高等代数

下册

丘维声
编　著

高等教育出版社

高 等 学 校 试 用 教 材

高 等 代 数

下 册

丘维声 编著

高 等 教 育 出 版 社

本书分上、下两册，内容包括四部分：线性方程组，n 元有序数组的向量空间和矩阵理论；一元多项式环和多元多项式环的理论；任意域上的线性空间和线性映射的理论；具有度量的线性空间包括欧几里得空间、酉空间、正交空间和辛空间的理论。

本书注意渗透现代的观点，力图体现代数与几何、分析的联系，注重联系实际，努力培养学生的数学素质。本书写得深入浅出，特别注意阐述清楚所讨论问题的想法。每一节后面都配有一定数量的习题。

本书可作为大学数学系、概率统计系和应用数学系的高等代数课程的教材，它也是一部内容丰富的教学参考书，可供有关师生参考。

下 册 前 言

本书上册讲了线性代数研究的具体对象：线性方程组和矩阵.上册内容包括：线性方程组的解法、行列式、n 元有序数组的向量空间、线性方程组的理论、矩阵的运算、矩阵的相抵分类与相似分类、二次型与矩阵的合同分类.下册则讲多项式理论和线性代数研究的抽象对象：线性空间与线性映射.下册内容包括：一元多项式环与多元多项式环、线性空间、线性映射和线性变换、线性变换的Jordan 标准形、线性函数和双线性函数、欧几里得空间、酉空间、正交空间、辛空间.下册还结合高等代数研究的对象，水到渠成地引进了抽象代数的一些基本概念：群、环、域、域上的代数等.

面向 21 世纪，既要培养一批高水平的数学人才，又要培养一大批具有良好数学素质并在各个领域从事工作的人才.因此本书的内容分成三个层次，以适应培养各种类型人才的需要：

第一个层次是正文中用宋体字排印的不加“*”号的内容以及习题中不加“*”号的题.这些内容是作为教学的基本要求.

第二个层次是用楷体字排印的内容，它们不作为教学的基本要求.如果教学时数较充裕，可以讲；否则可以不讲.这些内容包括第七章 §9，§12；第八章 §7 的后半部分，§8；第十三章 §3，§4；第十四章 §1，§4 等.

第三个层次是正文中加“*”号的内容和阅读材料，它们不作为教学要求，是供学有余力的学生自学的，以便培养他们的阅读理解能力和开阔眼界.这些内容都是紧密配合正文的，为想看课外参考书的学生提供了方便.正文中加“*”号的内容包括第七章 §13，第十一章 §5，第十三章 §5，第十四章 §2，§3 等.

习题中加“*”号的题以及补充题不作为教学基本要求，供学

生选做.

在使用本书时,各个学校的教师还可根据具体情况作一些变通.例如,本书讲的是任意域上的线性空间和线性映射,但是也可以只讲数域上的线性空间和线性映射,这时第七章 §14 可以不讲.又如,本书讲线性变换的 Jordan 标准形时,采用空间分解的方法,但是也可以采用 λ- 矩阵的理论,这时第十章 §4 不用讲,而讲阅读材料三、五、七.

本书作为大学数学系、概率统计系和应用数学系的高等代数课程的教材,大体上,上册供第一学期使用,下册供第二学期使用.如果第一学期教学时数较充裕,则下册第七章的前几节也可以放在第一学期讲.

本书的责任编辑胡乃冏同志为本书的编辑出版付出了辛勤劳动,作者向他表示衷心感谢.

热诚欢迎同行和读者对书中的疏漏之处提出批评指正.

丘维声

1996 年 8 月于北京大学燕北园

目　录

第七章　一元多项式环与多元多项式环

代数方程曾经是代数学研究的中心问题，它包括线性方程组与高次方程. 研究高次方程也就是研究多项式. 在前几章我们详细阐述了线性方程组的理论. 这一章我们将介绍多项式的基本理论. 多项式不仅是代数学的一个传统分支，而且在以研究代数结构为中心的近世代数学里占有重要位置. 在数学的其他分支以及工程技术中也常常用到多项式. 譬如，在数学分析中用多项式函数逼近一般的函数；在组合数学中，用多项式作为计数的生成函数；在代数几何中，多项式方程组的解集是基本研究对象；在计算机科学中，有多项式算法这一概念；等等.

§1　一元多项式的概念及性质 · 环的基本概念

1.1　一元多项式的概念及其运算

读者在中学数学里已经学过多项式，那个时候是把多项式定义成几个单项式的代数和，而单项式被定义成用乘法（包括乘方）符号把数字或表示数字的字母连结而成的式子. 读者在数学分析课程中已学过多项式函数，它是由幂函数（幂指数为正整数）和常数函数经过有限次加、减、乘法运算所得的函数，即形如

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

的函数，其中 $a_i (i = 0, 1, \cdots, n)$ 是实常数，x 是变量. 因此，迄今为止，读者对多项式的认识是形如(1) 那样的表达式，其中 $a_i (i = 0, 1, \cdots, n)$ 是实（或复）常数，x 是变量，x 可取任意实数（或复数）.

现在我们要把多项式的概念加以推广，使其有更广泛的应用. 除了用任意数域 K 代替实数域(或复数域)以外，最主要的推广是：x 不仅能取数域 K 中任意数，而且还能用其他一些满足一定要求的元素代入(详见本节后半部分的“一元多项式环的通用性质”).

定义 1 设 K 是一个数域. 用一个不属于 K 的符号 x 作表达式

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \tag{2}$$

其中 n 是任意非负整数，系数 $a_i(i = 0,1,\cdots,n)$ 属于 K；两个这样的表达式相等规定为它们除去系数为零的项外含有完全相同的项，而系数为零的项是允许任意删去和添进来的；这种表达式称为**系数在数域 K 中的一元多项式**，或者称为**数域 K 上的一元多项式**，符号 x 称为**不定元**.

系数全为零的多项式称为**零多项式**，记为 0.

在多项式(2)中，a_ix^i 称为 i **次项**，a_i 称为 i **次项的系数**，$i = 0, 1,\cdots,n$. 零次项 a_0x^0 简记作 a_0，也称为**常数项**.

从定义 1 知道，数域 K 上的两个一元多项式相等当且仅当它们的同次项的系数都相等. 换句话说，一个一元多项式的表达法是唯一的(除了系数为 0 的项以外).

今后，我们用 $f(x),g(x),\cdots$ 或 $f,g,\cdots$ 等来代表一元多项式.

设 $f(x)$ 代表多项式(2). 如果 $a_n \neq 0$. 那么 a_nx^n 称为多项式 $f(x)$ 的**首项**，a_n 称为**首项系数**，n 称为多项式 $f(x)$ 的**次数**，记作 $\deg f$.

零多项式的次数定义为 $-\infty$，并且规定：

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

对一切非负整数 n，$(-\infty) + n = -\infty$，$-\infty < n$.

零次多项式是 a_0x^0，其中 $a_0 \neq 0$. 我们可以把 a_0x^0 与数域 K 中的元素 a_0 等同起来. 因此数域 K 中任一非零元素 a 可看成是零次

多项式.

数域 K 上的所有一元多项式组成的集合记作 $K[x]$. 现在我们在集合 $K[x]$ 中定义加法和乘法两种运算，其背景来自读者在中学数学里所熟悉的多项式的加法和乘法. 即按通常字母运算的规则把两个多项式 $f(x), g(x)$ 相加或相乘，x 被认为是与数域 K 中元素可交换的，并且把 x 方次相同的项全合并起来，那么我们就得到一个多项式. 精确写出加法和乘法的定义如下：

定义 2 设 $f(x), g(x) \in K[x]$，其中

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0 = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$$

不妨设 $n \geqslant m$. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的**和**是一个多项式

$$h(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$$

其中 $h(x)$ 的 i 次项的系数为

$$c_i = a_i + b_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n \tag{3}$$

记作 $h(x) = f(x) + g(x)$.

$f(x)$ 与 $g(x)$ 的**乘积**是一个多项式

$$p(x) = \sum_{s=0}^{n+m} d_s x^s$$

其中 $p(x)$ 的 s 次项的系数为

$$d_s = \sum_{i+j=s} a_i b_j, \quad s = 0, 1, \cdots, n+m \tag{4}$$

记作 $p(x) = f(x)g(x)$.

不难验证上面所定义的多项式的加法与乘法满足下列运算法则：$\forall f(x), g(x), h(x) \in K[x]$，有

1° 加法交换律，即 $f + g = g + f$；

2° 加法结合律，即 $(f + g) + h = f + (g + h)$；

3° 零多项式具有性质：$0 + f = f + 0 = f$；

4° 设 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$，定义 $-f(x)=\sum_{i=0}^{n}(-a_i)x^i$，则

$$f+(-f)=(-f)+f=0$$

称 $-f$ 是 f 的负元素；

5° 乘法交换律，即 $fg=gf$；

6° 乘法结合律，即 $(fg)h=f(gh)$；

7° 零次多项式 1 具有性质：$1f=f1=f$；

8° 乘法对于加法的分配律：

$$f(g+h)=fg+fh$$

$$(g+h)f=gf+hf$$

加法的四条运算法则是显然的，因为多项式的加法归结为同次项的系数相加.

从公式(4)易看出，多项式的乘法适合交换律，因为数域 K 中乘法有交换律.

关于乘法的法则 7°也是显然的.

现在来验证乘法的结合律：设

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i,\quad g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j,\quad h(x)=\sum_{k=0}^{l}c_kx^k \tag{5}$$

因为 fg 的 s 次项的系数为 $\sum_{i+j=s}a_ib_j$，所以 $(fg)h$ 的 t 次项的系数为

$$\sum_{s+k=t}\left(\sum_{i+j=s}a_ib_j\right)c_k=\sum_{i+j+k=t}a_ib_jc_k \tag{6}$$

因为 gh 的 r 次项系数为 $\sum_{j+k=r}b_jc_k$，所以 $f(gh)$ 的 t 次项系数为

$$\sum_{i+r=t}a_i\left(\sum_{j+k=r}b_jc_k\right)=\sum_{i+j+k=t}a_ib_jc_k \tag{7}$$

从(6)和(7)式得出，$(fg)h=f(gh)$.

下面来验证第一个分配律：设 f,g,h 同(5). $f(g+h)$ 的 s 次项的系数为

$$\sum_{i+j=s}a_i(b_j+c_j)=\sum_{i+j=s}a_ib_j+\sum_{i+j=s}a_ic_j \tag{8}$$

(8)式右端正好是 $fg+fh$ 的 s 次项的系数，所以

$$f(g+h)=fg+fh$$

类似地可验证第二个分配律.

多项式的减法定义成：

$$f(x)-g(x):=f(x)+(-g(x))$$

命题 7.1.1 设 $f(x),g(x)\in K[x]$，则

$$\deg(f\pm g)\leqslant \max\{\deg f,\deg g\} \tag{9}$$

证明 设 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i, g(x)=\sum\limits_{i=0}^{m}b_ix^i$. 若 $f=g=0$，则 (9) 式显然成立. 下面设 $f\neq 0$，并且 $a_n\neq 0$，设 $n\geqslant m$. 因为

$$f(x)\pm g(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i\pm b_i)x^i$$

所以 $$\deg(f\pm g)\leqslant n=\max\{\deg f,\deg g\}$$ ▌

命题 7.1.2 设 $f(x),g(x)\in K[x]$. 如果 $f\neq 0,g\neq 0$，则 $fg\neq 0$；并且有

$$\deg(fg)=\deg f+\deg g \tag{10}$$

证明 设

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i,\quad g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j$$

如果 $f\neq 0,g\neq 0$，设 $a_n\neq 0,b_m\neq 0$，则 $a_nb_m\neq 0$. 于是 $a_nb_mx^{n+m}$ 是 $f(x)g(x)$ 的首项，因此 $fg\neq 0$，并且 $n+m$ 是 fg 的次数，即

$$\deg(fg)=\deg f+\deg g$$

显然，当 f 与 g 有一个为 0 或者两个均为 0 时，(10) 式仍然成立. ▌

从命题 7.1.2 的证明中还可看出，多项式乘积的首项系数等于因子首项系数的乘积.

从命题 7.1.2 还可得出多项式乘法适合

9° 乘法消去律，即如果 $fg=fh$，且 $f\neq 0$，则 $g=h$.

证明 从 $fg=fh$ 得

$$f(g-h)=0$$

由于 $f \neq 0$,所以

$$g - h = 0, \quad 即\ g = h \qquad \blacksquare$$

1.2　环的基本概念

从上一小节知道,数域 K 上所有一元多项式组成的集合 $K[x]$ 有两种运算:加法与乘法,并且满足一些运算法则.整数集 Z 也有加法与乘法两种运算,并且满足与上述同样的运算法则.数域 K 上所有 n 级矩阵组成的集合 $M_n(K)$ 也有加法与乘法两种运算,并且满足加法交换律,加法结合律,乘法结合律,乘法对于加法的两个分配律.从这些不同的对象中抽象出其关于运算的共同性质,便得到"环"的概念:

定义 3　设 S 是一个非空集合,从 $S \times S$ 到 S 的一个映射称为定义在 S 上的一个**代数运算**.

定义 4　设 R 是一个非空集合,在它上面定义了两个代数运算,一个叫做**加法**,记作 $a+b$;另一个叫做**乘法**,记作 ab,它们适合

1. 关于加法的以下规则:

1° 加法结合律,即 $(a+b)+c = a+(b+c)$;

2° 加法交换律,即 $a+b = b+a$;

3° 在 R 中有元素 0,使得,$a+0=a, \forall\, a \in R$;

4° 对于 R 中每个元素 a,在 R 中有一个元素 b,使得 $a+b=0$.

2. 关于乘法的以下规则:

5° 乘法结合律,即 $(ab)c = a(bc)$.

3. 关于加法和乘法的分配律:

6° 左分配律,即 $a(b+c) = ab+ac$;

右分配律,即 $(b+c)a = ba+ca$.

这样的非空集合 R 称为一个**环**.

容易证明,具有 3° 中性质的元素 0 是唯一的,称它是 R 的零元素.对于 $a \in R$,具有 4° 中性质的元素 b 是唯一的,称它是 a 的负元素,记作 $-a$.

例1 整数集 Z 对于数的加法与乘法形成一个环，称之为整数环.

例2 数域 K 上所有一元多项式组成的集合 $K[x]$ 对于节1.1中定义的加法与乘法形成一个环，称为数域 K 上的一元多项式环.

例3 数域 K 上所有 n 级矩阵组成的集合 $M_n(K)$ 对于矩阵的加法与乘法形成一个环，称为数域 K 上的 n 级矩阵环.

例4 任意一个数域 K 对于数的加法与乘法形成一个环.

* **例5** 设 R 是一个环，x 是一个不属于 R 的符号，所有形式为

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$a_i \in R, \quad i = 0, 1, \cdots, n, \quad n \geqslant 0$$

的表达式组成的集合记作 $R[x]$. $R[x]$ 中两个元素相等规定为它们除去系数为零的项外含有完全相同的项. $R[x]$ 中的元素称为**系数在环 R 中的一元多项式**，符号 x 称为不定元. 在 $R[x]$ 中按照 $K[x]$ 中的那样定义加法与乘法，同样可验证加法满足4条规则，乘法满足结合律，乘法对于加法的两个分配律也满足，因此 $R[x]$ 形成一个环，称它为**系数在环 R 中的一元多项式环**.

* **例6** $Z[x]$ 是系数在整数环 Z 中的一元多项式环.

环 R 中的减法定义成：

$$a - b := a + (-b)$$

如果环 R 中的乘法还适合交换律，则称 R 是交换环.

如果环 R 中有一个元素 e 具有性质：对于一切 $a \in R$，$ea = ae = a$，则称 e 是 R 的**单位元素**，此时称 R 是有单位元素的环，环 R 的单位元素通常就记作1.

环 R 中的元素 a 称为一个**左零因子**，如果 R 中存在 $b \neq 0$，使得 $ab = 0$. 类似地，a 称为一个**右零因子**，如果 R 中存在 $c \neq 0$，使得 $ca = 0$. 左零因子和右零因子都简称为零因子. 据阅读材料一的性质1，0既是左零因子，又是右零因子，称它是平凡零因子.

如果环 R 没有非平凡的零因子，则 R 称为**无零因子环**.

定义 5　如果环 R 是有单位元素 $1(\neq 0)$、无零因子的交换环，则 R 称为**整环**.

$Z, K[x], K$ 都是整环. $M_n(K)$ 不是整环，因为它不是交换环，并且有非平凡的零因子.

定义 6　如果环 R 中一个非空子集 R_1 对于 R 的运算也组成一个环，则 R_1 称为 R 的一个**子环**.

命题 7.1.3　环 R 的一个非空子集 R_1 为一个子环的充分必要条件是 R_1 对于 R 的减法与乘法都封闭，即 $\forall a, b \in R_1$，有

$$a - b \in R_1, \qquad ab \in R_1$$

证明　*必要性：设 R_1 是环 R 的一个子环. 由定义，R_1 是一个环，因此 $\forall a, b \in R_1$，有 $a - b \in R_1, ab \in R_1$.*

充分性. 要证 R_1 对于 R 的运算形成一个环. 任给 $a, b \in R_1$，由已知条件得 $a - a \in R_1$，即得 $0 \in R_1$. 从而 $0 - b \in R_1$，即 $-b \in R_1$. 于是 $a - (-b) \in R_1$，即 $a + b \in R_1$. 这证明了 R 的加法也是 R_1 的加法(即 R_1 对于 R 的加法封闭). 加法交换律 、加法结合律既然在 R 中成立，自然在 R_1 中也成立. 上面已证 R 的零元素 $0 \in R_1$，从而 R_1 也有了零元素 0. 上面已证对于 $b \in R_1$，有 $-b \in R_1$，从而 R_1 中每个元素都有负元素. 从已知条件知，R_1 对于 R 的乘法封闭，因此 R 的乘法也是 R_1 的乘法. R_1 中自然也成立乘法的结合律，乘法对于加法的两个分配律. 综上述，R_1 成为一个环. 所以 R_1 是 R 的一个子环.　▌

例 7　在整数环 Z 中，全体偶数组成的集合记作 $2Z$. 由于两个偶数的差、积都是偶数，所以 $2Z$ 是 Z 的一个子环. 易看出，$2Z$ 没有单位元素. 显然，全体奇数组成的集合就不是 Z 的子环.

例 8　在数域 K 上的一元多项式环 $K[x]$ 中，所有零次多项式添上零多项式组成的集合 S 是 $K[x]$ 的一个子环，这是因为两个零次多项式的差或者是零次多项式，或者是零多项式；两个零次多项式的积是零次多项式. 显然 $ax^0 \longmapsto a$ 是 S 到 K 的双射，并且这个映射保持加法与乘法. 这从下式可以看出：

$$ax^0 + bx^0 = (a + b)x^0, \quad (ax^0)(bx^0) = (ab)x^0$$

因此我们可以把 S 与 K 等同起来，从而可以把 K 看成 $K[x]$ 的一个子环.

如果 R_1 是环 R 的一个子环，则称 R 是环 R_1 的一个扩环. 从例 8 知道，$K[x]$ 可以看成是 K 的一个扩环.

例 9　设 $A \in M_n(K)$，令

$$K[A]:=\{a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I \mid a_i \in K, \quad i = 0,1,\cdots,m, m \geqslant 0\}$$

$K[A]$ 中的元素称为**矩阵 A 的多项式**. 通常用 $f(A), g(A), \cdots$ 来代表矩阵 A 的多项式. 从矩阵的加法、数乘、乘法知道，矩阵 A 的多项式仍然是一个矩阵，因此 $K[A]$ 是 $M_n(K)$ 的一个非空子集. 设

$$f(A) = \sum_{i=0}^{m} a_i A^i, \quad g(A) = \sum_{i=0}^{l} b_i A^i$$

不妨设 $m \geqslant l$. 从矩阵的运算法则可得出

$$f(A) \pm g(A) = \sum_{i=0}^{m} (a_i \pm b_i) A^i \tag{11}$$

$$f(A)g(A) = \sum_{s=0}^{m+l} \Big(\sum_{i+j=s} a_i b_j\Big) A^s \tag{12}$$

因此 $K[A]$ 对于矩阵的加法、减法、乘法都封闭. 从而 $K[A]$ 是 $M_n(K)$ 的一个子环. 从公式(12) 得出

$$f(A)g(A) = g(A)f(A)$$

因此 $K[A]$ 是交换环. 称 $K[A]$ 是**矩阵 A 的多项式环**.

例 10　设 $A \in M_n(K)$，在环 $K[A]$ 中考虑子集

$$W = \{aI \mid a \in K\}$$

即 W 是所有 n 级数量矩阵组成的集合. 显然 W 对于矩阵的减法与乘法都封闭，因此 W 是 $K[A]$ 的一个子环. 显然 $aI \mapsto a$ 是 W 到 K 的一个双射，并且从

$$aI + bI = (a + b)I, \quad (aI)(bI) = (ab)I$$

知道，上述映射保持加法与乘法. 因此可以把 W 与 K 等同起来，从