，于是有：

$$x_{11}+x_{21}=1\ 700$$

同理可得销售点B_2和B_3的供需关系式：

$$x_{12}+x_{22}=1\ 800$$

$$x_{13}+x_{23}=1\ 500$$

根据表 1 — 3 的方案调运化肥，可得总运输量f为

$$f = 50x_{11} + 60x_{12} + 70x_{13} + 60x_{21} + 110x_{22} + 160x_{23}$$

由于调运量x_{ij}是变量，故可以确定很多调运方案，现在要从很多个调运方案中找一个运输量最少的方案。把这个实际问题抽象成数学模型就是：

确定一组决策变量x_{ij}（$i=1, 2; j=1, 2, 3$）满足约束条件：

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=2\ 300 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=2\ 700 \\ x_{11}+x_{21}=1\ 700 \\ x_{12}+x_{22}=1\ 800 \\ x_{13}+x_{23}=1\ 500 \\ x_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1, 2; j=1, 2, 3) \end{cases}$$

其中$x_{ij}\geqslant 0$表示运输量为非负的限制。并使目标函数（总运输量）

$$f = 50x_{11} + 60x_{12} + 70x_{13} + 60x_{21} + 110x_{22} + 160x_{23}$$

取最小值。

二、生产的组织和计划问题

一个工厂或一个农场，有各种不同类型的作业项目，生产效率也各不相同。为了使这个工厂或农场发挥最佳的整体功能，必须编制一个合理的生产计划，协调好各部门之间的关系。

【例 2】某农场有男劳力22人，女劳力10人，要求在一日内完成割麦任务30亩，且使除草的亩数最多。已知一个男劳力每天能割麦1.5亩，除草 2 亩；一个女劳力一天能割麦1.2亩，除草1.4亩。问如何安排现有劳力，既能完成割麦任务，又能

使除草的亩数最多？

解：设劳力分配数为x_j（$j=1, 2, 3, 4$），则这个实际问题的文字叙述可以表示成表1—4。

表1—4　　劳力安排方案表

劳力＼任务	割麦		除草		劳力限制量
	劳力数	工效(亩/天)	劳力数	工效(亩/天)	
男劳力（人）	x_1	1.5	x_2	2	22
女劳力（人）	x_3	1.2	x_4	1.4	10
任务量（亩）	30		越多越好		

根据劳力数的供需平衡关系，安排割麦的男劳力x_1与安排除草的男劳力x_2之和应该等于可以提供的男劳力数22人。于是有约束关系式：

$$x_1 + x_2 = 22$$

对于女劳力，同样可得约束关系式：

$$x_3 + x_4 = 10$$

另一方面，x_1个男劳力一天完成的割麦任务$1.5x_1$，加上x_3个女劳力一天完成的割麦任务$1.2x_3$，应该等于一天完成的割麦数30亩，于是有：

$$1.5x_1 + 1.2x_3 = 30$$

现在要求在一天内完成30亩割麦任务的同时，除草的亩数最多。设一天除草的亩数为f，则目标函数可表示为

$$f = 2x_2 + 1.4x_4$$

上述实际问题抽象成数学模型，就是确定一组决策变量x_j

($j=1$，2，3，4)，满足约束条件：

$$\begin{cases} x_1+x_2=22 & \text{（男劳力约束）} \\ x_3+x_4=10 & \text{（女劳力约束）} \\ 1.5x_1+1.2x_3=30 & \text{（割麦任务约束）} \\ x_j\geqslant 0,\ (j=1,\ 2,\ 3,\ 4) & \text{（劳力数非负限制）} \end{cases}$$

并使目标函数（除草亩数）

$$f=2x_2+1.4x_4$$

取最大值。

【例3】某食品厂，用蒸馏器甲和乙生产四种饮料。

生产第一种饮料每单位每周需要原料100吨，使用甲蒸馏器每周生产总工时的7％，用乙蒸馏器每周生产总工时的3％，获净产值60元。

生产第二种饮料每单位每周需要原料100吨，使用甲蒸馏器每周生产总工时的5％，用乙蒸馏器每周生产总工时的5％，获净产值60元。

生产第三种饮料每周每单位需要原料100吨，使用甲蒸馏器每周生产总工时的3％，使用乙蒸馏器每周生产总工时的10％，获净产值90元。

生产第四种饮料每周每单位需要原料100吨，使用甲蒸馏器每周生产总工时的2％，使用乙蒸馏器每周生产总工时的15％，获净产值90元。

已知食品厂每周只能提供生产饮料用的原料1 500吨。甲蒸馏器每周生产总工时为A；乙蒸馏器每周生产总工时为B，问应该怎样安排生产，使食品厂获得最大净产值？

解：为了对该实际问题建立数学模型，先对它进行一些分析。

先将上述文字说明列成矩形表1—5：

表1—5　　　　建模基本数据表

条件 \ 品种	饮料1 (x_1)	饮料2 (x_2)	饮料3 (x_3)	饮料4 (x_4)	限制量 (b_i)
原料（吨）	100	100	100	100	1 500
甲生产工时	7%A	5%A	3%A	2%A	A
乙生产工时	3%B	5%B	10%B	15%B	B
净产值（元）	60	60	90	90	

如果该厂只生产第一种饮料，则每周的产量必须小于15单位。因为生产15单位时，使用甲蒸馏器的生产总工时为：

$$15\times 7\%A=105\%A$$

表明用甲蒸馏器要超过工时5%A，此生产方案不可行。

如果只生产第二种饮料每周15单位，则所需原料$15\times100=1\ 500$吨，全部用去该厂提供的原料。使用甲蒸馏器每周生产总工时的

$$15\times 5\%A=75\%A$$

使用乙蒸馏器每周生产总工时的

$$15\times 5\%B=75\%B$$

获得净产值为$15\times60=900$元，表明第二种生产方案是可行的。此外还可以提出许多不同的生产方案，究竟哪一个方案将获得最大的净产值，把上述寻找最佳生产方案的问题抽象成线性规划问题，按照单纯形解法，就可以找出既可获取最大净产值，又符合该厂能提供的生产条件的生产方案。

1．选择决策变量：为了寻找获得最大净产值的各种产品的最优组合，要把各种饮料的产量作为决策变量。设x_j($j=1$,

2，3，4）为第j种饮料每周生产的数量。

2．建立约束条件：原料约束。生产四种饮料所用的原料之和不能超过该厂提供的最大数量1 500吨，可得约束条件：

$$100x_1+100x_2+100x_3+100x_4\leqslant 1\ 500$$

甲蒸馏器生产工时约束。生产四种饮料所需甲蒸馏器的工时数之和不能超过总工时数A，可得约束条件：

$$7\%Ax_1+5\%Ax_2+3\%Ax_3+2\%Ax_4\leqslant A$$

或写成

$$7x_1+5x_2+3x_3+2x_4\leqslant 100$$

乙蒸馏器生产工时约束。生产四种饮料所需乙蒸馏器的工时数之和不能超过总工时数B，可得约束条件：

$$3x_1+5x_2+10x_3+15x_4\leqslant 100$$

3．建立目标函数：已知每种饮料的净产值，根据上表1—5可列出目标函数（净产值）为：

$$f=60x_1+60x_2+90x_3+90x_4$$

综合上述分析，可列出线性规划模型：

求变量x_j（$j=1$，2，3，4）满足约束条件：

$$\begin{cases}100x_1+100x_2+100x_3+100x_4\leqslant 1\ 500\\ 7x_1+5x_2+3x_3+2x_4\leqslant 100\\ 3x_1+5x_2+10x_3+15x_4\leqslant 100\\ x_j\geqslant 0,\quad (j=1,\ 2,\ 3,\ 4)\end{cases}$$

使目标函数（净产值）

$$f=60x_1+60x_2+90x_3+90x_4$$

取最大值。

三、营养问题

在现代农业的研究中，要求从营养学的观点来考虑生物体

的食物结构。例如饲养场加工畜禽日粮配方时，要求从可能提供的若干种饲料中，在保证畜禽健康状况良好而需要的最低营养物质条件下，选用最佳的配料方案，使配合饲料的成本最低。

【例4】一饲料工厂用苜蓿草、鱼粉、豆饼粉配制1吨配合饲料，要求至少含有35%蛋白质、1.5%脂肪质，纤维质不得超过8%。求成本最低的饲料最佳配制方案。技术和经济系数见表1—6。

表1—6　　营养成分表　（按重量计的百分比）

营养成分	单位	限制条件	原料含有营养成分（%）		
			苜蓿草	鱼粉	豆饼粉
纤维质	%	不超过8%	25	1	7
蛋白质	%	至少需有35%	17	60	42
脂肪	%	至少需有1.5%	2	7	0.5
成本	元/吨		230	1 600	330

解：设配制1吨配合饲料需苜蓿草x_1吨、鱼粉x_2吨、豆饼粉x_3吨。

因为1吨配合饲料的纤维质含量不能超过8%，可以列出配合饲料的纤维质约束条件：

$$25x_1+x_2+7x_3\leqslant 8 \qquad \text{（纤维质约束）}$$

同理，可分别列出配合饲料的蛋白质与脂肪含量约束条件：

$$17x_1+60x_2+42x_3\geqslant 35 \qquad \text{（蛋白质约束）}$$

$$2x_1+7x_2+0.5x_3\geqslant 1.5 \qquad \text{（脂肪约束）}$$

现在用苜蓿草x_1、鱼粉x_2、豆饼粉x_3配成1吨配合饲料，可得

重量约束条件：

$$x_1+x_2+x_3=1 \qquad \text{(重量约束)}$$

已知苜蓿草、鱼粉与豆饼粉的单价，由上表1—6可得配制1吨配合饲料的成本为：

$$f=230x_1+1\ 600x_2+330x_3$$

把这个营养物问题抽象成数学模型，就是确定一组决策变量x_1、x_2、x_3，满足约束条件：

$$\begin{cases}25x_1+x_2+7x_3\leqslant 8\\17x_1+60x_2+42x_3\geqslant 35\\2x_1+7x_2+0.5x_3\geqslant 1.5\\x_1+x_2+x_3=1\\x_j\geqslant 0 \quad (j=1,\ 2,\ 3)\end{cases}$$

并使目标函数（配合饲料成本）

$$f=230x_1+1\ 600x_2+330x_3$$

取最小值。

【例5】一专业户计划种植某种作物，根据当地的气候与土壤条件，在一个生产周期内，至少需要16公斤氮肥；磷肥以12公斤为适宜；钾肥不得超过21公斤。现在有甲乙丙丁四种肥料，它们每公斤的价格及含氮磷钾的数量见表1—7。

表1—7　　　　肥料营养成分、价格表

所含成分数量 肥料 / 成分	甲	乙	丙	丁	限制量
氮（公斤）	0.06	0.60	0	0.30	16
磷（公斤）	0.10	0	0.40	0.20	12
钾（公斤）	0.28	0	0	0.14	21
单价（元）	0.08	0.30	0.20	0.26	

应该如何配合使用这四种肥料，既能满足作物对氮磷钾的需要，又使施肥成本最低？

解：设甲、乙、丙、丁四种肥料的施用量分别为x_1、x_2、x_3、x_4公斤。

根据四种肥料的不同含氮量，以及作物对氮肥的要求不能少于16公斤，可得作物对氮肥的约束条件：

$$0.06x_1+0.6x_2+0.3x_4\geqslant 16 \qquad \text{（氮肥约束）}$$

同理，可得到作物对磷肥的约束条件：

$$0.1x_1+0.4x_3+0.2x_4=12 \qquad \text{（磷肥约束）}$$

作物对钾肥的约束条件：

$$0.28x_1+0.14x_4\leqslant 21 \qquad \text{（钾肥约束）}$$

已知四种肥料的单价分别为0.08元、0.3元、0.2元、0.26元，故作物施肥量的总成本为：

$$f=0.08x_1+0.3x_2+0.2x_3+0.26x_4$$

把这个施肥实际问题抽象成数学模型，可以描述为：

确定一组决策变量x_1、x_2，x_3，x_4，满足约束条件：

$$\begin{cases} 0.06x_1+0.6x_2+0.3x_4\geqslant 16 \\ 0.1x_1+0.4x_3+0.2x_4=12 \\ 0.28x_1+0.14x_4\leqslant 21 \\ x_j\geqslant 0 \quad (j=1,\ 2,\ 3,\ 4) \end{cases}$$

并使目标函数（施肥总成本）

$$f=0.08x_1+0.3x_2+0.2x_3+0.26x_4$$

取最小值。

四、农业结构问题

对农业系统的研究，常常要考虑到农业区划、农业结构以及各种作物的合理布局等问题。由于各种生物体对不同的自然

环境条件，或对生物体采取不同的技术和管理措施，都可以使整个农业系统取得不同的经济、社会与生态效益。因此，需要研究有关农业结构的优化问题。

【例6】某农场有耕地1 400亩，粪肥11 406车，化肥2 250公斤，劳力15 000个工日。现计划种植玉米、小麦、大豆、谷子、高粱等五种作物。已知各种作物的单产和每亩作物对资源的消耗量如表1—8所示。

表1—8　　作物消耗资源表

作物 每亩资源消耗 资源	玉米	小麦	大豆	谷子	高粱	资源限制量
土地（亩）	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1 400
粪肥（车）	8	10	7	9	8	11 406
化肥（公斤）	6	4	4.5	7	5.5	2 250
劳力（工日）	16	4	4	20	16	15 000
每亩产量（公斤）	250	200	125	100	125	

应该如何安排作物的种植计划，才能取得最高总产量？

解：设五种作物的种植面积分别为x_j（$j=1,\cdots\cdots,5$）亩，为了充分利用土地资源，五种作物的种植面积之和应该等于农场的总耕地面积1 400亩，可以列出耕地面积约束条件：

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1\ 400 \qquad \text{（土地约束）}$$

根据每亩作物对粪肥的需要量，可求出五种作物对粪肥的总需要量，但又不能超过本单位能提供粪肥的最大限制量11 406车，所以得到作物对粪肥需要的约束条件：

$$8x_1+10x_2+7x_3+9x_4+8x_5\leqslant 11\ 406 \text{（粪肥约束）}$$

同理，可以得到作物对化肥需要的约束条件：

$$6x_1+4x_2+4.5x_3+7x_4+5.5x_5\leqslant 2\ 250\text{（化肥约束）}$$

作物对劳力需要的约束条件：

$$16x_1+4x_2+4x_3+20x_4+16x_5\leqslant 15\ 000\text{（劳力约束）}$$

已知每种作物的单产，故五种作物的总产量为：

$$f=250x_1+200x_2+125x_3+100x_4+125x_5$$

这个实际问题抽象成数学模型即为确定一组决策变量 x_j（$j=1,2,\cdots\cdots,5$），满足约束条件：

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1\ 400\\ 8x_1+10x_2+7x_3+9x_4+8x_5\leqslant 11\ 406\\ 6x_1+4x_2+4.5x_3+7x_4+5.5x_5\leqslant 2\ 250\\ 16x_1+4x_2+4x_3+20x_4+16x_5\leqslant 15\ 000\\ x_j\geqslant 0\quad (j=1,2,\cdots\cdots,5)\end{cases}$$

并使目标函数（总产量）

$$f=250x_1+200x_2+125x_3+100x_4+125x_5$$

取最大值。

【例7】一农牧兼营户，有资金8 000元、土地30亩和可养三窝猪的猪舍，劳动力充裕。从事两种不同种植制度的种植业生产，并饲养菜牛和猪两种牲畜。生产的谷物除部分做饲料外，还可供出售；生产的牧草全部用作饲料，不足部分从市场上购进。每单位实际作业所需要投入的资源及单位实际作业净收益见表1－9。

表中资金、谷物、饲草各以100元、50公斤、500公斤为一单位。中间产品（如种植业的谷物、饲草）的生产价值不列为收益，待出售时再计为收入。同样，饲养牲畜所耗用的中间产品亦不计为费用，因此在表中均计为负值。试设计一个优化方