编 者 的 话

本书是供本系函授生和本科同学的学习辅导材料，又可作为教师的教学参考资料。因而在内容的安排上，除了教学大纲上要求的题目外，也收入了一些较为深入的题目，题目类型力求全一些，解法也尽量详细些。

本书是将国内较通用的高等代数教材上的大部题目和有关的外文书刊上搜集到的一批题目，以及本教研室历年积累的教学资料中整理出的一批题目，汇总在一起编纂而成的。分上下两册出版，上册包括：多项式、行列式、线性方程组、矩阵等，下册包括：线性空间、线性变换、二次型、欧氏空间与酉空间以及基本概念等。

由于题目来源较杂，各书作题依据不一，因此为了统一起见，本书又自编了一个题纲，将应知应会的内容分列在各节之前，作为解题的依据。本书是由教研室的部分同志集体讨论，分章撰写而成的。由于水平所限，时间仓促，繁简不当，难易失调，纰漏谬误之处，在所难免，热望予以批评指正。

编 者　　1979年10月

目　录

第一章 一元多项式

§1. 一元多项式的定义与运算

定义1．形式表达式

$$a_nx^n+a_nx^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+x_0$$

称为数域P上的一元多项式，简称为多项式．其中$a_i\in p$，n为非负整数．

今后用$f(x)$，$g(x)$来代表多项式．用$deg\,f(x)$表示$f(x)$的次数．对零多项式不定义次数．

定义2．如果两个多项式$f(x)$与$g(x)$同次项的系数全相等，则说多项式$f(x)$与$g(x)$是相等的，记作$f(x)=g(x)$

对于

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$$

$$g(x)=b_mx^m+b_{n-1}x^{m-1}+\cdots\cdots+b_1x+b_0$$

无妨假定$n\geqslant m$，规定：

定义3．多项式

$$b(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+(a_m+b_m)x^m+\cdots\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)$$

称为$f(x)$与$g(x)$的和，记作$h(x)=f(x)+g(x)$．

定义4．多项式

$$k(x)=a_nb_mx^{m+n}+(a_nb_{m-1}+a_{n-1}b_m)x^{m+n-1}+\cdots\cdots+(a_1b_0+a_0b_1)x_1+a_0b_0$$

称为$f(x)$与$g(x)$的积，记作$h(x)=f(x)\cdot g(x)$．

1．计算下列两个多项式的和、差、积：

1）$f(x)=x^5+2x+1$，　　　$g(x)=x^2+1$

2）$f(x)=2x^4-x^3+x^2+x+1$　　　$g(x)=x^2-3x+1$

3）$f(x)=x^3+y^2-x-1$　　　$g(x)=x^2-2x-1$

2．证明：

1）$deg(f(x)\pm g(x))\leqslant max(deg f(x),\ deg(x))$

2）$deg(f(x)g(x))=deg f(x)+deg g(x)$

其中$f(x)\neq0$　$g(x)\neq0$．

3．证明：

1）$deg(f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\cdots\pm f_s(x))\leqslant max[deg f_1(x),\ deg f_2(x),\ \cdots\cdots deg f_s(x)]$

2）$deg(f_1(x)f_2(x)\cdots\cdots f_s(x))=deg f_1(x)+deg f_2(x)+\cdots+deg f_s(x)$，其

$f_1(x)\neq 0$，$f_2(x)\neq 0$，…，$f_s(x)\neq 0$

4．证明：$f(x)\cdot g(x)=0$，充要条件 $f(x)=0$ 或 $g(x)=0$

5．若 $u(x)\cdot f(x)=u(x)g(x)$ 且 $u(x)\neq 0$，则 $f(x)=g(x)$

§2. 整除的概念和带余除法

定义5．设数域P上的两个多项式$f(x)$与$g(x)$，若存在数域P上的多项式$q(x)$，使得：

$$f(x)=g(x)\cdot q(x)$$

成立，则说$g(x)$整除$f(x)$，记作 $g(x)|f(x)$.

整除的基本性质：

1．若$f(x)|g(x)$，$g(x)|h(x)$，则 $f(x)|h(x)$.

2．若 $h(x)|f_i(x)$　$i=1,2,\cdots,s$．则

$$h(x)|f_1(x)g_1(x)\pm f_2(x)g_2(x)\pm\cdots\pm f_s(x)g_s(x),$$

其中 $g_i(x)$ $i=1,2,\cdots,s$ 为任意多项式．

3．$f(x)|g(x)$，$g(x)|f(x)$，充要条件是：

$$f(x)=cg(x)$$

其中C是数域P上的非零常数．

定理1（带余除法定理）设$f(x)$与$g(x)$为数域P上的任二多项式，并且$g(x)\neq 0$，那么存在P上唯一一对多项式$q(x)$，$r(x)$使

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x).$$

其中$r(x)=0$或者$\deg r(x)<\deg g(x)$.

6．用$g(x)$除$f(x)$、求商$q(x)$与余式$r(x)$

1）$f(x)=2x^4-3x^3+4x^2-5x+6$，　$g(x)=x^2-3x+1$

2）$f(x)=x^3-3x^2-x-1$　　$g(x)=3x^2-2x+1$

3）$f(x)=3x^4-2x^3-x+1$　　$g(x)=3x^2-x+2$

4）$f(x)=x^4-2x+5$　　$g(x)=x^2-x+2$

5）$f(x)=\sqrt{3}x^4+(2+i)x^3+(1-i)x+2$

$$g(x)=ix^2+1-\sqrt{3}.$$

7．m，p，q适合什么条件时，有

1）$x^2+mx-1|x^3+px+q$

2）$x^2+mx+1|x^4+px^2+q$

8．试决定a，b使

1）x^4+3x^2+ax+b　　能被x^2-2x+4整除．

2）ax^4+bx^3+1　　能被x^2-1整除．

9．设$f(x)$与$g(x)$次数相同，若$g(x)|f(x)$，则

$$g(x)=cf(x).$$

10．证明：在一个多项式等式中，除一项外，其余各项都是$f(x)$的倍式，那么这

一项也是 $f(x)$ 的倍式.

11. 设 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ 都是数域 P 上多项式, 其中 $f_1(x)\neq 0$ 且 $f_1(x)f_2(x)$ 能被 $g_1(x)g_2(x)$ 整除, 而 $g_1(x)$ 能被 $f_1(x)$ 整除, 证明 $f_2(x)$ 能被 $g_2(x)$ 整除.

§3. 最 大 公 因 式

定义 6. 设 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公因式, 如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的每一个公因式都能整除 $d(x)$, 那么 $d(x)$ 叫做 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式.

定理 2. 若 $d(x)$ 是数域 P 上的多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式, 那么存在 P 上的多项式 $u(x)$, $v(x)$ 使

$$d(x)=f(x)u(x)+g(x)v(x)$$

成立.

定义 7. 设数域 P 上的两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$, 如果 $(f(x)、g(x))=1$ 则说 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是互质的.

定理 3. P 上两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互质的充要条件是有 P 上两个多项式 $u(x)$、$v(x)$ 使得

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$$

成立.

12. 求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式

1) $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1$ $\quad g(x)=x^3+x^2-x-1$

2) $f(x)=x^5+x^4-x^3-2x-1$ $\quad g(x)=3x^4+2x^3+x^2+2x-2$

3) $f(x)=x^4-4x^3+1$ $\quad g(x)=x^3-3x^2+1$

4) $f(x)=x^4-10x^2+1$ $\quad g(x)=x^4-4\sqrt{2}x^3+6x^2+4\sqrt{2}x+1$

5) $f(x)=2x^6-5x^5-14x^4+36x^3+86x^2+12x-31$

$g(x)=2x^5-9x^4+2x^3+37x^2+10x-14$

13. 求 $u(x)$, $v(x)$, 使

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=(f(x),\ g(x))$$

1) $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2$, $\quad g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$;

2) $f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9$, $\quad g(x)=7x^3-x^2-5x+4$;

3) $f(x)=3x^3-2x^2+x+2$, $\quad g(x)=x^2-x+1$;

4) $f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1$, $\quad g(x)=x^2-x-1$.

14. 试确定 a, b, c

1) 使 $x^2+(c+b)x+4c+2$ 与 $x^2+(c+2)x+2c$ 的最大公因式是一个一次式;

2) 使 $x^3+(a+1)x^2+2x+26$ 与 x^3+4x^2+6 的最大公因式为二次式.

15. 若 $f(x)=g(x)u(x)+h(x)$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 和 $g(x)$ 与 $h(x)$ 有相同的公因式.

16. 证明: 若 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 的最大公因式存在, 那么 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ 的最大公因式也存在, 并且

$$(f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x))=((f_1(x),\ f_2(x)),\ f_3(x))$$

17．证明：若 $f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_{s-1}(x)$ 的最大公因式存在，则 $f_1(x)$，$f_2(x)$，……$f_{s-1}(x)$，$f_s(x)$的最大公因式也存在，且 $(f_1(x),f_2(x),\cdots f_{s-1}(x),f_s(x))=$ $=((f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots\cdots f_{s-1}(x)),\ f_s(x))$．接着证明，存在多项式 $u_1(x)$，$u_2(x)$，…$u_s(x)$使

$u_1(x)f_1(x)+u_2(x)f_2(x)+\cdots+u_s(x)f_s(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots f_s(x))$．

18．证明：若 $d(x)|f(x)$，$d(x)|g(x)$，且 $d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的一个组合式，即存在 $u(x)$，$v(x)$使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$$

则$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的一个最大公因式．

19．用M记一切形状如下的数域P上的多项式全体：

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)$$

其中$f(x)$与$g(x)$是取定的两个多项式，$u(x)$，$v(x)$可任取．试证：若 $d(x)$为 M 中次数最低的多项式，则

$$d(x)=(f(x),\ g(x))$$

20．证明：如果$f(x)$，$g(x)$不全为零，且

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),\ g(x))$$

则 $(u(x),\ g(x))=1$

21．$f(x)$，$g(x)$互质的充分必要条件是对任意多项式$\varphi(x)$，都有 $h(x)$，$k(x)$使

$$h(x)f(x)+k(x)g(x)=\varphi(x)$$

22．证明：若$(f(x),\ g(x))=1$，则$(f(x^m),\ g(x^m))=1$

23．若 $h(x)|f(x)g(x)$，且$(f(x),\ h(x))=1$则

$$h(x)|g(x)$$

24．若$f(x)|h(x)$，$g(x)|h(x)$且$(f(x),g(x))=1$则$f(x)g(x)|h(x)$

25．证明：若$(f(x),\ g(x))=1$，$(f(x),\ h(x))=1$则$(f(x),\ g(x)h(x))=1$

26．若 $f_1(x)$，$f_2(x)$，…$f_n(x)$的每一个均与$g_1(x)$，$g_2(x)$，…$g_m(x)$的每一个互质，则

$$(f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x),\ g_1(x)g_2(x)\cdots g_m(x))=1$$

27．证明：若$(f(x)\cdot g(x))=d(x)$则

$$\left(\frac{f(x)}{d(y)},\ \frac{g(y)}{d(x)}\right)=1$$

28．证明：$(f(x)h(x),\ g(x)h(x))=(f(x),\ g(x))h(x)$

29．证明：

$$(f_1(x),\ g_1(x))\cdot(f_2(x),g_2(x))=$$
$$=(f_1(x)f_2(x),\ f_1(x)g_2(x),\ g_1(x)f_2(x),\ g_1(x)g_2(x))$$

30．证明：

$$(f(x),\ g(x))=(f(x)+g(x)u(x),\ g(x))$$

其中 $u(x)$为任意多项式．

31. 证明：若$(f(x),g(x))=1$，则

$$(f(x)h(x),\ g(x))=(h(x),\ g(x)).$$

32. 证明：$f_1(x)$，$f_2(x)$，……$f_s(x)$两两互质，且

$$f(x)=f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)$$

$$g_i(x)=\frac{f(x)}{f_i(x)}\qquad i=1,2,\cdots,\ s$$

证明：存在$h_1(x)$，$h_2(x)$，……$h_s(x)$使

$$g_1(x)h_1(x)+g_2(x)h_2(x)+\cdots+g_s(x)h_s(x)=1$$

33. 设$f_1(x)=af(x)+bg(x)$　$g_1(x)=cf(x)+dg(x)$且$ad-bc\neq 0$证明

$$(f(x),\ g(x))=(f_1(x),\ g_1(x))$$

34. 证明：只要

$$deg\frac{f(x)}{(f(x),\ g(x))}>0$$

$$deg\frac{g(x)}{(f(x),\ g(x))}>0$$

就可以选择适当的$u(x)$，$v(x)$适合等式

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),\ g(x))$$

使

$$deg u(x)<deg\frac{g(x)}{(f(x),\ g(x))}$$

$$deg v(x)<deg\frac{f(x)}{(f(x),\ g(x))}$$

35. 多项式$m(x)$称为多项式$f(x)$与$g(x)$的最低公倍式，如果：

1）$f(x)|m(x)$，$g(x)|m(x)$

2）$f(x)$，$g(x)$的任一公倍式都是$m(x)$的倍式．用记号$[f(x),\ g(x)]$表示首系数为1的那个最低公倍式．

证明：如果$f(x)$，$g(x)$是不全为0的，首系数为1的多项式，那么

$$[f(x),\ g(x)]=\frac{f(x)\cdot g(x)}{(f(x),\ g(x))}$$

36. 求下列多项式的最小公倍式

(1) $f(x)=x^4-4x^3+1$；　　$g(x)=x^3-3x^2+1$；

(2) $f(x)=x^4-x-i$；　　$g(x)=x^2+1$.

§4. 多项式的因式分解

定义8：令$f(x)$是数域P上一个次数$\geqslant 1$的多项式，若$f(x)$不能表成两个次数比它低的P上多项式之积，则说$f(x)$是P上不可约的；否则，说$f(x)$是P上可约的．

定理令：若$p(x)$为不可约多项式，且$p(x)|f(x)q(x)$，则$p(x)|f(x)$或者$p(x)|q(x)$．

进而推广：若 $p(x)|f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)$ 则 $p(x)|$某一$f_i(x)$.

因式分解唯一性定理．数域P上的每一个n（$n\geqslant 1$）次多项式$f(x)$都可唯一地分解成P上不可约多项式的乘积．所谓唯一性是说，如果有两个分解式：

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x)$$

那么必有 $s=t$，并且适当排列因式的次序后有

$$p_i(x)=c_iq_i(x),\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ s,$$

其中 c_i（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ s$）是一些非零常数．

若$f(x)=a_0p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x)$其中$a_0$为$f(x)$首项系数，$p_1(x)$，$p_2(x)\cdots\cdots p_s(x)$是两两不同的首项系数为1的不可约多项式，$k_1k_2,\cdots,\ k_s$ 为正整数．这种分解式称为标准分解式．

37．设$f(x)$的标准分解式为：

$$f(x)=a_0p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x).$$

当且仅当$g(x)|f(x)$时，$g(x)$的标准分解式才是：

$$g(x)=b_0p_1^{l_1}(x)p_2^{l_2}(x)\cdots p_s^{l_s}(x),$$

其中：b_0 为$g(x)$的首项系数，$0\leqslant l_i\leqslant k_i$（$i=1,2,\cdots,s$）．

38．设：

$$f(x)=ap_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x)q_1^{r_1}(x)q_2^{r_2}(x)\cdots q_r^{r_r}(x)$$
$$g(x)=bp_1^{l_1}(x)p_2^{l_2}(x)\cdots p_s^{l_s}(x)h_1^{t_1}(x)h_2^{t_2}(x)\cdots h_t^{t_t}(x)$$

为$f(x)$，$g(x)$的标准分解式，则：

$$(f(x),\ g(x))=p_1^{m_1}(x)p_2^{m_2}(x)\cdots p_s^{m_s}(x)$$

其中 $m_i=min(k_i,\ l_i)$ $i=1,2,\cdots,s.$

39．设 $p(x)$是次数>0的数域P上的多项式，如果对P上的任意两个多项式$f(x)$，$g(x)$，若：$p(x)|f(x)g(x)$，则 $p(x)|f(x)$或者 $p(x)|g(x)$，那么 $p(x)$是P上的不可约多项式．

40．证明：若$(f(x),\ g(x))=1$则：$(f(x)g(x),\ f(x)+g(x))=1$.

41．证明：若 $f^2(x)|g^2(x)$，则 $f(x)|g(x)$.

42．证明：$(f(x),\ g(x))^m=(f^m(x),\ g^m(x))$这里$m$为正整数．

43．证明：次数>0的多项式 $f(x)$是一个不可约多项式的方幂的充分必要条件是：对任意多项式$g(x)$必有$(f(x),\ g(x))=1$或者对于某一正整数m，$f(x)|g^m(x)$.

44．证明：次数>0的多项式 $f(x)$ 是某一个不可约多项式的方幂的充分必要条件是：对任意的多项式$g(x)$，$h(x)$，由$f(x)|g(x)h(x)$可以推出：

$f(x)|g(x)$或者 $f(x)|h^m(x)$，（m为某一正整数）．

§5．重　因　式

定义9．设 $p(x)$为不可约多项式．如果 $p^k(x)|f(x)$，而$p^{k+1}(x)\nmid f(x)$，则称$p(x)$是$f(x)$的K重不可约因式

定理5．设 $p(x)$是$f(x)$的一个k（$k\geqslant 1$）重不可约因式，那么 $p(x)$是 $f(x)$的导

式 $f'(x)$的 $k-1$ 重不可约因式.

推论. 多项式$f(x)$ 没有重因式当且仅当$f(x)$与 $f'(x)$互质.

45. 判断下列多项式有无重因式，如果有，试求出重数.

1) $f(x)=x^3-x^2-x+1$;

2) $f(x)=x^5-10x^3-20x^2-15x-4$;

3) $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$;

4) $f(x)=x^6-6x^4-4x^3+9x^2+12x+4$.

46. 问 a，b 应满足什么条件，下列的有理系数多项式才能有重因式：

1) $x^3+3ax+b$;

2) $x^4+4ax+b$.

47. 设$f(x)$含 k ($k>1$) 重因式 $x-a$，证明：$g(x)=f(x)+(a-x)f'(x)$亦含 k 重因式 $x-a$. 当 $k=1$ 时，此命题对否？说明理由.

48. 实系数多项式 $f(x)$ 在实数域上无重因式的充要条件是在复数域上无重因式.

49. 证明：有理系数多项式

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\text{没有重因式.}$$

50. 证明：$n(n>0)$次多项式$f(x)$能被它的导式整除的充分必要条件是：

$$f(x)=a(x-b)^n.$$

51. 分离下列复系数多项式的重因式：

1) $f(x)=x^5-10x^3-20x^2-15x-4$

2) x^4-6x^2+8x-3;

3) $x^5-6x^4+16x^3-24x^2+20x-8$;

4) $x^7-3x^6+5x^5-7x^4+7x^3-5x^2+3x-1$;

5) $x^3+(1-i)x^2+(1-22)x-(1+i)$;

6) $x^3-(6+6\sqrt{5})x^2+(27+12\sqrt{5})x-38-17\sqrt{5}$;

§6. 多项式的根

定义10. 令$f(x)$是数域P上一个多项式，c是P中一个数，若 $x=c$时$f(x)$的值 $f(c)=0$，那么 c 叫做$f(x)$在P中的一个根或零点.

余式定理：用$x-c$除$f(x)$所得余式等于 $f(c)$.

因式定理：c是$f(x)$的根必要且只要 $x-c$ 是$f(x)$的因式.

代数基本定理：任何n ($n\geqslant 1$)次多项式$f(x)$，在复数域中至少有一个根.

定理6. n ($n\geqslant 1$)次多项式，在复数域中恰好有 n 个根. 由此可推出：

n ($n\geqslant 1$)次多项式在复数域上可分解成 n 个一次多项式之积. 其标准分解式为

$$f(x)=a(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots\cdots(x-x_s)^{k_s}$$

其中 $k_1+k_2+\cdots+k_s=n$ x_1，$x_2\cdots$，x_s 是$f(x)$的两两不同的复根.

韦达定理：设 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 为多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

的n个根，则有

$$\frac{a_1}{a_0}=-(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)$$

$$\frac{a_2}{a_0}=x_1x_2+x_1x_3+\cdots\cdots+x_{n-1}x_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{a_n}{a_0}=(-1)^nx_1x_2\cdots\cdots x_n.$$

52．用综合除法计算$f(x_0)$：

1）$f(x)=x^4-3x^3+6x^2-10x+16,\qquad x_0=4$；

2）$f(x)=3x^5-12x^3-10x^2-587x-13,\qquad x_0=5$；

3）$f(x)=x^5+(1+2i)x^4-(1+3i)x^2+7;\quad x_0=-2-i$.

53．用综合除法求商$q(x)$，余式$r(x)$：

1）$f(x)=x^4-2x^3+4x^2-6x+8,\qquad g(x)=x-1$;

2）$f(x)=2x^5-5x^3-8x,\qquad g(x)=x+3$;

3）$f(x)=x^5-4x^3+6x^2-8x+10,\qquad g(x)=2x-4$;

4）$f(x)=x^3-x^2-x,\qquad g(x)=x-1+2i$;

54．用综合除法把$f(x)$表成$x-x_0$的方幂和，即表成$c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+$ $+\cdots\cdots$形式

1）$f(x)=x^5,\qquad x_0=1$;

2）$f(x)=x^3-x+1,\qquad x_0=2$;

3）$f(x)=x^4-2x^2+3,\qquad x_0=-2$;

4）$f(x)=x^4+2ix^3-(1+i)x^2-3x+7+i,\qquad x_0=-i$;

55．求以$g(x)=(x-a)(x-b)(a\neq b)$除多项式$f(x)$所得的余式．

56．若k重根算k个根，证明任何数域P上的n次多项式$f(x)$在P中最多有n个根．

57．如果多项式$f(x)$，$g(x)$的次数都不超过n，而它们对$n+1$个不同的数c_1，c_2，……，c_{n+1}，有相同的值，即

$$f(c_i)=g(c_i),\quad i=1,2,\cdots\cdots,n+1,$$

那么$f(x)=g(x)$．

58．证明$\sin x$不能表成x的多项式

59．试决定A，B使$(x-1)^2\mid Ax^4+Bx^3+1$

60．试决定A，B使$(x-1)^2\mid Ax^{n+1}+Bx^n+1$

61．证明：要使多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

能被$(x-1)^{k+1}$整除的充分必要条件是

$$a_0+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n=0$$
$$a_1+2a_2+\cdots\cdots+na_n=0$$
$$a_1+4a_2+\cdots\cdots+n^2a_n=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_1+2^ka_2+\cdots\cdots+n^ka_n=0.$$

62. 决定 t 的值，使 $f(x)=x^3-3x^2+tx-1$ 有重根.

63. 求多项式 x^3+px+q 有重根的条件.

64. 试求多项式 x^5+ax^3+b 有不为 0 的二重根的条件.

65. 证明：$x^n+ax^{n-m}+b$ 不能有不为零的重数大于 2 的根.

66. 证明：a 是 $f(x)$ 的 k 重根的充分必要条件是

$$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(k-1)}(a)=0\text{，而 }f^{(k)}(a)\neq 0;$$

67. 举例说明断语"如果 a 是 $f'(x)$ 的 k 重根，则 a 是 $f(x)$ 的 $k+1$ 重根"是不对的.

68. 如果 a 是 $f''(x)$ 的一个 k 重根，证明 a 是 $g(x)=\dfrac{x-a}{2}[f'(x)+f'(x)]-$ $-f(x)+f(a)$ 的一个 $k+3$ 重根.

69. 证明：x^n-1 能被 x^d-1 整除的充分必要条件是 $d\mid n$.

70. 试求多项式 x^m-1 和 x^n-1 的最大公因式.

71. 试求多项式 x^m+a^m 与 x^n+a^n 的最大公因式 $d(x)$

72. 证明：$x^2+x+1\mid x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$，其中 m，n，p 为任意非负整数

73. 试决定 $x^2-x+1\mid x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ 的条件

74. 试决定 $x^4+x^2+1\mid x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ 的条件

75. 试决定 $x^2+x+1\mid x^{2m}+x^m+1$ 的条件

76. 证明：$x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots\cdots+x+1\mid x^{k\alpha_1}+x^{k\alpha_2+1}+\cdots\cdots+x^{k\alpha_n+k-1}$

77. 证明：如果 $x^2+x+1\mid f_1(x^3)+xf_2(x^3)$，那么 $x-1\mid f_1(x)$，$x-1\mid f_2(x)$

78. 若 $x-1\mid f(x^n)$，则 $x^{n-1}\mid f(x^n)$

79. 设多项式 $f(x)$ 的次数 $n\geqslant 1$，证明：若 $f(x)\mid f(x^n)$ 则 $f(x^n)$ 的根只能是 0 或单位根

80. 设多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n,\quad a_0a_n\neq 0$$

其根为 β_1，β_2，$\cdots\beta_n$，求多项式

(1) $g(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_0$

(2) $h(x)=a_0x^n+a_1bx^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}b^{n-1}x+a_nb^n$

的根，此处 $b\neq 0$

81. 求出以下列方程根的相反数为根的方程.

(1) $x^4+x^3-3x^2-2x+2=0$;

(2) $x^7-x^5-8x^2+3=0$.

82. 求出以下列方程根加 k 为根的方程

(1) $x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1=0$, $k=1$;

(2) $x^3+6x^2-3x-1=0$, $k=2$,

83. 求出以下列方程根的 k 倍为根的方程

(1) $6x^4-7x^3+8x^2-7x+2=0$, $k=6$;

(2) $3x^3-26x^2+3x-12=0$, $k=3$.

84. 求出以下列方程根的倒数为根的方程.

(1) $x^4+2x^3+6x^2-6x+1=0$;

(2) $x^6-2x^4+5x^2+7x+1$.

85. 作出以下列方程之根的平方为根之方程:

(1) $x^4-2x^3+3x^2+x-1=0$;

(2) $2x^6-3x^5+x^2+1=0$.

86. 证明：多项式 $f(x)$能被 $x+1$ 整除的充分必要条件是奇次项系数之和等于偶次项系数之和.

87. 设 a_1, a_2, ……, a_n 为 n 个不同的数，而

$$F(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_n)$$

证明:

1) $F'(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{F(x)}{x-a_i}$;

2) $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}=1$;

3) 任意多项式 $f(x)$用 $F(x)$除所得的余式为

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{f(a_i)F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}.$$

88. 设 $F(x)$同上题，b_1, b_2, ……, b_n 是任意 n 个数，显然次数$<n$ 的多项式

$$L(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_iF(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}$$

适合条件

$$L(a_i)=b_i\quad i=1,2,\cdots\cdots,n.$$

这称为拉格朗日插值公式.

利用上面的公式求:

1) 一个次数<4 的多项式 $f(x)$，使它适合

$$f(2)=3,\ f(3)=-1,\ f(4)=0,\ f(5)=2;$$

2) 一个二次多项式 $f(x)$，使它在 $x=0$，$x=\dfrac{\pi}{2}$，$x=\pi$ 处与函数 $\sin x$ 有相同的值;

3) 求一个次数尽可能低的多项式 $f(x)$，使适合

$$f(0)=1,\ f(1)=2,\ f(2)=5,\ f(3)=10.$$

89. 构造一个 n 次多项式 $f(x)$，使其对数域 P 中的 $n+1$ 个不同的数 a_1, a_2, …

$\cdots a_{n+1}$ 其值等于，b_1，b_2，……b_{n+1}，亦即

$$f(a_i)=b_i \quad i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n+1.$$

90．假定实系数多项式 $x^4-6x^3+ax^2+bx+2$ 有 4 个实根，证明至少有一个根小于 1．

§7．实系数多项式

定理 7．若实系数多项式 $f(x)$ 有一个复数根 α，那么 α 的共轭数 $\overline{\alpha}$ 也是 $f(x)$ 的根，并且 α 与 $\overline{\alpha}$ 有同一的重数．由此可知实数域上的多项式标准分解式为

$$f(x)=a_0(x-c_1)^{m_1}(x-c_2)^{m_2}\cdots\cdots(x-c_s)^{m_s}(x^2+p_1x+q_1)^{h_1}$$
$$(x^2+p_2x+q_2)^{h_2}\cdots\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{h_r}$$

其中 $c_1,c_2\cdots\cdots,c_s$；$p_1,p_2,\cdots\cdots,p_r$；$q_1,q_2,\cdots\cdots,q_r$ 为实数；$m_1,m_2,\cdots\cdots,m_s$；$h_1,h_2,\cdots\cdots,h_r$ 为正整数，$p_i^2-4q_i<0$，$(i=1,2,\cdots\cdots r)$

定理 8 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 为实系数多项式，$a_0\neq0$，令

$$A=max(|a_1|,\ |a_2|,\ \cdots\cdots,\ |a_n|),$$

那么当

$$|x|\geqslant 1+\frac{A}{|a_0|}\text{时，有}$$

$$|a_0x^n|>|a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_n|,$$

从而 $f(x)$ 的值不等于零．

定理 9 设实系数多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

中，$a_0>0$，a_k 是 $a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n$ 中第一个负系数，而 B 是一切负系数的绝对值中的最大数，那么

$$N=1+\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}$$

是 $f(x)$ 正根的一个上界．

斯图姆定理：设实系数多项式 $f(x)$ 没有重根，并且实数 a 与 $b(a<b)$ 都不是 $f(x)$ 的根，那么 $f(x)$ 在 a 与 b 之间的实根个数等于 $f(x)$ 的斯图姆组在 $x=a$ 与 $x=b$ 时的变号数的差 $v(a)-v(b)$．

笛卡儿定理：实系数多项式 $f(x)$ 正根个数（k 重根算 k 个）或为 $f(x)$ 系数组的变号数，或比系数组变号数少一个正偶数．

91．试就以下所给出的根做出最低次数的实系数多项式：

1）二重根 1，单根 2，3 及 $1+i$；

2）三重根 $2-3i$．

92．证明：奇次实系数多项式至少有一个实根．

93．证明：n 次实系数多项式实根的个数与 n 的奇偶性相同．

94．求下列多项式的根的上下界：

1）$x^4+4x^3-8x^2-10x+14$；

2）$3x^4-2x^2+x-1$.

95．证明：实系数多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

的实根的绝对值不超过：

1）$\rho+max\left|\frac{a_n}{a_0\rho^{k-1}}\right|$，$k=1,2,\cdots\cdots,n$；$\rho$为任正整数；

2）$2\ max\sqrt[k]{\left|\frac{a_k}{a_0}\right|}$，$k=1,2,\cdots\cdots,n$；

3）$\left|\frac{a_1}{a_0}\right|+max\sqrt[k-1]{\left|\frac{a_k}{a_1}\right|}$，$k=1,2,\cdots\cdots,n$.

96．证明：实系数多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_rx^{n-r}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

$a_r\neq0$，的实根绝对值不超过：

1）$1+\sqrt[r]{max\left|\frac{a_k}{a_0}\right|}$　　$k=r,\cdots\cdots,n$

2）$\rho+\sqrt[r]{max\left|\frac{a_k}{a_0\rho^{k-r}}\right|}$　$k=r,\cdots\cdots,n$　　ρ为任一正数

3）$\sqrt[r]{\left|\frac{a_r}{a_0}\right|}+max\sqrt[k-r]{\left|\frac{a_k}{a_r}\right|}$　　$k=r,\cdots\cdots,n$.

97．利用斯图姆组确定下列多项式实根的个数，并用相邻的整数把实根分离开：

1）x^3+x^2-2x-1；

2）x^3+3x-5；

3）x^4-x-1；

4）$x^4+4x^3-12x+9$.

98．若$p(x)$为实数域上的不可约多项式，$f(x)$为实数域上任意多项式，并设$f(x)$，$p(x)$在复数域上有公根α，证明

$$p(x)|f(x).$$

99．若多项式$f(x)$全部系数都是非正数，或者都是非负数，则$f(x)$无正根.

100．若 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的系数满足：$a_0a_1<0$，$a_1a_2<0$，……，$a_{n-1}a_n<0$，则$f(x)$无负根.

101．若实数a使$f(a)$，$f'(a)$，$f''(a)$，……，$f^{(n)}(a)$均为非负数或者均为非正数，则$f(x)$的实根都小于a.

102．设$f(x)$，$f_1(x)$，……，$f_m(x)$是$f(x)$的一个斯图姆组，证明在$f(x)$相邻两根之间必有$f_1(x)$的一个根.

103．利用斯图姆定理讨论实系数多项式

$$x^3+px+q$$

的根.

104. 试决定多项式

$$x^5-5ax^3+5a^2x+2b$$

的实根个数.

105. 设$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}$，证明：当$n$为奇数时，$f(x)$恰有一个实根，当$n$为偶数时，$f(x)$没有实根.

106. 设$k\geqslant 2$，a_1，a_2，……，a_k皆为正数，b_1，b_2，……，b_k为实数且至少有两个互不相同，证明：$a_1(x+b_1)^n+a_2(x+b_2)^n+\cdots\cdots+a_k(x+b_k)^n$，当$n$为偶数时无实根，当$n$为奇数时恰有一个实根.

107. 证明 $(x+1)^n+(x-1)^n-3$，当n为奇数时恰有一个实根，当n为偶数时恰有两个实根.

108. 设a，b均为实数，n为偶数，证明：$x^n+nax+b$恰有两个不同实根，或一个重根，或无实根，依

$$\triangle=(n-1)^{n-1}a^n-b^{n-1}$$

为正，零或负而定.

109. 如何用笛卡尔定理来估计负根的个数？

110. 用笛卡尔定理决定下列多项式实根的个数：

1) $x^6+x^4-x^3-2x-1$;

2) $x^4+a^2x^2+b^2x^2-c^2$，$c\neq 0$;

3) x^4-x^2+x-2;

4) $5x^4-4x^3+3x^2-2x+1$.

111. 证明：(1)设a_1，a_2为$f'(x)$的相邻实根，则$f(x)$在a_1，a_2之间恰有一个实根的充要条件是：$f(a_1)f(a_2)<0$;

(2) $f(x)$至多有一个实根大于$f'(x)$的最大实根，也至多有一个实根小于$f'(x)$的最小实根.

112. 设实系数多项式$f(x)$的根均为实数，证明

(1) $f'(x)$的根均为实数；

(2) 若$b_1<b_2<\cdots\cdots<b_s$为$f(x)$的所有不同的实根，则$f'(x)$在区间(b_1, b_2)，(b_2, b_3)，……，(b_{s-1}, b_s)中各恰有一实根，而且它的其余之根全是重根；

(3) $f'(x)$的重根亦必是$f(x)$的重根.

113. 设实系数n次首项系数为1的多项式$f(x)$之根均为实数；证明

1) 当$\alpha>0$时，$xf'(x)+\alpha f(x)$之根均为实数；

2) 当$\alpha<-n$时，$xf'(x)+\alpha f(x)$之根也均为实数.

114. 设a，b都是实数，证明：

1) 多项式$x^n+ax^{n-1}+a^2x^{n-2}+\cdots\cdots+a^{n-1}x+a^n$至多有1个实根（重根以一个计算），问此多项式何时无实根？何时有重根？

2) $x^n+(a+b)x^{n-1}+(a^2+ab+b^2)x^{n-2}+\cdots\cdots+(a^n+a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-1}+b^n)$至多有一个实根.

115.证明：对于任意k，$k\neq-1$，多项式

$$(x-2)(x-5)(x-7)(x-9)+k(x-3)(x-6)(x-8)(x-10)$$

有四个互异实根．把这些实根分离开来．

116.证明n次多项式之n个根皆为实单根充要条件是它的斯图姆组由$n+1$个首项系数皆同号的多项式所组成．

§8. 有理系数多项式

定理10 设$f(x)$为任意一整系数多项式，那么$f(x)$在有理数域上可约当且仅当$f(x)$在整数环上可约．

Eisenstein 判别法：设$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}+a_n$，是一个整系数多项式．若能找到一个质数$p$，使

1）$p\nmid a_0$

2）$p\mid a_1$，$a_2,\cdots\cdots a_n$

3）$p\nmid a_n^2$

则多项式$f(x)$在有理数域上不可约．

定理11若有理数$\frac{r}{s}\neq 0$，$(s,r)=1$，是整系数多项式$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，$a_0a_n\neq 0$的根，那么$r\mid a_n$，$s\mid a_0$．

117.判断下列多项式在有理数域上是否可约？

1）x^2+1；　　2）x^4+1；

3）x^6+x^3+1；　　4）$x^4-8x^3+12x^2+2$；

5）x^p+px+1，p为质数；　　6）$x^4+4kx+1$，k为整数．

118.证明：x^n-p在有理数域上不可约，其中p为质数，n为自然数．

119.设p_1，p_2，……，p_r是r个互不相同的质数，n是大于1的整数，证明$\sqrt[n]{p_1p_2\cdots\cdots p_r}$是一个无理数．

120.证明：$f(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots\cdots+x+1$在有理数域上不可约，其中$p$为质数．

121.证明：如果既约分数$\frac{p}{q}$是整系数多项式$f(x)$的根，

则$q-p\mid f(1)$，$q+p\mid f(-1)$，$qm+p\mid f(m)$，m为任意整数．

122.设$f(x)$是一个整系数多项式，证明：如果$f(0)$，$f(1)$都是奇数，则$f(x)$不能有整数根．

123.设a（$a\neq 1$）为整系数多项式$f(x)$的整数根，证明：$\frac{f(1)}{a-1}$与$\frac{f(-1)}{a+1}$均为整数．

124.求下列多项式的有理根：

1）$x_3-6x^2+15x-14$；

2）$4x^3-7x^2-5x-1$；