高等学校教材

误差理论与数据处理

（修订本）

合肥工业大学　费业泰　主编

GAO DENG XUE
XIAO JIAO CAI

机械工业出版社

本书主要讲述精密测试技术中静态测量和动态测量的误差理论与数据处理，内容包括：绪论、误差的基本性质与处理、误差的合成与分配、线性参数的最小二乘法处理、回归分析与谐波分析、动态测试数据处理基本方法。本书最后有几个附录，主要有部分公式的推导、有效数字与数字运算、几种常用数据处理的计算机程序等。

本书为高等工业学校精密仪器专业教材，也可作为仪器仪表类和机械类有关专业教材，同时可供其他专业师生、科研和生产单位的研究设计以及计量测试等工程技术人员使用。

误差理论与数据处理

（修 订 本）

合肥工业大学 费业泰 主编

•

责任编辑：贡克勤

•

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南里一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

中国农业机械出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

•

开本 787×1092 1/16 · 印张 13 · 字数 314 千字

1981年7月北京第一版

1987年6月北京第二版·1987年6月北京第六次印刷

印数 38,401—46,400 · 定价：2.25 元

•

统一书号：15033·5041

前　言

根据一九七八年四月原第一机械工业部高等学校对口专业座谈会精神及同年十月精密仪器专业教材会议制订的《误差理论与数据处理》课程大纲，编写了本书第一版，并于一九八一年八月出版。按照高等学校仪器仪表类专业教材编审委员会精密仪器专业教材编审小组一九八三年十月制订的教学计划以及一九八四年四月审定的《误差理论与数据处理》教学大纲，对本书第一版作了全面的修订，现出版本书第二版。

本书主要讲述几何量、机械量以及其他有关物理量的静态测量和动态测量的误差理论与数据处理。内容包括：误差的基本性质与处理；误差的合成与分配；线性参数的最小二乘法处理；回归分析与谐波分析；动态测试数据处理基本方法等。为了加深本书各章有关内容，本书第二版增加了几个附录，供教学参考或选用。内容主要有：部分公式的推导，有效数字与数据运算，几种常用数据处理的计算机程序等。

本书第二版与第一版相比，除了对全书文字进行修改，使之更加精炼和更富有教材性外，各章内容也有不少删补，删减了陈旧的和不必要的章节，补充了新的和较实用的内容。主要有：修正了第一版存在的明显错误与不足，对某些重要概念的阐述更加清楚、易于理解；在第二章中，删去原§2-5测量结果的处理步骤，而通过两个实例来说明常见的等精度和不等精度直接测量列的数据处理方法；将第三章改名为误差的合成与分配(原名为误差合成)，按测量不确定度概念重新编写了有关内容，并将原第二章的§2-4函数误差并入第三章；在第五章中，删去原§5-6多项式回归和§5-7回归的正交设计；将第六章改名为动态测试数据处理基本方法(原名为随机过程及其数据处理)，删去原§6-3随机过程测量结果的评定，增加了动态测试基本概念和动态数据处理基本步骤等内容；此外，本书最后增加了上述几个有实用意义的附录。

本课程是高等学校精密仪器专业必修课之一，它是实践性较强的一门专业基础理论课，在进行教学时必须布置一定数量的习题，有条件时还应开出必要的实验。因此另外编写了《误差理论与数据处理习题集》，按本书各章内容精选了大量习题及必要的示范题解，该习题集作为本课程的辅助教材出版，以供教学选用和参考。

本书为高等学校精密仪器专业教材，也可作为仪器仪表类和机械类有关专业教材，同时可供其他有关专业师生、科研和生产单位的研究设计以及计量测试等工程技术人员使用。

本书第二版由合肥工业大学费业泰主编，负责各章编写的有费业泰（第一、二章及第三章部分内容）、哈尔滨工业大学丁振良(第三章部分内容及第四章)、上海机械学院姚景风(第五章)、合肥工业大学邓善熙（第六章）等。本书附录一由南京工学院王明峰编写，其余附录由本书有关各章编写人分别编写。本书由天津大学陈林才主审，天津大学罗南星参加了全书审稿工作。

在本书修订工作中，上海交通大学张鄂、合肥工业大学李书富以及使用本书的三十余所高等学校有关教师和科研单位有关研究人员也给予了积极热情的支持与帮助，提出了许多宝贵意见，在此表示感谢！

由于编著水平有限，本书第二版也会存在缺点和错误，仍望读者批评指正。

编　者

一九八六年六月

目　录

第一章　绪论……………………………… 1
§1-1　研究误差的意义 ……………………… 1
§1-2　误差的基本概念 ……………………… 1
一、误差的定义及表示法…………………… 1
二、误差来源……………………………… 3
三、误差分类……………………………… 3
§1-3　精度 ………………………………… 4
第二章　误差的基本性质与处理………… 7
§2-1　随机误差 …………………………… 7
一、随机误差的产生原因…………………… 7
二、正态分布……………………………… 7
三、算术平均值…………………………… 8
四、测量的标准差…………………………12
五、测量的极限误差………………………19
六、不等精度测量…………………………21
七、随机误差的其他分布…………………26
§2-2　系统误差 ……………………………32
一、系统误差的产生原因…………………32
二、系统误差的特征………………………32
三、系统误差的发现………………………34
四、系统误差的减小和消除………………40
§2-3　粗大误差 ……………………………43
一、粗大误差的产生原因…………………43
二、防止与消除粗大误差的方法…………43
三、判别粗大误差的准则…………………44
§2-4　测量结果的数据处理实例 …………50
一、等精度直接测量列测量结果的数据处理实例…………………………50
二、不等精度直接测量列测量结果的数据处理实例……………………52
第三章　误差的合成与分配………………54
§3-1　测量不确定度概述 …………………54
一、不确定度的估计………………………54
二、不确定度合成的基本问题……………55
§3-2　函数误差 ……………………………55
一、函数系统误差计算……………………55
二、函数随机误差计算……………………58
三、误差间的相关关系和相关系数………62
§3-3　随机误差的合成 ……………………64
一、标准差的合成…………………………64
二、极限误差的合成………………………64
§3-4　系统误差的合成 ……………………66
一、已定系统误差的合成…………………66
二、未定系统误差的合成…………………66
§3-5　系统误差与随机误差的合成 ………68
一、按极限误差合成………………………68
二、按标准差合成…………………………69
§3-6　误差分配 ……………………………72
一、按等作用原则分配误差………………72
二、按可能性调整误差……………………73
三、验算调整后的总误差…………………73
§3-7　微小误差取舍准则 …………………74
§3-8　最佳测量方案的确定 ………………75
一、选择最佳函数误差公式………………76
二、使误差传递系数等于零或为最小……77
第四章　线性参数的最小二乘法处理…………………………………79
§4-1　最小二乘法原理 ……………………79
§4-2　正规方程 ……………………………83
一、等精度测量线性参数最小二乘估计的正规方程………………………83
二、不等精度测量线性参数最小二乘估计的正规方程……………………87
三、非线性参数最小二乘估计的正规方程…………………………………89
四、最小二乘原理与算术平均值原理的关系…………………………………90
§4-3　精度估计 ……………………………91
一、测量数据的精度估计…………………91
二、被测量的估计量的精度估计…………92
§4-4　组合测量的最小二乘法处理 ………97
第五章　回归分析与谐波分析 ………… 101
§5-1　回归分析的基本概念……………… 101
一、函数与相关 ……………………… 101

二、回归分析的主要内容 ……102
§5-2 一元线性回归……102
一、一元线性回归方程 ……102
二、回归方程的方差分析及显著性检验 ……106
三、重复试验情况 ……109
四、回归直线的简便求法 ……112
§5-3 两个变量都具有误差时线性回归方程的确定……114
一、概述 ……114
二、回归方程的求法 ……115
§5-4 一元非线性回归……117
一、回归曲线函数类型的选取和检验 ……117
二、化曲线回归为直线回归问题 ……120
三、回归曲线方程的效果与精度 ……121
§5-5 多元线性回归……122
一、多元线性回归方程 ……122
二、回归方程的显著性和精度 ……128
三、每个自变量在多元回归中所起的作用 ……129
§5-6 谐波分析……132
一、谐波分析原理 ……132
二、12点坐标法 ……135
三、谐波分析方法的应用 ……139
第六章 动态测试数据处理基本方法 ……140
§6-1 动态测试基本概念……140
一、动态测试 ……140
二、动态测试数据的分类 ……140
§6-2 随机过程及其特征……144
一、研究随机过程理论的实际意义 ……144
二、随机过程的基本概念 ……145
三、随机过程的特征量 ……146
§6-3 随机过程特征量的实际估计……156
一、平稳随机过程及其特征量 ……156
二、各态历经随机过程及其特征量 ……161
三、非平稳过程的随机函数 ……164
§6-4 动态测试数据处理基本步骤……167
一、数据的获得 ……167
二、数据的准备 ……167
三、数据性质的检验 ……170
四、数据分析 ……171
附录 ……173
一、部分公式的推导 ……173
二、有效数字与数据运算 ……188
三、几种常用数据处理的计算机程序(BASIC语言) ……190
四、关于给定实验不确定度的建议书INC-1(1980) ……196
附表 ……197
一、正态分布积分表 ……197
二、χ^2 分布表 ……197
三、t分布表……198
四、F分布表……198
主要参考文献 ……200

第一章 绪　论

§ 1-1 研究误差的意义

人类为了认识自然与改造自然，需要不断地对自然界的各种现象进行测量和研究，由于实验方法和实验设备的不完善，周围环境的影响、以及受人们认识能力所限等，测量和实验所得数据和被测量的真值之间，不可避免地存在着差异，这在数值上即表现为误差。随着科学技术的日益发展和人们认识水平的不断提高，虽可将误差控制得愈来愈小，但终究不能完全消除它。误差存在的必然性和普遍性，已为大量实践所证明，为了充分认识并进而减小或消除误差，必须对测量过程和科学实验中始终存在着的误差进行研究。

研究误差的意义为

① 正确认识误差的性质，分析误差产生的原因，以消除或减小误差。

② 正确处理测量和实验数据，合理计算所得结果，以便在一定条件下得到更接近于真值的数据。

③ 正确组织实验过程，合理设计仪器或选用仪器和测量方法，以便在最经济条件下，得到理想的结果。

§ 1-2 误差的基本概念

一、误差的定义及表示法

所谓误差就是测得值与被测量的真值之间的差，可用下式表示

$$误差=测得值-真值 \tag{1-1}$$

例如在长度计量测试中，测量某一尺寸的误差公式具体形式即为

$$误差=测得尺寸-真实尺寸 \tag{1-2}$$

测量误差可用绝对误差表示，也可用相对误差表示。

(一) 绝对误差

某量值的测得值和真值之差为绝对误差，通常简称为误差。

$$绝对误差=测得值-真值 \tag{1-3}$$

由式（1-3）可知，绝对误差可能是正值或负值。

所谓真值是指在观测一个量时，该量本身所具有的真实大小。量的真值是一个理想的概念，一般是不知道的。但在某些特定情况下，真值又是可知的。例如：三角形三个内角之和为180°；一个整圆周角为360°；按定义规定的国际千克基准的值可认为真值是1kg等。为了使用上的需要，在实际测量中，常用被测的量的实际值来代替真值，而实际值的定义是满足规定精确度的用来代替真值使用的量值。例如在检定工作中，把高一等级精度的标准所测得的量值称为实际值。如用二等标准活塞压力计测量某压力，测得值为9000.2N/cm²，若该压力用高一

等级的精确方法测得值为9000.5N/cm²，则后者可视为实际值，此时二等标准活塞压力计的测量误差为−0.3N/cm²。

在实际工作中，经常使用修正值。为消除系统误差用代数法加到测量结果上的值称为修正值，将测得值加上修正值后可得近似的真值，即

$$\text{真值} \approx \text{测得值} + \text{修正值} \tag{1-4}$$

由此得

$$\text{修正值} = \text{真值} - \text{测得值} \tag{1-5}$$

修正值与误差值的大小相等而符号相反，测得值加修正值后可以消除该误差的影响，但必须注意，一般情况下难以得到真值，因为修正值本身也有误差，修正后只能得到较测得值更为准确的结果。

（二）相对误差

绝对误差与被测量的真值之比值称为相对误差，因测得值与真值接近，故也可近似用绝对误差与测得值之比值作为相对误差，即

$$\text{相对误差} = \frac{\text{绝对误差}}{\text{真值}} \approx \frac{\text{绝对误差}}{\text{测得值}} \tag{1-6}$$

由于绝对误差可能为正值或负值，因此相对误差也可能为正值或负值。

相对误差是无名数，通常以百分数（%）来表示。例如用水银温度计测得某一温度为20.3℃，该温度用高一等级的温度计测得值为20.2℃，因后者精度高，故可认为20.2℃接近真实温度，而水银温度计测量的绝对误差为0.1℃，其相对误差为

$$\frac{0.1}{20.2} \approx \frac{0.1}{20.3} \approx 0.5\%$$

对于相同的被测量，绝对误差可以评定其测量精度的高低，但对于不同的被测量以及不同的物理量，绝对误差就难以评定其测量精度的高低，而采用相对误差来评定较为确切。

例如用两种方法来测量$L_1 = 100\ \text{mm}$的尺寸，其测量误差分别为$\delta_1 = \pm 10\ \mu\text{m}$，$\delta_2 = \pm 8\ \mu\text{m}$，根据绝对误差大小，可知后者的测量精度高。但若用第三种方法测量$L_2 = 80\ \text{mm}$的尺寸，其测量误差为$\delta_3 = \pm 7\ \mu\text{m}$，此时用绝对误差就难以评定它与前两种方法精度的高低，必须采用相对误差来评定。

第一种方法的相对误差为

$$\frac{\delta_1}{L_1} = \pm \frac{10\ \mu\text{m}}{100\ \text{mm}} = \pm \frac{10}{10000} = \pm 0.01\%$$

第二种方法的相对误差为

$$\frac{\delta_2}{L_2} = \pm \frac{8\ \mu\text{m}}{100\ \text{mm}} = \pm \frac{8}{10000} = \pm 0.008\%$$

第三种方法的相对误差为

$$\frac{\delta_3}{L_3} = \pm \frac{7\ \mu\text{m}}{80\ \text{mm}} = \pm \frac{7}{8000} \approx \pm 0.009\%$$

由此可知第一种方法精度最低，第二种方法精度最高。

（三）引用误差

所谓引用误差指的是一种简化和实用方便的仪器仪表示值的相对误差，它是以仪器仪表某一刻度点的示值误差为分子，以测量范围上限值或全量程为分母，所得的比值称为引用误

差，即

$$\text{引用误差} = \frac{\text{示值误差}}{\text{测量范围上限}} \tag{1-7}$$

例如测量范围上限为19600N的工作测力计（拉力表），在标定示值为14700N处的实际作用力为14778.4N，则此测力计在该刻度点的引用误差为

$$\frac{14700\,\mathrm{N}-14778.4\,\mathrm{N}}{19600\,\mathrm{N}} = \frac{-78.4}{19600} = -0.4\%$$

二、误差来源

在测量过程中，误差产生的原因可归纳为

（一）测量装置误差

1．标准量具误差

以固定形式复现标准量值的器具，如氪86灯管、标准量块、标准线纹尺、标准电池、标准电阻、标准砝码等，它们本身体现的量值，不可避免地都含有误差。

2．仪器误差

凡用来直接或间接将被测量和已知量进行比较的器具设备，称为仪器或仪表，如阿贝比较仪、天平等比较仪器，压力表、温度计等指示仪表，它们本身都具有误差。

3．附件误差

仪器的附件及附属工具，如测长仪的标准环规，千分尺的调整量棒等的误差，也会引起测量误差。

（二）环境误差

由于各种环境因素与规定的标准状态不一致而引起的测量装置和被测量本身的变化所造成的误差，如温度、湿度、气压（引起空气各部分的扰动）、振动（外界条件及测量人员引起的振动）、照明（引起视差）、重力加速度、电磁场等所引起的误差。通常仪器仪表在规定的正常工作条件所具有的误差称为基本误差，而超出此条件时所增加的误差称为附加误差。

（三）方法误差

由于测量方法不完善所引起的误差，如采用近似的测量方法而造成的误差，例如用钢卷尺测量大轴的圆周长S，再通过计算求出大轴的直径$d=\frac{S}{\pi}$，因近似数π取值的不同，将会引起误差。

（四）人员误差

由于测量者受分辨能力的限制，因工作疲劳引起的视觉器官的生理变化，固有习惯引起的读数误差，以及精神上的因素产生的一时疏忽等所引起的误差。

总之，在计算测量结果的精度时，对上述四个方面的误差来源，必须进行全面的分析，力求不遗漏、不重复，特别要注意对误差影响较大的那些因素。

三、误差分类

按照误差的特点与性质，误差可分为系统误差、随机误差（也称偶然误差）和粗大误差三类。

（一）系统误差

在同一条件下，多次测量同一量值时，绝对值和符号保持不变，或在条件改变时，按一定规律变化的误差称为系统误差。

例如标准量值的不准确、仪器刻度的不准确而引起的误差。

系统误差又可按下列方法分类：

1．按对误差掌握的程度分为

已定系统误差，是指误差绝对值和符号已经确定的系统误差；

未定系统误差，是指误差绝对值和符号未能确定的系统误差，但通常可估计出误差范围。

2．按误差出现规律分为

不变系统误差，是指误差绝对值和符号为固定的系统误差；

变化系统误差，是指误差绝对值和符号为变化的系统误差。按其变化规律，又可分为线性系统误差、周期性系统误差和复杂规律系统误差等。

（二）随机误差

在同一测量条件下，多次测量同一量值时，绝对值和符号以不可预定方式变化着的误差称为随机误差。

例如仪器仪表中传动部件的间隙和摩擦、连接件的弹性变形等引起的示值不稳定。

（三）粗大误差

超出在规定条件下预期的误差称为粗大误差，或称“寄生误差”。此误差值较大，明显歪曲测量结果，如测量时对错了标志、读错或记错了数、使用有缺陷的仪器以及在测量时因操作不细心而引起的过失性误差等。

上面虽将误差分为三类，但必须注意各类误差之间在一定条件下可以相互转化。对某项具体误差，在此条件下为系统误差，而在另一条件下可为随机误差，反之亦然。如按一定基本尺寸制造的量块，存在着制造误差，对某一块量块的制造误差是确定数值，可认为是系统误差，但对一批量块而言，制造误差是变化的，又成为随机误差。在使用某一量块时，没有检定出该量块的尺寸偏差，而按基本尺寸使用，则制造误差属随机误差。若检定出量块的尺寸偏差，按实际尺寸使用，则制造误差属系统误差。掌握误差转化的特点，可将系统误差转化为随机误差，用数据统计处理方法减小误差的影响；或将随机误差转化为系统误差，用修正方法减小其影响。

总之，系统误差和随机误差之间并不存在绝对的界限。随着对误差性质认识的深化和测试技术的发展，有可能把过去作为随机误差的某些误差分离出来作为系统误差处理，或把某些系统误差当作随机误差来处理。

§ 1-3 精　　度

反映测量结果与真值接近程度的量，称为精度，它与误差的大小相对应，因此可用误差大小来表示精度的高低，误差小则精度高，误差大则精度低。

精度可分为

① 准确度：它反映测量结果中系统误差的影响程度；

② 精密度：它反映测量结果中随机误差的影响程度；

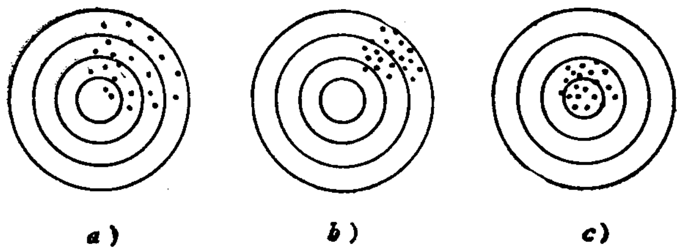
a）
b）
c）

图 1-1

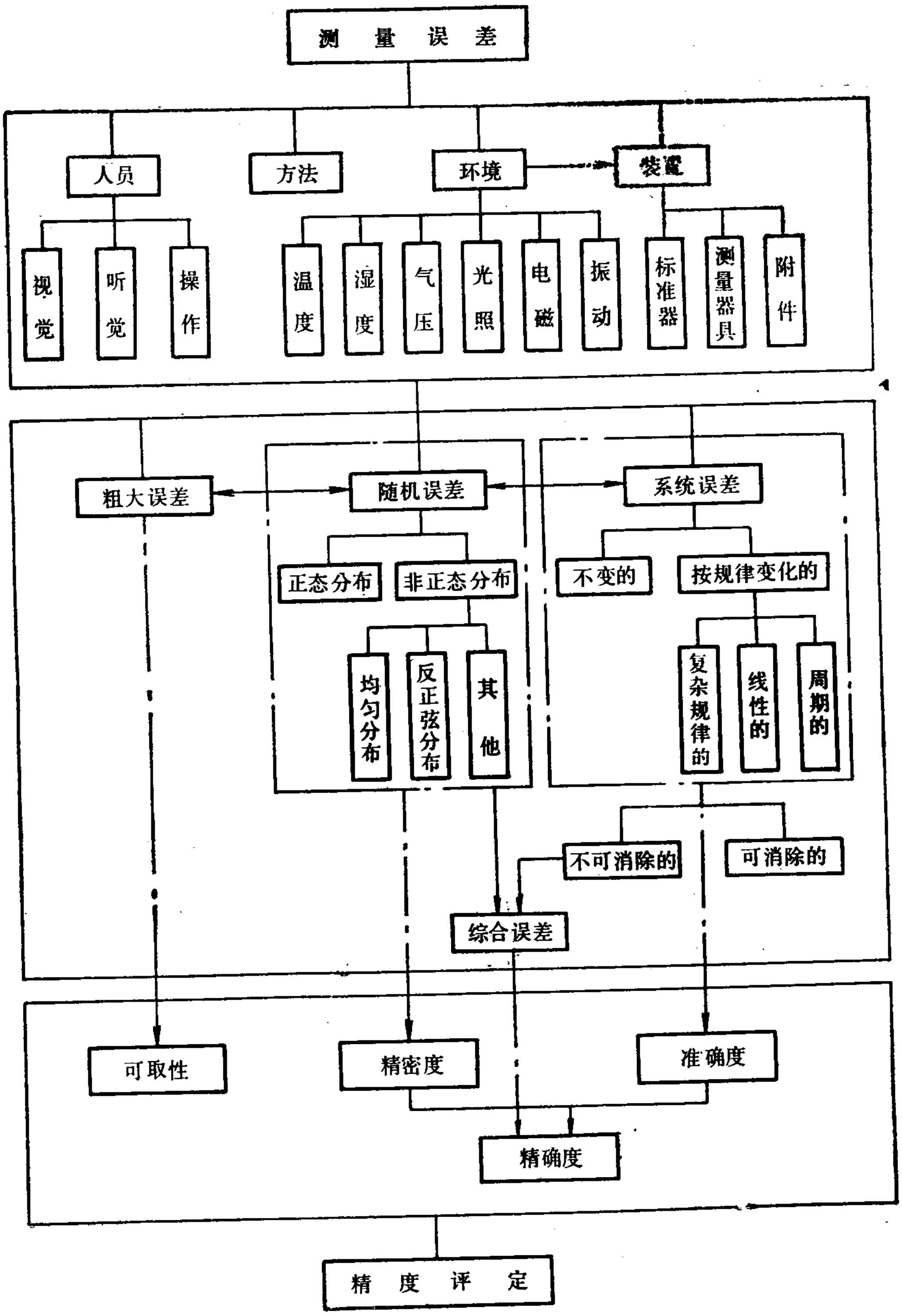
测 量 误 差
人员
方法
环境
装置
视觉
听觉
操作
温度
湿度
气压
光照
电磁
振动
标准器
测量器具
附件
粗大误差
随机误差
系统误差
正态分布
非正态分布
均匀分布
反正弦分布
其他
不变的
按规律变化的
复杂规律的
线性的
周期的
不可消除的
可消除的
综合误差
可取性
精密度
准确度
精确度
精 度 评 定

图 1-2

③ 精确度：它反映测量结果中系统误差和随机误差综合的影响程度，其定量特征可用测量的不确定度（或极限误差）来表示。

精度在数量上有时可用相对误差来表示，如相对误差为0.01%，可笼统说其精度为10^{-4}，若纯属随机误差引起，则说其精密度为10^{-4}，若是由系统误差与随机误差共同引起，则说其精确度为10^{-4}。

对于具体的测量，精密度高的而准确度不一定高，准确度高的而精密度也不一定高，但精确度高，则精密度与准确度都高。

如图1-1所示的打靶结果，子弹落在靶心周围有三种情况，图a的系统误差小而随机误差大，即准确度高而精密度低。图b的系统误差大而随机误差小，即准确度低而精密度高。图c的系统误差与随机误差都小，即精确度高，我们希望得到精确度高的结果。

误差来源、分类和精度评定的系统图列于图1-2。

第二章　误差的基本性质与处理

任何测量总是不可避免地存在误差，为了提高测量精度，必须尽可能消除或减小误差，因此有必要对各种误差的性质，出现规律，产生原因，发现与消除或减小它们的主要方法以及测量结果的评定等方面，作进一步的分析。

§ 2-1　随 机 误 差

一、随机误差的产生原因

当对同一量值进行多次等精度的重复测量，得到一系列不同的测量值（常称为测量列），每个测量值都含有误差，这些误差的出现又没有确定的规律，即前一个误差出现后，不能预定下一个误差的大小和方向，但就误差的总体而言，却具有统计规律性

随机误差是由很多暂时未能掌握或不便掌握的微小因素所构成，主要有以下几方面：

① 测量装置方面的因素：零部件配合的不稳定性、零部件的变形、零件表面油膜不均匀、摩擦等。

② 环境方面的因素：温度的微小波动、湿度与气压的微量变化、光照强度变化、灰尘以及电磁场变化等。

③ 人员方面的因素：瞄准、读数的不稳定等。

二、正态分布

若测量列中不包含系统误差和粗大误差，则该测量列中的随机误差一般具有以下几个特征：

① 绝对值相等的正误差与负误差出现的次数相等，这称为误差的对称性。

② 绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的次数多，这称为误差的单峰性。

③ 在一定的测量条件下，随机误差的绝对值不会超过一定界限，这称为误差的有界性。

④ 随着测量次数的增加，随机误差的算术平均值趋向于零，这称为误差的抵偿性。

最后一个特征可由第一特征推导出来，因为绝对值相等的正误差和负误差之和可以互相抵消。对于有限次测量，随机误差的算术平均值是一个有限小的量，而当测量次数无限增大时，它趋向于零。

服从正态分布的随机误差是具有以上四个特征的。由于多数的随机误差都服从正态分布，因而正态分布在误差理论中占有十分重要的地位。

设被测量的真值为 L_0，一系列测得值为 l_i，则测量列中的随机误差 δ_i 为

$$\delta_i = l_i - L_0 \tag{2-1}$$

式中　$i = 1, 2, \cdots, n$

正态分布的分布密度 $f(\delta)$ 与分布函数 $F(\delta)$ 为

$$f(\delta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} \tag{2-2}$$

$$F(\delta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\delta}e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\delta \tag{2-3}$$

式中　σ——标准差（或均方根误差）；

　　e——自然对数的底，其值为 2.7182…。

它的数学期望为

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}\delta f(\delta)\mathrm{d}\delta=0 \tag{2-4}$$

它的方差为

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}\delta^2 f(\delta)\mathrm{d}\delta \tag{2-5}$$

其平均误差为

$$\theta=\int_{-\infty}^{\infty}|\delta|f(\delta)\mathrm{d}\delta=0.7979\sigma\approx\frac{4}{5}\sigma \tag{2-6}$$

此外由　$\int_{-\rho}^{\rho}f(\delta)\mathrm{d}\delta=\frac{1}{2}$

可解得或然误差为

$$\rho=0.6745\sigma\approx\frac{2}{3}\sigma \tag{2-7}$$

图 2-1 为正态分布曲线以及各精度参数在图中的坐标。σ 值为曲线上拐点 A 的横坐标，θ 值为曲线右半部面积重心 B 的横坐标，ρ 值的纵坐标线则平分曲线右半部面积。

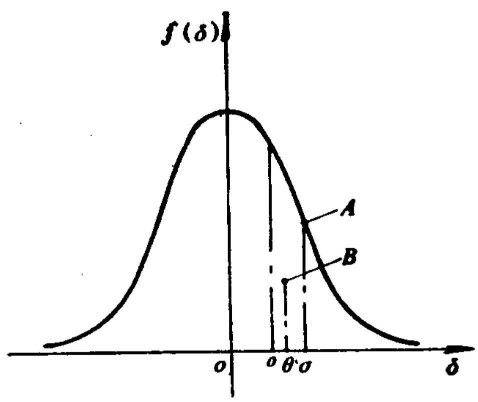

图 2-1

三、算术平均值

对某一量进行一系列等精度测量，由于存在随机误差，其测得值皆不相同，应以全部测得值的算术平均值作为最后测量结果。

（一）算术平均值的意义

在系列测量中，被测量的 n 个测得值的代数和除以 n 而得的值称为算术平均值。

设 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 为 n 次测量所得的值，则算术平均值 $\bar{x}$ 为

$$\bar{x}=\frac{l_1+l_2+\cdots+l_n}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}l_i}{n} \tag{2-8}$$

算术平均值与被测量的真值最为接近，由概率论的大数定律可知，若测量次数无限增加，则算术平均值 $\bar{x}$ 必然趋近于真值 L_0。

由式（2-1）求和得

$$\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n=(l_1+l_2+\cdots+l_n)-nL_0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i=\sum_{i=1}^{n}l_i-nL_0$$

$$L_0=\frac{\sum_{i=1}^{n}l_i}{n}-\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i}{n}$$

根据正态分布随机误差的第四特征可知：

当 $n\to\infty$时，有$\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i}{n}\to 0$，所以

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}l_i}{n}\to L_0$$

由此可见，如果能够对某一量进行无限多次测量，就可得到不受随机误差影响的测量值，或其影响甚微，可予忽略。这就是当测量次数无限增大时，算术平均值（数学上称之为最大或然值）被认为是最接近于真值的理论依据。由于实际上都是有限次测量，我们只能把算术平均值近似地作为被测量的真值。

一般情况下，被测量的真值为未知，不可能按式(2-1)求得随机误差，这时可用算术平均值代替被测量的真值进行计算，则有

$$v_i=l_i-\bar{x} \tag{2-9}$$

式中 l_i——第 i 个测得值，$i=1,2,\cdots,n$；

v——l_i的残余误差（简称残差）。

如果测量列中的测量次数和每个测量数据的位数皆较多，直接按式(2-8)计算算术平均值，既繁琐，又容易产生错误，此时可用简便法进行计算。

任选一个接近所有测得值的数 l_0 作为参考值，计算出每个测得值 l_i 与 l_0 的差值

$$\Delta l_i=l_i-l_0,\qquad i=1,2,\cdots,n$$

因

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}l_i}{n},\qquad \Delta\bar{x}_0=\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i}{n}$$

则

$$\bar{x}=l_0+\Delta\bar{x}_0 \tag{2-10}$$

式中的 $\Delta\bar{x}_0$ 为简单数值，很容易计算，因此按式(2-10)求算术平均值比较简便。

例 2-1 测量某物理量10次，得到结果见表 2-1，求算术平均值。

任选参考值 $l_0=1879.65$，计算差值 Δl_i 和 $\Delta\bar{x}_0$ 列于表中，很容易求得算术平均值 $\bar{x}=$ 1879.65。

（二）算术平均值的计算校核

术平均值及其残余误差的计算是否正确，可用求得的残余误差代数和性质来

表 2-1

序号	l_i	Δl_i	v_i
1	1879.64	−0.01	0
2	1879.69	+0.04	+0.05
3	1879.60	−0.05	−0.04
4	1879.69	+0.04	+0.05
5	1879.57	−0.07	−0.07
6	1879.62	−0.03	−0.02
7	1879.64	−0.01	0
8	1879.65	0	+0.01
9	1879.64	−0.01	0
10	1879.65	0	+0.01
	$\bar{x}=1879.65-0.01$ $=1879.64$	$\Delta\bar{x}_0=\dfrac{\sum_{i=1}^{10}\Delta l_i}{10}=-0.01$	$\sum_{i=1}^{n}v_i=-0.01$

校核。

根据式(2-9)求得的残余误差，其代数和为

$$\sum_{i=1}^{n}v_i=\sum_{i=1}^{n}l_i-n\bar{x}$$

式中的算术平均值$\bar{x}$是根据式(2-8)计算的，当求得的$\bar{x}$为未经凑整的准确数时，则有

$$\sum_{i=1}^{n}v_i=0 \tag{2-11}$$

残余误差代数和为零这一性质，可用来校核算术平均值及其残余误差计算的正确性。但是按式(2-8)计算$\bar{x}$时，往往会遇到小数位较多或除不尽的情况，必须根据测量的有效数字(见附录二)，按数据舍入规则，对算术平均值$\bar{x}$进行截取与凑整，因此实际得到的$\bar{x}$可能为经过凑整的非准确数，存在舍入误差Δ，即

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}l_i}{n}+\Delta$$

而

$$\sum_{i=1}^{n}v_i=\sum_{i=1}^{n}l_i-n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}l_i}{n}+\Delta\right)=-n\Delta$$

经过分析证明，用残余误差代数和校核算术平均值及其残余误差，其规则为

1. 残余误差代数和应符合：

当 $\sum_{i=1}^{n}l_i=n\bar{x}$，求得的$\bar{x}$为非凑整的准确数时，$\sum_{i=1}^{n}v_i$为零；

当 $\sum_{i=1}^{n} l_i > n\bar{x}$，求得的 $\bar{x}$ 为凑整的非准确数时，$\sum_{i=1}^{n} v_i$ 为正，其大小为求 $\bar{x}$ 时的余数；

当 $\sum_{i=1}^{n} l_i < n\bar{x}$，求得的 $\bar{x}$ 为凑整的非准确数时，$\sum_{i=1}^{n} v_i$ 为负，其大小为求 $\bar{x}$ 时的亏数。

2. 残余误差代数和绝对值应符合：

当 n 为偶数时，$\left|\sum_{i=1}^{n} v_i\right| \leqslant \frac{n}{2}A$；

当 n 为奇数时，$\left|\sum_{i=1}^{n} v_i\right| \leqslant \left(\frac{n}{2}-0.5\right)A$。

式中 A 为实际求得的算术平均值 $\bar{x}$ 末位数的一个单位。

以上两种校核规则，可根据实际运算情况选择一种进行校核，但大多数情况选用第二种规则可能较为方便，它不需要知道所有测得值之和。

例 2-2 用例 2-1 数据，对计算结果进行校核。

因 n 为偶数，$\frac{n}{2}=\frac{10}{2}=5$，$A=0.01$

由表2-1知

$$\left|\sum_{i=1}^{10} v_i\right| = 0.01 < \frac{n}{2}A = 0.05$$

故计算结果正确。

例 2-3 测量某直径 11 次，得到结果如表 2-2 所示，求算术平均值并进行校核。

表 2-2

序 号	l_i/mm	v_i/mm
1	2000.07	+0.003
2	2000.05	−0.017
3	2000.09	+0.023
4	2000.06	−0.007
5	2000.08	+0.013
6	2000.07	+0.003
7	2000.06	−0.007
8	2000.05	−0.017
9	2000.08	+0.013
10	2000.06	−0.007
11	2000.07	+0.003
	$\sum_{i=1}^{11} l_i = 22000.74$	$\sum_{i=1}^{11} v_i = 0.003$

算术平均值 $\bar{x}$ 为

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{11} l_i}{11}=\frac{22000.74}{11}\text{mm}=2000.0673\text{ mm}$$

取

$$\bar{x}=2000.067\text{ mm}$$

用第 1 种规则校核，则有

$$\sum_{i=1}^{11} l_i=22000.74\text{ mm}>n\bar{x}=11\times2000.067\text{ mm}=22000.737\text{ mm}$$

$$\sum_{i=1}^{11} v_i=\sum_{i=1}^{11} l_i-11\bar{x}=22000.74\text{ mm}-22000.737\text{ mm}=0.003\text{ mm}$$

用第 2 种规则校核，则有

$$\frac{n}{2}-0.5=\frac{11}{2}-0.5=5\text{ ，}A=0.01\text{ mm}$$

$$\left|\sum_{i=1}^{11} v_i\right|=0.003\text{ mm}<\left(\frac{n}{2}-0.5\right)A=0.05\text{ mm}$$

故用两种规则校核皆说明计算结果正确。

四、测量的标准差

测量的标准偏差简称为标准差，也可称之为均方根误差。

(一) 测量列中单次测量的标准差

由于随机误差的存在，等精度测量列中各个测得值一般皆不相同，它们围绕着该测量列的算术平均值有一定的分散，此分散度说明了测量列中单次测得值的不可靠性，必须用一个数值作为其不可靠性的评定标准。

符合正态分布的随机误差分布密度如式(2-2)所示。由此可知：σ 值愈小，则 e 的指数的绝对值愈大，因而$f(\delta)$减小得愈快，即曲线变陡。而σ值愈小，在 e 前面的系数值变大，即对应于误差为零（$\delta=0$）的纵坐标也大，曲线变高。反之，σ 愈大，$f(\delta)$减小愈快，曲线平坦，同时对应于误差为零的纵坐标也小，曲线变低。图 2-2 中三个测量列所得的分布曲线不同，其标准差 σ 也不相同，且 $\sigma_1<\sigma_2<\sigma_3$。

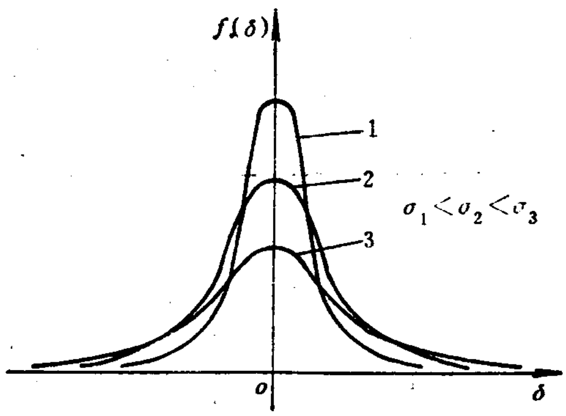

图 2-2

标准差σ的数值小，该测量列相应小的误差就占优势，任一单次测得值对算术平均值的分散度就小，测量的可靠性就大，即测量精度高（如图中的第 1 条曲线）；反之，测量精度就低（如图中的第 3 条曲线）。因此单次测量的标准差 σ 是表征同一被测量的 n 次测量的测得值分散性的参数，可作为测量列中单次测量不可靠性的评定标准。

应该指出，标准差 σ 不是测量列中任何一个具体测得值的随机误差，σ 的大小只说明，在一定条件下等精度测量列随机误差的概率分布情况。在该条件下，任一单次测得值的随机误差 δ，一般都不等于 σ，但却认为这一系列测量中所有测得值都属同样一个标准差 σ 的概