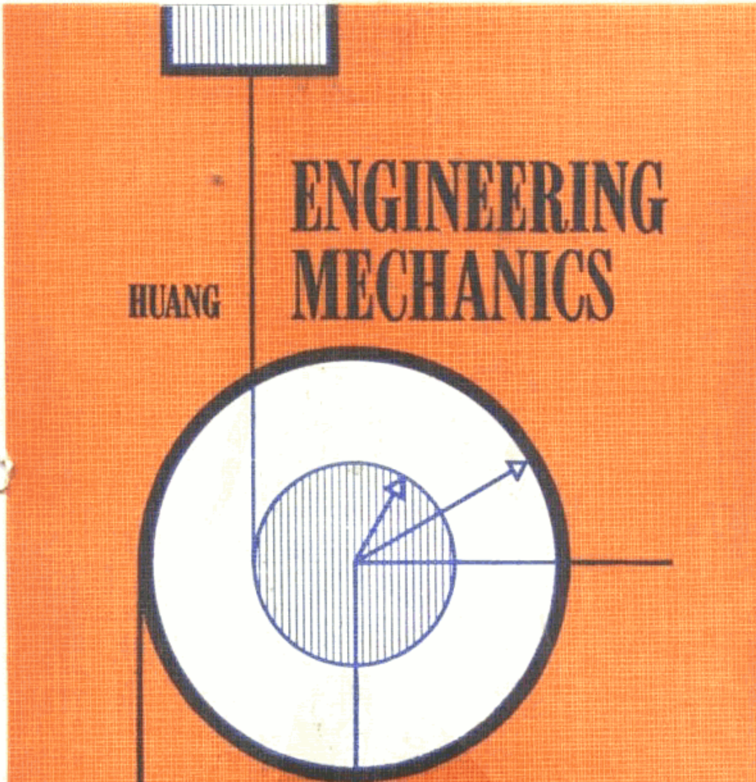
工程動力學詳解

ENGINEERING MECHANICS

HUANG



曉園出版社

HUANG 工程動力學詳解

園

一九八〇年六月發行

工程動力學詳解

定價：

原著者：T. C. Huang

譯著者：陳嘉煒

發行人：黃旭政

發行所：曉園出版社

香港代理：藝文圖書公司

香港銅鑼灣摩頓臺灣景樓23樓A5

電話：5-767758

前　　言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與舖路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精微的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

工程動力學詳解

（目錄）

第六章　質點運動學……………………………1

第七章　剛體運動學…………………………68

第八章　質點動力學…………………………139

第九章　質點系統動力學……………………332

第十章　剛體動力學…………………………365

第六章　質點運動學

重點摘要

章　節	重要方程式	問　題
質點的運動：位移、速度、加速度	$\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}$，　$\mathbf{a}=\dot{\mathbf{v}}=\ddot{\mathbf{r}}$ $\mathbf{F}=m\ddot{\mathbf{r}}$	1-15
線的運動：角位移、角速度、角加速度	$\omega=\dot{\theta}$ $\alpha=\ddot{\theta}$	16-21
質點於各不同坐標系統的運動學	直角坐標： $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ $\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}=\dot{x}\mathbf{i}+\dot{y}\mathbf{j}+\dot{z}\mathbf{k}$ $\mathbf{a}=\dot{\mathbf{v}}=\ddot{\mathbf{r}}=\ddot{x}\mathbf{i}+\ddot{y}\mathbf{j}+\ddot{z}\mathbf{k}$	22-60
	切線與法線坐標： $\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}=\dot{s}\mathbf{e}_t=v\mathbf{e}_t$ $\mathbf{a}=\dot{\mathbf{v}}=\ddot{\mathbf{r}}=\ddot{s}\mathbf{e}_t+\frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_n$	61-88
	圓柱與極坐標： $\mathbf{r}_1=r\mathbf{e}_r$ $\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}_1=\dot{r}\mathbf{e}_r+r\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi$ $\mathbf{a}=\dot{\mathbf{v}}=\ddot{\mathbf{r}}_1=(\ddot{r}-r\dot{\phi}^2)\mathbf{e}_r$ $+(r\ddot{\phi}+2\dot{r}\dot{\phi})\mathbf{e}_\phi$	89-107
	球坐標： $\mathbf{r}=r\mathbf{e}_r$	

	$\dot{\mathbf{r}}=\dot{r}\mathbf{e}_r+r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta+r\dot{\phi}\sin\theta\,\mathbf{e}_\phi$ $\ddot{\mathbf{r}}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\mathbf{e}_r+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}-r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\mathbf{e}_\theta+(2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta+2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta+r\ddot{\phi}\sin\theta)\mathbf{e}_\phi$	108-109
二質點的相對運動	$\mathbf{r}_B=\mathbf{r}_A+\rho_{AB}$, $\dot{\mathbf{r}}_B=\dot{\mathbf{r}}_A+(\dot{\rho}_r)_{AB}$ $\ddot{\mathbf{r}}_B=\ddot{\mathbf{r}}_A+(\ddot{\rho}_r)_{AB}$	110-117
質點對移動坐標系統的運動	$\mathbf{r}=\mathbf{r}_o+\rho$ $\dot{\mathbf{r}}=\dot{\mathbf{r}}_o+\dot{\rho}_r+\omega\times\rho$ $\ddot{\mathbf{r}}=\ddot{\mathbf{r}}_o+\ddot{\rho}_r+\dot{\omega}\times\rho+\omega\times(\omega\times\rho)+2\omega\times\dot{\rho}_r$	118-135

問題詳解

6-1 A城距B城爲 127miles，火車預定的行程爲1hr 。前2 min的加速及後6 min的減速分別爲60與50 mph，而其餘的時間皆以最高速率行駛，試求此一最高速率。

【解】距離 = 127 − 60 (2/60) − 50 (6/60)

= 127 − 2 − 5 = 120miles

∴ 平均最高速率 = 距離 / 時間

= 120 (60) / (60 − 2 − 6)

= 138.5mph

6-2 N城距C城 900 miles，預定飛行時間爲 2hr； 而C城距S城 200 miles，預定飛行時間爲 4hr 。假設每次起降所花的時間都相同，試求飛機的平均航速。

【解】假設每次起降所花的時間爲 t

$V=900/(2-t)=2000/(4-t)$

$9(4-t)=20(2-t)$

$\therefore \quad t = 4/11$

$$V_{平均} = 900/(2-4/11) = 550 \text{ mph}$$

6-3　一輛汽車的時速為60mph，刹車後，4 sec 後即停止，試求其平均減速度。

【解】$1 \text{ mile} = 5280 \text{ ft}$

$$1 \text{ mph} = 5280/(60\times 60)$$

$$= (22/15) \text{ ft/sec}$$

$$平均減速度 = (22/15)/(4/60)$$

$$= 22 \text{ ft/sec}^2$$

6-4　某一列火車的速率為120mph，進站前 5 min，開始刹車，試求其平均減速度。

【解】$1 \text{ mph} = (22/15) \text{ ft/sec}$

$$平均減速度 = [120(22/15)]/5\times 60$$

$$= 44/75 \text{ ft/sec}^2$$

6-5　某一質點的運動路徑為

$$x = 5t^2+2t+3$$

$$y = t+4$$

$$z = 2e^t$$

x，y，z的單位為 ft，而 t 為 sec。試求此質點在 t = 2 sec 時的位單，速度及加速度。

【解】$x=5t^2+2t+3$，　$y=t+4$，　$z=2e^t$

$$\dot{x}=10t+2 \qquad \dot{y}=1 \qquad \dot{z}=2e^t$$

$$\ddot{x}=10 \qquad \ddot{y}=0 \qquad \ddot{z}=2e^t$$

$$\mathbf{r}=(5t^2+2t+3)\mathbf{i}+(t+4)\mathbf{j}+2e^t\mathbf{k} \text{ ft}$$

$$V=(10t+2)\mathbf{i}+\mathbf{j}+2e^t\mathbf{k} \text{ ft/sec}$$

$$\mathbf{a}=10\mathbf{i}+2e^t\mathbf{k} \text{ ft/sec}^2$$

在 $t = 2$ sec 時

$\mathbf{r} = 27\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} + 2\,e^{2}\,\mathbf{k}$ ft

$\mathbf{V} = 22\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\,e^{2}\,\mathbf{k}$ ft/sec

$\mathbf{a} = 10\,\mathbf{i} + 2\,e^{2}\,\mathbf{k}$ ft/sec²

6-6 某一質點的運動路徑爲

$x = 10e^{-2t}\cos(\pi t/2)$

$y = 10e^{-2t}\sin(\pi t/2)$

$z = 2t$

x，y，z 的單位爲 ft，而 t 爲 sec。試求此質點在 t = 9 sec 時的位置，速度及加速度。

【解】$x = 10e^{-2t}\cos(1/2\,\pi t)$，

$y = 10e^{-2t}\sin(1/2\,\pi t)$

$z = 2t$

所以

$\dot{x} = -10\,e^{-2t}\,[\,2\cos(1/2\,\pi t) + 1/2\,\pi\sin(1/2\,\pi t)\,]$

$\dot{y} = 10e^{-2t}\,[\,-2\sin(1/2\,\pi t) + 1/2\,\pi\cos(1/2\,\pi t)\,]$

$\dot{z} = 2$

而

$\ddot{x} = -10e^{-2t}\,[\,-2\pi\sin(1/2\,\pi t) + (\pi^2/4 - 4)\cos\frac{1}{2}\pi t\,]$

$\ddot{y} = -10e^{-2t}\,[\,(-4 + \pi^2/4)\sin(1/2\,\pi t) + 2\pi\cos(1/2\,\pi t)\,]$

$\ddot{z} = 0$

因此

$\mathbf{r} = (10e^{-2t}\cos 1/2\,\pi t)\,\mathbf{i} + 10e^{-2t}\sin 1/2\,\pi t\,\mathbf{j}$

$+2t\,\mathbf{k}$ ft

$\mathbf{v}=-10e^{-2t}[2\cos\pi/2t+\pi/2\sin\pi t/2]\mathbf{i}$

$+10e^{-2t}[-2\sin\pi/2t+\pi/2\cos\pi t/2]\mathbf{j}$

$+2\mathbf{k}$ ft/sec

$\mathbf{a}=-10e^{-2t}[-2\pi\sin\pi/2t+(-4+\pi^2/4)$

$\cos\pi/2t]\mathbf{i}-10e^{-2t}[(-4+\pi^2/4)\sin$

$\pi/2t+2\pi\cos\pi/2t]\mathbf{j}$ ft/sec²

在　$t=9$ sec 時

$\mathbf{r}=10e^{-18}\mathbf{j}+18\mathbf{k}$ ft

$\mathbf{v}=-5\pi e^{-18}\mathbf{i}-20e^{-18}\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ ft/sec

$\mathbf{a}=20\pi e^{-18}\mathbf{i}-10e^{-18}[-4+\pi^2/4]\mathbf{j}$ ft/sec²

6-7 某一質點的運動路徑爲

$x=A\sin\pi t$

$y=Bt^3-2t$

$z=Ct^2-4t$

x，y，z 的單位爲 ft，而 t 爲 sec。A，B，及 C 爲未知的常數，如 $t=2$ sec 時，此一質點的速度爲

$\mathbf{V}=3\pi\mathbf{i}+22\mathbf{j}$

試求此質點在 $t=4$ sec 時的位置，速度及加速度。

【解】$x=A\sin\pi t$，　$y=Bt^3-2t$，　$z=Ct^2-4t$

$\dot{x}=A\pi\cos\pi t$，　$\dot{y}=3Bt^2-2$，$\dot{z}=2Ct-4$

$\ddot{x}=-A\pi^2\cos\pi t$，　$\ddot{y}=6Bt$，　$\ddot{z}=2C$

在　$t=2$ sec　時

$\dot{x}=3\pi=A\pi$，　$A=3$

$\dot{y}=22=12B-2$，$B=2$

$\dot{z}=0=4C-4$，　$C=1$

所以，於任何時間時

$\mathbf{r}=3\sin\pi t\,\mathbf{i}+(2t^3-2t)\mathbf{j}+(t^2-4t)\mathbf{k}$ ft

$\mathbf{V}=(3\pi\cos\pi t)\mathbf{i}+(6t^2-2)\mathbf{j}+(2t-4)\mathbf{k}$

$\mathrm{ft/sec}$

$\mathbf{a}=(-3\pi^2\sin\pi t)\mathbf{i}+12t\mathbf{j}+2\mathbf{k}\quad \mathrm{ft/sec^2}$

在　$t=4$ sec 時

$\mathbf{r}=120\mathbf{j}$ ft ,

$\mathbf{v}=3\pi\mathbf{i}+94\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ ft/sec

$\mathbf{a}=48\mathbf{j}+2\mathbf{k}$　ft/sec²

6-8　某一質點在原點處由靜止起動，在空間的運動路徑爲

$y=Ax$,　$z=Bx^2$

而且　$\ddot{x}=C$, A, B , C爲常數。試求此質點的位置，速度及加速度。

【解】$\ddot{x}=C$,　$\dot{x}=Ct+C_1$,　$x=\frac{1}{2}Ct^2+C_1t+C_2$

在　$t=0$ 時　$\dot{x}=x=0$

所以　$C_1=C_2=0$

$y=Ax$,　$\dot{y}=A\dot{x}$,　$\ddot{y}=A\ddot{x}$

$z=Bx^2$,　$\dot{z}=2Bx\dot{x}$,　$\ddot{z}=2B\dot{x}\dot{x}+2Bx\ddot{x}$

因此　$\mathbf{r}=1/2Ct^2\mathbf{i}+1/2ACt^2\mathbf{j}+(BC^2t^4/4)\mathbf{k}$

$\mathbf{v}=Ct\mathbf{i}+ACt\mathbf{j}+BC^2t^3\mathbf{k}$

$\mathbf{a}=C\mathbf{i}+AC\mathbf{j}+3BC^2t^2\mathbf{k}$

6-9　某一質點在空間的運動路徑爲 $z=Ax^2+By^3$ ，而且

$\dot{x}=2At$,　$\dot{y}=2Bt$

A，B爲常數。在 $t=0$ 時，此一質點通過原點。試將質點的位置、速度及加速度表示成時間的函數。

【解】$\dot{x}=2At$,　$x=At^2$,　$\ddot{x}=2A$

$\dot{y}=2Bt$,　$y=Bt^2$,　$\ddot{y}=2B$

$z=Ax^2+By^3=A^3t^4+B^4t^6$

$\dot{z}=4A^3t^3+6B^4t^5$

$\ddot{z}=12A^3t^2+30B^4t^4$

因此 $\mathbf{r}=At^2\mathbf{i}+Bt^2\mathbf{j}+(A^3t^4+B^4t^6)\mathbf{k}$

$\mathbf{v}=2At\mathbf{i}+2Bt\mathbf{j}+(4A^3t^3+6B^4t^5)\mathbf{k}$

$\mathbf{a}=2A\mathbf{i}+2B\mathbf{j}+(12A^3t^2+30B^4t^4)\mathbf{k}$

6-10 某一質點在空間運動的路徑爲

$$x^3+2y^2-3z=at$$

而在 $t=0$ 時，

$\mathbf{r}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+6\mathbf{k}$

$\mathbf{v}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k}$

a 及 b 爲常數，試求 a 及 b 。

【解】因爲 $x^3+2y^2-3z=at$ ……………………(1)

將(1)式對 t 微分後可得

$3x^2\dot{x}+4y\dot{y}-3\dot{z}=a$ ……………… (2)

由已知條件，即 $t=0$ 時

$x=1$，$y=2$，$z=b$；$\dot{x}=2$，$\dot{y}=1$，$\dot{z}=3$

將其代入(1)式及(2)式後可得

$1+2(4)-3b=0$， $b=3$

$3(2)+4(2)(1)-3(3)=a$， $a=5$

6-11 某一質點在空間運動，其路徑爲

$$x+y^2-2z^3=bt^2$$

而在 $t=0$ 時，

$\mathbf{r}=c\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k}$

$\mathbf{v}=d\mathbf{i}+5\mathbf{j}+\mathbf{k}$

$\mathbf{a}=10\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$

b，c 及 d 爲常數，試求其值。

【解】$x+y^2-2z^3=bt^2$ ……………………………(1)

將(1)式對時間 t 微分後可得

$\dot{x}+2y\dot{y}-6z^2\dot{z}=2bt$ ………………… (2)

將(2)式對時間 t 微分後可得

$$\ddot{x}+2\dot{y}\dot{y}+2y\ddot{y}-12z\dot{z}^2-6z^2\ddot{z}=2b \cdots\cdots\cdots (3)$$

在 $t=0$ 時， $x=c$， $y=3$， $z=-2$

$\dot{x}=d$， $\dot{y}=5$， $\dot{z}=1$

$\ddot{x}=10$，$\ddot{y}=2$， $\ddot{z}=3$

將這些條件及 $t=0$ 代入(1)，(2)及(3)式後，可得

$c+9+16=0$， $c=-25$

$d+30-24=0$， $d=-6$

$10+50+12+24-72=2b$， $b=12$

6-12 某一質點以固定的速度

$$\mathbf{v}=a\,\mathbf{i}+b\,\mathbf{j}+c\,\mathbf{k} \quad \text{ft/sec}$$

運動，而在 $t=0$ 時，

$$\mathbf{r}=a\,\mathbf{i}+2b\,\mathbf{j}+3c\,\mathbf{k} \quad \text{ft}$$

試求其在 $t=10$ sec 時的位置。

【解】因為 $\mathbf{V}=a\,\mathbf{i}+b\,\mathbf{j}+c\,\mathbf{k}$ ft/sec

積分後可得

$$\mathbf{r}=(at+a_1)\,\mathbf{i}+(bt+b_1)\,\mathbf{j}+(ct+c_1)\,\mathbf{k} \text{ ft}$$

利用 $t=0$ 時的起始條件可得

$a_1=a$， $b_1=2b$，

$c_1=2c+c=3c$

所以

$$\mathbf{r}=a(t+1)\,\mathbf{i}+b(t+2)\,\mathbf{j}+c(t+3)\,\mathbf{k} \text{ ft}$$

因此在 $t=10$ sec 時

$$\mathbf{r}(10)=11a\,\mathbf{i}+12b\,\mathbf{j}+13c\,\mathbf{k} \text{ ft}$$

6-13 某一質點從原點起動，其固定的加速度為

$$\mathbf{a}=2\,\mathbf{i}+8\,\mathbf{j}-6\,\mathbf{k} \quad \text{ft/sec}^2$$

試求其在 $t=5$ sec 時的位置。

【解】$\mathbf{a}=2\mathbf{i}+8\mathbf{j}-6\mathbf{k}$ ft/sec²

對 t 積分後可得

$$\mathbf{v}=(2t+a)\mathbf{i}+(8t+b)\mathbf{j}+(c-6t)\mathbf{k} \quad \text{ft/sec}$$

因爲在 $t=0$ 時 $\mathbf{v}=0$；所以，$a=b=c=0$

由 $\mathbf{v}$ 再對 t 積分一次可得

$$\mathbf{r}=(t^2+d)\mathbf{i}+(4t^2+e)\mathbf{j}+(-3t^2+f)\mathbf{k} \quad \text{ft}$$

因爲 $t=0$ 時 $\mathbf{r}=0$；所以，$d=e=f=0$

因此在 $t=5$ 時，

$\mathbf{r}=25\mathbf{i}+100\mathbf{j}-75\mathbf{k}$ ft

6-14 某一質點以固定的加速度運動。當 $t=0$ 時，此質點在 (6，9，7) 處，而且以 18 ft/sec 的速率向 (14，13，6) 的方向運動。質點的位置以 ft 而時間以 sec 來表示。10 sec 後，質點通過 (216，239，137) 處，求其固定的加速度。

【解】$\mathbf{e}=[(14-6)\mathbf{i}+(13-9)\mathbf{j}+(6-7)\mathbf{k}]/9$

$=(8\mathbf{i}+4\mathbf{j}-\mathbf{k})/9$

$\mathbf{v}(0)=18\mathbf{e}=16\mathbf{i}+8\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ ft/sec

$\mathbf{r}(0)=6\mathbf{i}+9\mathbf{j}+7\mathbf{k}$ ft

令 $\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}=$ 常數

將 $\mathbf{a}$ 對時間 t 積分兩次後，並且由 $\mathbf{r}(0)$ 及 $\mathbf{v}(0)$ 可得

$$\mathbf{r}=(1/2\,a_x t^2+16t+6)\mathbf{i}+(1/2\,a_y t^2+8t+9)\mathbf{j}+(1/2\,a_z t^2-2t+7)\mathbf{k} \quad \text{ft}$$

因爲在 $t=10$ sec 時，$\mathbf{r}=216\mathbf{i}+239\mathbf{j}+137\mathbf{k}$

所以，$a_x=1$，$a_y=3$，$a_z=3$

因此 $\mathbf{a}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ ft/sec²

6-15 當 $t=0$ 時，某一質點恰好在原點，而且以 14 ft/sec 的速率

朝（ 60，-30，20 ）點運動。而正在此時

$$\mathbf{a}=\mathbf{v}$$

已知 $\mathbf{a}$ 爲一常向量，試求此質點通過 $x=600$ ft 時的時間及當時的位置。

【解】$\mathbf{e}=(6\,\mathbf{i}-3\,\mathbf{j}+2\,\mathbf{k})/7$

因爲 $\mathbf{a}=\mathbf{v}$，$\mathbf{v}=(v_0+v_0t)\,\mathbf{e}$ ft/sec

而 $v_0=14$ ft/sec

所以 $\mathbf{v}=14(1+t)\,\mathbf{e}$ ft/sec

而 $\mathbf{r}=(14\,t+7\,t^2)\,\mathbf{e}$ ft

$=(2t+t^2)(6\,\mathbf{i}-3\,\mathbf{j}+2\mathbf{k})$ ft

當 $x=600$ 時，即 $6(t^2+2t)=600$

所以 $t=9.05$ sec

而 $\mathbf{r}=700\,\mathbf{e}$

$=(600\,\mathbf{i}-300\,\mathbf{j}+200\,\mathbf{k})$ ft

6-16 某一線在平面上的角加速度方程式爲

$$\alpha=12t^2+2k$$

α 的單位爲 rad/sec²，t 爲 sec，而 k 爲一常數。假設逆時針方向爲正。當 $t=0$ 時，此線的角位置爲 2 rad 順時針向，而角速度爲 3 rad/sec 逆時針向。當 $t=1$ sec 時，線的角位置爲 4 rad 順時針向。求 $t=2$ sec 時的角加速度。

【解】$\alpha=12\,t^2+2k$ rad/sec²

$\omega=4\,t^3+2\,kt+\omega_0$ rad/sec

當 $t=0$ 時，$\omega_0=3$ rad

所以，$\omega=4t^3+2\,k\,t+3$ rad/sec

$\theta=t^4+k\,t^2+3\,t+\theta_0$ rad

當 $t=0$ 時，$\theta_0=-2$ rad

所以 $\theta=t^4+k\,t^2+3\,t-2$ rad

當 $t=1$ sec 時，$\theta(1)=-4$ rad

$\therefore\ k=-6$

$$\alpha = (12t^2 - 12)\ \text{rad/sec}^2$$

當 $t = 2$ sec 時

$$\alpha = 12(4) - 12 = 36\ \text{rad/sec}^2$$

6-17 某一質點的位置向量在平面上的角速度爲

$$\omega = 4t^3 - 12t^2$$

ω 的單位是 rad/sec，而 t 爲 sec。當 $t = 0$ 時，此線由靜止起動，其位置在 $\theta = -3$ rad。求當 $t = 5$ sec 時的 (a)角加速度 (b)角位移 (c)轉動的總角度。

【解】$\omega = 4t^3 - 12t^2$ rad/sec

$$\alpha = 12t^2 - 24t\ \ \text{rad/sec}^2$$

$$\theta = t^4 - 4t^3 + \theta_0\ \ \text{rad}$$

當 $t = 0$ 時，$\theta_0 = -3$

所以 $\theta = t^4 - 4t^3 - 3$ rad

當 $\omega = 0$ 時，$t = 0$ sec 及 $t = 3$ sec

$t = 3$ sec，則 $\theta = -30$

$$|-30| - |-3| = 27$$

$t = 5$ sec 時，$\alpha = 180\ \text{rad/sec}^2$

$$\omega = 200\ \text{rad/sec}$$

$$\theta = 122\ \text{rad}$$

總轉動角度 $= 2(27) + 3 + 122$

$$= 179\ \text{rad}$$

6-18 某一線在垂直平面上轉動，其角加速度爲

$$\alpha = 12t - 24$$

α 的單位爲 rad/sec^2，而 t 爲 sec。假設逆時針方向的角度爲正值。當 $t = 0$ 時，角速度 ω 爲 18 rad/sec，逆時鐘向；而角位置 $\theta = 0$。求此線由 $t = 0$ 到 $t = 2$ sec 所轉動的總角度。

【解】$\alpha = 12t - 24$

$\omega = 6t^2 - 24t + \omega_0$

因　$t = 0$ 時，$\omega = 18$ rad/sec

所以　$\omega = 6t^2 - 24t + 18$

$\theta = 2t^3 - 12t^2 + 18t + \theta_0$

當　$t = 0$ 時，　$\theta_0 = 0$

所以　$\theta = 2t^3 - 12t^2 + 18t$

令　$\omega = 0$，　$6t^2 - 24t + 18 = 0$

$t = 1, 3$

$t = 0$　　$\theta = 0$

$t = 1$　　$\theta = 8$

$t = 2$　　$\theta = 4$

總轉動角度 $= 8 + (8 - 4) = 12$ rad

6-19 如前題，求 $t = 0$ 到 $t = 5$ sec時的總轉動角度。

【解】由前題可知

$\theta(0) = 0$，　$\theta(1) = 8$，$\theta(3) = 0$，$\theta(5) = 40$

總轉動角度 $= \theta = (8 - 0) + (8 - 0) + (40 - 0)$

$= 56$ rad

6-20 某質點沿一圓形路線而運動，由原點到圓周上質點的位置向量，在某一段時間內其角速度由 5 rad/sec 逆時針向，均勻改變到 8 rad/sec 順時針向，而位置向量的總轉角爲 40 rad。(a)求位置向量在此段時間開始後，任意時間時的角速度 (b)求位置向量的角加速度。

【解】令減速度爲 α

則　$\omega = \alpha t + \omega_0$

$\theta = 1/2\,\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0$

當　$t = 0$ 時，知 $\omega_0 = 5$ rad/sec，$\theta_0 = 0$

令　$t = t_1$ 時，$\omega = 0$，$\theta = \theta_1$

故　$\alpha t_1=-5$ 及 $\theta_1=2.5\,t_1$

又當　$t=t_2$ 時，　$\omega=-8$，$\theta=\theta_2$

故　$\alpha t_2=-13$ 及　$\theta_2=-1.5\,t_2=-3.9\,t_1$

即　$40=2\,|\theta_1|+|\theta_2|=5\,t_1+3.9\,t_1$

$=8.9\,t_1$

所以　$t_1=40/8.9$

$\alpha=-8.9/8\ \text{rad/sec}^2$

故　(a)　$\omega=-(8.9/8)t+5\ \text{rad/sec}$

(b)　$\alpha=-8.9/8\ \text{rad/sec}^2$

6-21 某質點繞一 8 ft 直徑的圓周而運動。由原點到圓周上質點的位置向量，其角速度在某一段時間內由 20 rad/sec 逆時針向，均匀變化到 10 rad/sec 順時針向，而位置向量的總轉角為 50 rad。(a)求此位置向量的角加速度　(b)求此段時間開始後 4 sec 時，位置向量的角速度。

【解】$50=[t_1(10)+20(2t_1)]/2$

$t_1=2\ \text{sec}$

$t=3\,t_1=6\ \text{sec}$

(a)　$\alpha=(-10-20)/6$

$=-5\ \text{rad/sec}^2$

(b)　$\omega=\alpha t+\omega_0$

當　$t=4$ sec 時

$\omega=-5\times4+20=0$

6-22 某一質點沿著 x 軸作直線運動，

$x=a\,t^2+b\,e^{-ct}$

a，b 及 c 為常數。求速度 $\dot{x}$ 與加速度 $\ddot{x}$

【解】因為　$x=a\,t^2+b\,e^{-ct}$

故　$\dot{x}=2a\,t-b\,c\,e^{-ct}$

$\ddot{x}=2a+bc^2e^{-ct}$