

高等学校试用教材

机械系统动力学

合肥工业大学 徐业宜 主编

GAO DENG XUE
XIAO JIAO CAI

机械工业出版社

3

前 言

本书是根据1987年11月全国高等工业学校机械设计及制造专业教学指导委员会所制定的教学计划和1988年3月所审定的课程大纲编写的。

我国机械工业的综合水平尚落后于世界先进水平，其原因之一是设计水平的落后，机械设计多数处于类比设计和静态设计阶段。但是随着现代化技术的发展，工农业各部门迫切需要大量新的高速、高效、高精度、重载、大功率和高度自动化的机械，这样的产品才能在市场上具有竞争能力。如果要实现这些目标，其中首要任务必须进行动态设计。即设计机械时要考虑在动态条件下对机械系统做更精确的计算，然后才能对系统进行综合和设计，所以目前一些先进国家都把机械系统动力学作为必修课。

1989年11月在青岛召开的专业教学指导委员会第三次工作会议上，重新修订了教学计划，确定机械振动的内容包括在本书内，而不再单独开设机械振动。要求将机械振动和机械动力学有机地结合起来。在力求讲清基本概念及基本原理的前提下，注意结合工程实际，分析常见的轴、连杆机构、凸轮机构和齿轮机构的动力学问题。并从计算机仿真角度介绍动力学模型的建立及数字仿真技术和若干实用程序。编写时力求简明扼要地阐述机械系统动力学的基本原理和分析方法。本书主要内容为刚性构件组成的单自由度、二自由度机械系统动力学，单自由度、二自由度、多自由度系统机械振动，机械系统弹性动力学基础，含有弹性构件的机械系统动力学和机械系统动力学的数字仿真。

本书可作为机械设计及制造专业试用教材，亦可作为机械工程类本科、夜大、函授大学相关课程教材。并可供有关专业教师、研究生和从事机械振动及机械动态设计科技人员作参考。总学时计划60学时，若讲授40学时可删去第六、七章，亦可以作为30学时的机械振动的教材；即第一章、四章、五章的内容。

参加本书编写的有：西北工业大学何大为（第五、六章），哈尔滨科技大学杨兰生（第七章），河海大学周学正（第三章），合肥工业大学徐业宜（第一、四章），刘钊（第二章）。由徐业宜主编，在整理和抄写过程中得到设计教研室刘钊和研究生陈云飞、孙凌玉等协助。

本书于1989年5月在黄山召开的审稿会上审定通过。承陕西机械学院曹惟庆教授、山东轻工学院刘思汉教授主审，还得到了镇江船舶学院叶祖荫教授、西北工业大学沈允文教授审阅，审稿的同志对本书提出许多宝贵意见，对此我们表示衷心的感谢。

编 者

1990年2月

目 录

第一章 绪论	1	§ 4-2 单自由度系统的振动	60
§ 1-1 系统、机械系统	1	§ 4-3 二自由度系统的振动	75
§ 1-2 离散系统和连续系统	1	§ 4-4 多自由度系统的振动	82
§ 1-3 线性系统和非线性系统	4	第五章 机械系统弹性动力学基础	
§ 1-4 确定性、随机性与模糊性	5	及其应用	98
§ 1-5 机械系统动力学的任务	6	§ 5-1 弹性体振动	98
§ 1-6 机械动态特性分析的迫切性	7	§ 5-2 传递矩阵法与轴的振动分析	102
§ 1-7 结束语	8	§ 5-3 动力学问题的有限元法	114
第二章 刚性构件组成的单自由度		第六章 有弹性构件的机械系统动	
机械系统动力学	10	力学	124
§ 2-1 引言	10	§ 6-1 挠性转子的平衡	124
§ 2-2 驱动力和工作阻力	10	§ 6-2 平面连杆机构的动力学分析	127
§ 2-3 单自由度机械的等效力学模型	12	§ 6-3 凸轮机构的振动	135
§ 2-4 运动方程的求解方法	20	§ 6-4 齿轮机构的振动	138
§ 2-5 飞轮转动惯量的计算	27	第七章 机械系统的动力学数字仿	
第三章 刚性构件组成的二自由度		真	145
机械系统动力学	35	§ 7-1 引言	145
§ 3-1 引言	35	§ 7-2 机械系统及其模拟仿真	145
§ 3-2 自由度与广义坐标	35	§ 7-3 机械系统动力学模型的建立	148
§ 3-3 虚位移原理与广义力	36	§ 7-4 数字仿真算法及选择	149
§ 3-4 拉格朗日方程	40	§ 7-5 数字仿真模型的建立及运行	
§ 3-5 二自由度机械系统动力学方程	43	举例	158
§ 3-6 二自由度机械手动力学问题	55	§ 7-6 微机上通用的数字仿真程序	174
第四章 机械振动基础	60	§ 7-7 机械系统的图形运动仿真	187
§ 4-1 引言	60	参考文献	193

第一章 绪 论

§ 1-1 系统、机械系统

现代的工程问题不仅要对系统进行动态特性的分析，而且还需要对系统进行综合，即将所要研究和处理的对象当作一个系统，看其中元素和元素之间的关联，并从整体的角度来协调好这种关联，使这个系统在我们所要求的某种性能指标下达到最佳状态，这正是系统论的基本思想。从系统论的观点看，系统是一些元素的组合，这些组合在一起的元素通过相互作用共同完成给定的任务。系统的概念不仅适用于物理系统，而且可以推广到任何动态现象，包括自然系统（例如太阳系统、生态系统）和人工系统（例如经济系统、交通运输系统、商业系统）等。

在系统分析中，常采用“系统”和“信号”等概念来描述工程问题。系统是指构成机器或研究过程的实际硬件；而信号则是在系统间的连接通道中“流动”的物理变量。当把系统看作是相互连接的元件的总体时，显然每一个元件都有一个或几个其它元件流入的信号，并有一个或几个由它流向其它元件的信号。前者称为输入，而后者称为输出。当研究一个系统时，总是将其在一定输入条件下具有什么输出（即响应）相联系，亦就是要研究动态系统。

本书所要研究的是由机械元件组成的机械系统。它常与电气系统、液压系统相结合组成某一技术装备。除机械设备外，即使一些电气设备及其它装置的执行机构，亦常是由机械系统组成的。因此，研究机械系统动力学具有极其重要的意义。

分析任何一种动态系统，都应首先建立它的数学模型，建立一个合理的数学模型是分析过程的关键。机械系统的数学模型是指对机械系统动态特性的数学描述，通常机械系统的数学模型是用微分方程来描述的。机械系统的数学模型通常可分为离散系统和连续系统两大类；也可以根据描述系统的微分方程是否为线性的，分为线性系统和非线性系统；有时也根据其数学模型的确定性、随机性和模糊性进行分类。

§ 1-2 离散系统和连续系统

机械系统动力学是借助于模型进行研究的。模型是将实际事物抽象化而得到的。例如质点、刚体、梁、板、壳、弹簧—质量系统等等都是抽象化的模型。抽象化的方法并不是脱离实际，而是为了抓住事物的主要因素，忽略次要因素，在一定的条件下更能深刻地反映客观实际。

任何机器、结构或它们的零部件都具有弹性与质量。若机械各构件的弹性变形很小，以致可以忽略不计，则可近似认为系统是由刚体构件组成的；当构件的弹性变形不能忽略时，则机械系统的动力学模型可分为离散系统（或称集中参数系统）和连续系统（或称分布参数系统）两大类。

离散系统是由集中参数元件组成的，基本的集中参数有三种，即质量、弹簧与阻尼器。

例如图1-1a所示的安装在混凝土基础上的精密机器，为了隔振，在基础下面一般装有弹性衬垫。在隔振分析中需要考察机器与基础的整体振动，这时机器与基础可视为一个刚体起着质量的作用具有惯性，弹性衬垫起着弹簧的作用，衬垫的内摩擦以及基础与周围约束之间的摩擦起着阻尼的作用。因而这一系统可以简化成图1-1b所示的集中参数系统。离散系统的运动在数学上用常微分方程来描述。

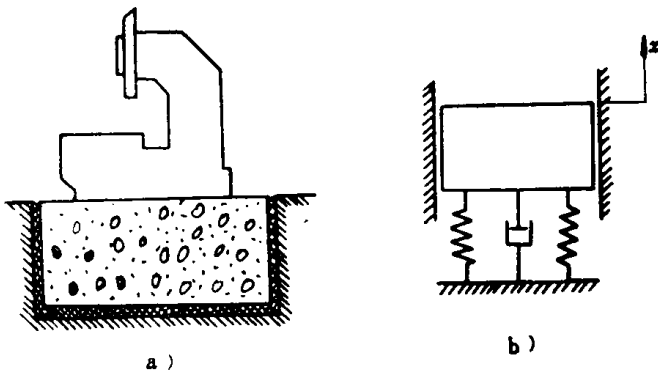


图 1-1 单自由度实例与集中参数系统

连续系统是由弹性元件组成的。典型的弹性元件有杆、梁、轴、板、壳等。弹性体的惯性、弹性和阻尼实际上是连续分布的，亦称为分布参数系统，连续系统的运动在数学上用偏微分方程来描述。机械系统中有不少问题需要简化为连续系统的模型。例如，涡轮盘简化为变厚度的圆板、涡轮叶片简化为变截面的梁或壳等等。

离散系统和连续系统形式上代表不同类型的系统，似乎它们具有不同的动态特性，但实际上恰恰相反，因为离散系统和连续系统只不过是表示同一物理系统的两个数学模型而已，由此推测它们应具有类似的动力学性态。尽管这两种系统分别是由常微分方程和偏微分方程来描述的，但它们的性态实际上是相似的。为了论证这一点，我们将从杆的纵向振动微分方程的导出来说明它们之间的内在联系。

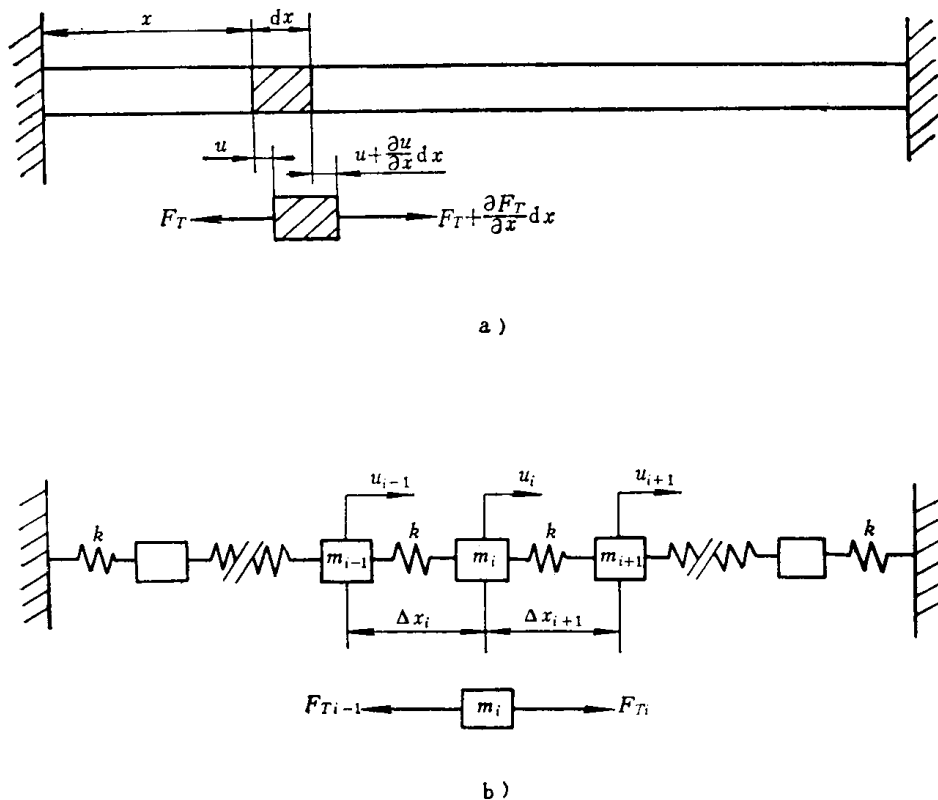


图 1-2 连续系统与离散系统

现在我们讨论如图1-2a所示的两端固定的杆纵向振动方程。取杆的纵向作为 x 轴，各个截面的纵向位移表示为 $u(x, t)$ ，见图1-2a。杆的微元 dx 在自由振动中的受力图也在图1-2a中给出。设杆单位体积的质量为 ρ 、杆长为 l 、截面面积为 A 、材料的弹性模量为 E 、杆在 x 截面处的纵向应变为 $\varepsilon(x)$ 、纵向张力为 $F_T(x)$ 。由材料力学可知，在 x 截面处有

$$\varepsilon(x) = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$F_T(x) = AE\varepsilon = AE \frac{\partial u}{\partial x}$$

而在 $x + dx$ 截面处的张力则为

$$F_T + \frac{\partial F_T}{\partial x} dx = AE \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right)$$

杆的微元 dx 的运动微分方程为

$$\rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = AE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

令 $c^2 = E/\rho$ ，则上式可化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1-1)$$

式 (1-1) 称为波动方程。杆的纵向振动除要满足上述波动方程外，还必须满足下列边界条件

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (1-2)$$

方程式 (1-1) 和 (1-2) 即为用连续系统模型导出的杆的纵向振动偏微分方程。在第五章中将说明它们构成了所谓的边值问题，其解法亦将在那里进行讨论。

以下，我们将改用离散系统模型来研究上述问题，并指出当离散系统模型取极限时，它将趋近于上述连续系统模型。首先将系统简化为图1-2b所示的由无质量弹簧和集中质量 m_i

($i = 1, 2, \dots, n$) 组成的系统。为了导出有代表性的质量 m_i 的运动微分方程，可研究图1-2b中的三个相邻质量 m_{i-1} 、 m_i 和 m_{i+1} 。连结 m_i 和 m_{i-1} 及 m_i 和 m_{i+1} 的线段中的张力分别用 $F_{T_{i-1}}$ 及 F_{T_i} 表示，这二线段分别为 Δx_{i-1} 和 Δx_i 。由牛顿第二定律，质量 m_i 在水平方向的运动方程为

$$k(u_{i+1} - u_i) - k(u_i - u_{i-1}) = m_i \frac{d^2 u_i}{dt^2} \quad (1-3)$$

方程式 (1-3) 适用于任一质量 m_i ($i = 2, 3, \dots, n-1$)，也可用于 $i = 1$ 和 $i = n$ ，但必须附加一些规定以反映系统的支承形式，因为方程式 (1-3) 对 $i = 1$ 和 $i = n$ 分别包含位移 u_0 和 u_{n+1} ，如果杆两端固支，方程式 (1-3) 中必须令

$$u_0(t) = u_{n+1} = 0$$

为了得到离散系统和连续系统的相似性，我们有必要对方程式 (1-3) 作进一步讨论。为此引出如下符号

$$u_{i+1} - u_i = \Delta u_i, \quad u_i - u_{i-1} = \Delta u_{i-1}$$

$$k = \frac{AE}{\Delta x_i}$$

$$m_i = \rho A \Delta x_i$$

则方程式 (1-3) 可化为

$$AE \frac{\Delta u_i}{\Delta x_i} - AE \frac{\Delta u_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} = \rho A \Delta x_i \frac{d^2 u_i}{dt^2} \quad (1-4)$$

注意到方程式 (1-4) 左边的两项实际上是质量 m_i 左边和右边之间水平力的增量, 据此, 可将方程式 (1-4) 写成

$$AE \Delta \left(\frac{\Delta u_i}{\Delta x_i} \right) = \rho A \Delta x_i \frac{d^2 u_i}{dt^2} \quad (1-5)$$

将方程式 (1-5) 两边除以 Δx_i 得

$$\frac{\Delta}{\Delta x_i} \left(\frac{\Delta u_i}{\Delta x_i} \right) = \frac{\rho}{E} \frac{d^2 u_i}{dt^2} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-6)$$

如果在式 (1-6) 中令质量 m_i 的数 n 无限增多, 而把它们的质量 m_i 以及 m_i 之间的距离相应地减小, 并用连续变量 x 代替下标的位置, 这样在取极限时, $\Delta x_i \rightarrow 0$, 式 (1-6) 成为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

上述结果与连续系统的运动方程式 (1-1) 是一致的, 虽然图 1-2a 与图 1-2b 的外形不一样, 但它们的数学模型却密切相关。

以上完成了从图 1-2b 所示离散系统到图 1-2a 连续系统的过渡, 通过一个极限过程, 相当于把质量扩展分布到整个杆。可见这两种数学模型虽然在形式上是极不相同的, 但它们之间却存在着本质上的内在联系。这说明了无论数学模型如何选取, 许多复杂的连续系统总可以离散化进行近似计算。例如, 可以预料有限单元法中的数学模型与传递矩阵法中的数学模型, 将有相似的动力学特性。

在工程实际应用中, 许多连续系统的问题, 不可能求出封闭形式的精确解, 只能求出近似解, 例如对非均匀杆等复杂结构, 总是把连续系统离散化, 然后再集中为离散系统进行计算。

类似的, 对于弦振动和轴的扭振等问题, 它们的连续系统的数学模型也可以由相应的离散模型导出。

§ 1-3 线性系统和非线性系统

如果一个系统的数学模型可以用线性微分方程来描述, 则该系统称为线性系统。当机械系统的质量不随运动学参数 (如坐标、速度和加速度等) 而变化, 并且系统的弹性力与阻尼力都可以简化为线性模型时, 则该系统通常为线性系统。在实际情况下, 严格的线性系统是不存在的。但在许多情况下, 只要位移不大, 按照线性弹簧与线性阻尼的假设所得到的结论具有足够的准确性, 有很好的实用价值。

凡是不能简化为线性系统的动力学系统都称为非线性系统。非线性系统的数学模型是由非线性微分方程来表示的。

线性系统的重要特征是能够应用叠加原理。叠加原理指出: 对于同时作用于系统的两个不同的输入 (或称激励函数), 所产生的输出 (或称响应) 是这两个输入单独作用产生的响

应之和。显然，当多于两个输入作用于系统时，其响应的叠加性质同样是成立的。与叠加原理等价的结论是线性微分方程的复杂解可分解为简单解之和。可以根据叠加原理是否成立来判断一个系统是否为线性系统。如果通过试验可以验证一个动态系统的响应与输入是正比的，则可以推断该系统是一个线性系统。

虽然对于许多实际系统都可以简化为线性系统来处理，但是这样的简化必须受到一定的限制，例如弹性变形只有在一定的范围内才具有线性特性。当系统的运动超出了假设的范围，就有可能破坏其线性特性。例如，对于大家所熟悉的由摆长 l 和质量 m 组成的平面单摆，其运动方程为

$$ml^2\ddot{x} + mgl \sin x = 0 \quad (1-7)$$

式中 x ——单摆的角位移。

当 $|x|$ 很小时，可用 x 代替 $\sin x$ ，这样式(1-7)简化为

$$ml^2\ddot{x} + mglx = 0 \quad (1-8)$$

这是一个我们所熟悉的二阶线性方程，其解的周期为 $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ ，即周期不依赖于初始位移和初始速度，系统的运动具有等时性。在大位移的场合，上述结论是不正确的，因为方程式(1-8)对于大位移是不精确的。如果用 $\sin x$ 幂级数的前两项代替 $\sin x$ ，则在 $|x| \leq 1\text{rad}$ 时仍然是相当精确的。在此假设下，方程式(1-7)可简化为

$$ml^2\ddot{x} + mgl\left(x - \frac{x^3}{6}\right) = 0$$

这是一个非线性方程。根据非线性方程理论，系统已不具有运动等时性。

在非线性的系统中，叠加原理已不再适用。求解非线性系统的问题大多都是十分复杂的，通常不可能求出它的封闭解。因此，在实用中总是尽量地将非线性系统在给定条件附近线性化，近似地用线性数学模型来代替。这样，许多只适用于线性系统的方法都可以应用。

§ 1-4 确定性、随机性与模糊性

一个实际的动力学系统，在外界激励（即输入）作用下，会呈现一定的动力学响应（即输出）。输入、输出与振动系统之间的关系可用图1-3所示的框图来表示。

系统的激励可通常分为确定性的和随机性的两大类。如果外部激励可以用确定的时间函数来描述，则称该激励是确定性的。例如脉冲函数、阶跃函数、周期函数、谐和函数等都是典型的确定性函数。如果一个系统的惯性、弹性与阻尼以及激励都是确定性的，则系统的运动可以用确定性的微分方程来描述，如果其初始状态亦是确定性的，那么就可以由初始运动求出用时间函数表示的系统响应函数。这种由系统在某一时刻的状态（称为初始条件）就可以确定其以后任一时刻的状态的现象称为确定性现象。

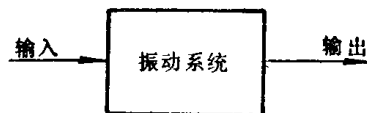


图 1-3 输出、输入与振动系统之间的关系

随机激励则与确定性激励相反，它们不能用时间的确定函数来描述，而只具有一定的统计规律性，必须用随机过程来描述，与其对应的系统运动方程为随机微分方程。随机微分方

程不再存在确定的时间函数解，只能研究其所谓“几乎所有”的解。在求解时，并不逐个地考察解过程的样本函数，而是从概率等于1的总体上去研究随机微分方程的解。求解随机微分方程的“几乎所有”的解时，要涉及到随机过程的较多的概率特性和样本函数的性质，因此在实用中通常只求其较弱的解，即均方解。可以说，随机系统动力学的基础理论都是建立在随机微分方程均方解的基础上的。

目前，机械系统和结构系统设计的发展趋势是不断地从确定性设计方法过渡到概率设计方法，如可靠程度指标法和直接的可靠性法等，这是人们认识和研究不断深入的结果。最近，在机械系统和结构系统的设计中又提出了模糊优化设计。人类在认识世界的过程中，从模糊发展到精确，从心中无数到心中有数，这是一个飞跃。而今为了分析和处理模糊现象，又突破了精确数学的框架，产生了模糊数学。从模糊到精确，又从精确到模糊，这不是倒退，而是螺旋式的上升。如果一个系统的激励是模糊的，则它应该用模糊过程来描述，对应的运动方程就成为模糊微分方程了。关于模糊过程的定义、性质、构造与描述方法，以及模糊微分方程的解法等问题，目前还没有得到完全解决，有待于今后的进一步发展。

§ 1-5 机械系统动力学的任务

整个国民经济的技术水平和现代化程度依赖于机械工业的技术水平和现代化程度，机械工业在向未来迈步的战略规划中占据着极其重要的超前发展位置。发达国家的工业化过程和发展中国家的掘起都证明了这一点。我国要在未来若干年后达到国际上中等发达国家的水平，必须振兴能够标志我国现代化水平的机械工业，而做到这一点的关键是能否设计和制造出具有竞争能力的产品。1986年，美国ASME出版的《机械工程》杂志登载了一篇题为“设计理论和方法学——一门新兴学科”的文章，作者是ASME副主席A.Seireg等7位知名学者。文章认为：美国尽管在一些尖端技术行业中领先于世界各国，但机械产品在国际市场的竞争则处于不利的形势；相反，联邦德国、日本则善于结合自己的情况与发展需要，大力开展现代设计方法的研究和应用，从而使工业产品的竞争能力处于国际上领先地位。随着现代化技术的发展，工、农业各部门都迫切需要大量新的高速、高效、高精度、重载、大功率和高度自动化的机械，而我国机械工业的综合水平却落后于世界先进水平20~25年，其中关键的是设计水平的落后。要改变我国目前还处于以类比设计和静态设计为主的现状，急需建立一个能够指导设计过程的统一原则和方法体系的基础，其中首要的任务是必须由静态设计走向动态设计，对动态条件下工作系统的动力学作更精确的计算。

静态设计是指在设计机械和结构时，常常只考虑到静载荷和静特性，待产品试制出来后再做动载荷和动特性的测试，发现有不合要求的，采用局部补救的措施，这种设计路线也可称为静态设计、动态校核补救。这种方法虽然有时也能进行某些动力学特性的补救，但却是少慢差费，而且一些涉及全局的重大动力学问题往往是无法补救的，从而有可能造成重大的损失。例如某电厂发生的重大设备事故，发电机组在运行过程中突然损坏而被迫停止运行。因此，对于一些由动力学特性决定命运的工程项目，必须在设计、实施、管理阶段采取综合性的工程措施。这种全过程和全局处理动力学的思想，就是动态设计的基本思想和基本技术路线。

动态校核补救的主要办法是避开临界转速和调动平衡，这种静态设计、动态校核补救的

技术路线，对转速不十分高的机械有时是适用的。但随着机械运动速度的不断提高和柔性转子的出现，这种静态设计的方法已愈来愈不能适应，人们不得不应用动态设计的思想而采用全过程的综合性措施，即不仅在产品的设计制造和安装过程中要全面保证产品的动态特性，而且在使用过程中也需要随时进行监测，发现事故苗头要及时检修，避免发生事故。

加工机械的动态特性与加工质量有密切关系。交通运输工具和家用机械等，如果振动和噪声过大，就有被挤出市场的危险。可以说动态特性是这些产品的重要性能指标。

振动在大多数情况下是有害的，但有时也可以被利用。在一些工艺过程中，振动起着特有的良好作用；在振动机械中，产生预定的振动则是它们的主要功能。对于这类产品已不可能应用静态设计、动态校核补救的技术路线了。

机械的动态设计必然要涉及到机械动力学。机械动力学的主要设计原则是在满足对设计对象所提出的要求和工作时具备安全可靠的性能的前提下，使所花费的设计、制造费用最低。但是，通常机械产品并非仅仅是一个纯机械系统，而往往同时包括电气传动、液压传动、气动系统以及控制系统等装置。因此，仅从机械动力学的观点来分析机械产品是不够的，必须从系统的观点来研究和分析机械产品。

整机是由零部件和机构组合而成的。所以，零部件的动强度和机构的运动弹性动力学的分析与综合，是机械动态设计中的两个基本类型的问题。假如要对动态条件下工作的零部件和机构动力学作出精确的计算，则必须从系统的观点来研究整机的动态特性。其中关于机械主传动系统动力学，特别是有关振动的分析和综合是关键问题。总之，机械系统动力学的主要任务是研究机械主传动系统的振动、机械结构动强度和机构动力学分析。

§ 1-6 机械动态特性分析的迫切性

随着电子计算机的发展，仅仅是进行计算工作的CAD时代已经过去，更高级的CAD时代已经到来。先进的企业将CAD与有限元法结合起来，称为FEM、CAD一体化，进一步又提出了计算机辅助工程学（CAE）的概念，这意味着CAD、CAM和实验工作组成一体化的综合系统。机械振动分析在CAD/CAM的流程中，不仅已成为结构分析和产品检查与诊断的重要内容之一，而且仍在不断地明显增加，其主要原因如下：

1) 机械运动的形式不外是回转运动和往复运动，这种重复运动的本身就构成了振动。因此可以说，机械从它诞生的同时就伴随着振动。为了防止能量的散失，机械必然向具有小阻尼衰减的方向发展，于是振动问题成为一个普遍存在的重要课题。因此，许多企业把重大、深刻的振动问题列为企业进步的重要内容予以重视。

2) 机械产品不断向高性能、轻量化以及低成本方向发展。虽然这三者之间是相互矛盾的，但它们对于振动的增大是共同的。如在比较狭小的空间内进行大能量转换，则可导致构件的轻型、薄壁化，从而使其振动刚度减小。对于整机影响显著的减振、隔音措施，多系出于改善环境、减小振动和降低噪声的目的，但这将增加产品的成本和体积。

3) 有限元计算方法的普及，计算机程序通用化的广泛发展，使机械产品的静态性能分析问题已近于解决，目前急待解决的问题是机械动态性能分析。

4) 近年来，国际上对机器的安全性和舒适性予以极大的重视。过去对机器的要求主要是工作性能，而目前则已将机器的安全性放到了绝对优先考虑的位置。利用振动信息可以预测

构件的疲劳破坏或其它故障，例如在机器的关键部位设置振动监测装置，以保证机器安全地运行。此外，舒适性已成为机械产品的重要性能指标，使人不舒服的振动和噪声必须给以足够的重视。

5) 由于产品开发和设计的周期大大缩短，使静态设计、动态校核补救的技术路线已不再适应，要求按边生产、边试验、边改进的模式进行。这就要求在设计阶段，就能够对机器实际运转时的问题进行预测，对所有可能产生的振动问题采取必要的措施。

§ 1-7 结 束 语

机械系统动力学的发展、本书涉及的范围、内容和安排简述如下：

1) 目前，一个产品的竞争能力与其开发、设计和改进周期的长短有密切的关系，因此在进行动态设计时需要具备一种通用的计算机程序。这种计算机程序应具有以下功能：只要用户输入具体系统的各种参数，就能将其动力学方程自动编排出来，并由相应的计算程序进行分析计算。看来这样的通用程序在CAD/CAM中也是必须增加的，否则工厂的技术条件和技术人员很难应付各式各样机型的要求，使设计工作量大幅度地增加，从而延长了设计周期。

2) 将机械系统动力学和优化设计结合起来面向机械产品中新机器和新结构的设计、用控制论的观点进行动力学分析等可以改进机械系统的动态特性，并提出较先进的设计理论和方法。

3) 机构、车辆、机器人等机械系统的动力学特征是为大位移的非线性运动。这些问题如用多刚体系统动力学方法处理则既准确又简捷。

4) 本书未涉及到实验这个非常重要的问题，所以没有介绍试验建模等方法。目前，国外一些企业应用计算机辅助振动分析的显著特点是将振动的理论计算与实验分析紧密结合起来，形成所谓实验计算一体化。

5) 本书是针对我国四年制本科机械设计与制造类专业编写的机械系统动力学的基础教材。受学时、篇幅的限制，只能讲述一些成熟的方法，未能介绍目前本学科的一些前沿内容。本书也未能介绍机械系统控制分析方面的内容，这些内容将在机械工程控制基础课程中讲述。按照现行学制的教学计划，另外单独安排机械振动课程已有困难，为此本书包括了机械振动课程的基本内容，简明扼要地介绍了机械振动的基础知识。

6) 本书的编排大体是：第二章和第三章讨论由刚性构件组成的机械系统动力学，其中第二章着重介绍单自由度机械系统的等效力学模型及其运动方程的建立和求解，第三章介绍拉格朗日方程及其在二自由度系统中的应用；第四章简明扼要地介绍机械振动的基础知识，其中单自由度部分在理论力学基础上着重介绍了其在工程中的应用。在二自由度系统的内容中比较详细地讨论了自由振动，而强迫振动主要是结合动力吸振器讲述其特点，在多自由度内容中重点讨论了特征值、特征向量和运动方程的解耦问题；第五章叙述了机械系统弹性动力学的一些基础知识，简要地介绍连续系统动力学的特点和精确求解的困难，指出了近似解法的必要性，本章比较详细地讨论了有限元法和传递矩阵法，重点是有限元法在平面连杆机构弹性动力学中的应用；第六章讲述了含有弹性构件的轴、凸轮、齿轮等系统的动力学问题，考虑到本科生的接受能力，这里只能作些概论性的叙述，以便为机械系统动态设计提供必需的入门基础知识；第七章介绍机械系统动力学的数字仿真技术，随着机械系统复杂程度的提

高，计算系统响应变得越来越费时间，对于非线性或时变系统，则是无法用解析方法求出其精确解的，而数字仿真技术已成为有力的工具，应用仿真技术可以在一个系统的设计阶段就预见到其未来运行的近似结果和验证设计理论的正确性，据此本章讨论了机械系统动力学仿真模型的建立过程、以及数值积分算法的选择、仿真程序的设计等最一般的方法，为进一步学习系统仿真实论并应用于机械系统设计提供了入门的基础知识。

第二章 刚性构件组成的单自由度机械系统动力学

§ 2-1 引言

机械系统动力学研究的主要问题是力的作用下机械的运动。本章和第三章首先研究忽略构件弹性变形的理想机械系统的动力学问题。即在研究时，近似认为组成这类理想机械系统的构件都是刚体，并忽略运动副中间隙的影响，运动副中的摩擦在通常情况也是被忽略的。作出上述简化的目的是为了能够忽略一些次要因素，以突出问题的主要方面。当机械中各构件的刚度较大且运转速度不是很高时，作出这些简化是合理的，所得到的结果有很好的实用价值。

本章将研究单自由度机械系统的动力学问题。目前单自由度机械应用最为广泛，然而由于各种自动机和机器人的出现，刚性构件组成的多自由度机械系统动力学的研究也变得越来越重要，所以在下一章还要进一步研究二自由度机械系统动力学问题。考虑构件弹性变形时的动力学问题将在第五、六章中研究。

本章主要介绍用等效力学模型进行研究的方法，该方法适用于单自由度系统的研究，目前在工程上被广泛应用。在研究时，首先把实际机械系统简化成等效的单构件力学模型，并根据该模型列出运动方程式，然后对运动微分方程式进行求解和讨论。

§ 2-2 驱动力和工作阻力

除重力、摩擦力之外，作用在机械上的力主要还有工作阻力和驱动力，它们随着机械工作情况及使用的原动机的不同而多种多样。为了研究在力作用下机械的运动，可将作用力按机械特性进行分类。所谓机械特性是指力（或力矩）和运动学参数（位移、速度、时间等）之间的关系。本书中，所有的外力都假设为是预先已知的，即假设发动机和工作机的机械特性是预先给定的。

在工作机械中，按机械特性来分，常见的工作阻力有以下几种：

1) 工作阻力是常数。如起重机的有效工作负荷为起吊重量（为常数）；机床的制动力矩通常也可简化为常数。

2) 工作阻力随位移而变化。如往复式压缩机中活塞上作用的阻力；曲柄压力机滑块上受到的阻力等。

3) 工作阻力随速度而变化。如鼓风机、离心泵的工作阻力。

4) 工作阻力随时间而变化。如揉面机的工作阻力。

在发动机中，按其机械特性进行分类，常见的驱动力有以下几种：

1) 驱动力是常数。例如用重锤作为驱动力；在某些近似计算中，当电机转速变化很小时，有时也可近似地认为其驱动力为常数。

2) 驱动力是位移的函数。例如用弹簧作为驱动件时, 弹簧力与变形(位移)成比例。

3) 驱动力是速度的函数。例如一般的三相异步电动机, 机械特性曲线如图2-1所示。

由于三相异步电动机是目前应用最为广泛的一种发动机, 故对它的机械特性作一介绍。图2-1给出了三相异步电动机的机械特性, 其中A点具有最大输出力矩 M_k ; B点为额定工作点; C点具有最大角速度 ω_0 , 称为同步角速度; A'点为安全工作点, 为保证电动机正常工作, 不应使电动机工作点越过此点, 常取该点的输出力矩为 $0.8M_k$ 。电动机在AC段中工作时将是稳定的, 因为随着外载荷的增加, 电动机的转速将下降, 这时它的输出力矩将增加, 并与外载荷达到新的平衡。相反, 当电动机工作在A点左侧时是不稳定的。

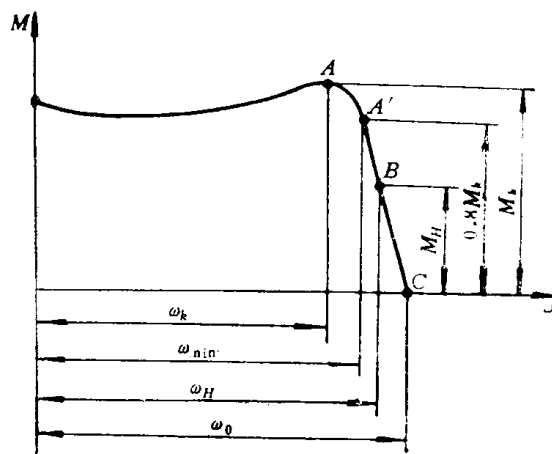


图 2-1 三相异步电动机的机械特性

电动机铭牌通常给出以下参数: 额定功率 P_H (单位为kW), 额定转速 n_H (单位为r/min), 同步转速 n_0 (单位为r/min), 过载系数 λ_1 。根据以上参数可以分别求出A、B、C三点对应的角速度 ω (单位为rad/s)和力矩 M (单位为N·m)为

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= 0 \\ M_H &= 9550 \frac{P_H}{n_H} \\ M_k &= \lambda_1 M_H \\ \omega_0 &= \frac{\pi}{30} n_0 \\ \omega_H &= \frac{\pi}{30} n_H \\ \omega_k &\approx \omega_0 - (\omega_0 - \omega_H) (\lambda_1 + \sqrt{\lambda_1^2 - 1}) \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

式(2-1)可用来计算特性曲线上A、B、C三点对应的坐标。

将三相异步电动机的输出力矩与角速度之间的函数关系用精确的解析表达式来表示是较为复杂和不方便的。为了简化, 可以用不复杂的代数式近似表示这类机械特性, 这在大多数情况下是可行的, 也是有必要的。对于三相异步电动机的机械特性, 由于通常所关心的只是其中的曲线段ABC, 故在实用中常用二次曲线近似代替真实特性曲线段ABC。即将曲线段ABC近似表示为以下的二次函数

$$M = a + b\omega + c\omega^2 \quad (2-2)$$

将特性曲线上已知的三点A、B、C的坐标代入上式, 就可求出其中的三个待定系数a、b和c, 从而得到该电动机机械特性的近似表达式(2-2)。这样获得的机械特性的近似表达式, 其中三点与所给特性曲线的三点是相重合的, 而在其它各点两曲线是分离的。在动力学的近似计算中, 这种误差是允许的。在精度要求不高的场合, 也可以用过B、C两点的直线近似代替额定点附近的曲线。

由以上分析可知，机械特性大多可表示为驱动力或工作阻力与某一运动学参数（如电动机转子角速度）的函数关系，在实际情况中这些力可能遵循着更为复杂的规律，更详细的讨论可参考电力拖动课程的有关内容。

§ 2-3 单自由度机械的等效力学模型

即使是对于单自由度机械系统，如果直接应用牛顿定律或达朗贝尔原理进行研究也是很复杂的。例如图 2-2 所示用于冲压砗钢片的高速冲槽机的六杆机构，共由 5 个运动构件组成，电动机的驱动力矩通过齿轮传动，将力矩 M_1 作用到曲柄 AB 上，而工作阻力则作用在滑块 F 上。在研究其运动情况时，若列出各运动构件的运动方程进行研究，则必须联立求解众

多的动力学微分方程式（对平面机构而言，一般每个运动构件有 3 个运动方程），显然这是十分麻烦的。

由于单自由度机构的运动只决定于一个坐标（即参数），所以只要求出其中一个构件（如主动构件）的运动规律，则整个机构的运动就确定了。因此，对于单自由度机构可以利用等效力学模型进行研究。在等效力学模型中，将被研究系统的动力学问题转化为与其等效的一个等效构件的动力学问题，这样可以使问题的研究得到简化。

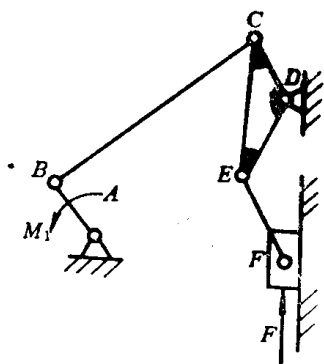


图 2-2 高速冲槽机的六杆机构

为了使所得到的等效构件和机构中的对应构件的真实运动相一致，需要将作用在机构上的所有外力与力偶用一定的方法等效地转化到等效构件上，同时把所有构件的质量等效地转化到同一构件上。这些力和质量的等效转化是依据功能原理进行的。根据功能原理，机械在任一路途中，系统动能的改变等于作用于其上所有力所做的功。因此，假如在同一时间间隔内，等效构件具有的动能改变和原机构的动能改变相同，且作用在等效构件上的等效力所做的功等于作用在原机构上所有力做的功，则等效构件的运动将与原机构中对应构件的真实运动相同。而对于等效构件的运动，则可以根据等效构件的等效质量和等效力，应用动能定理来确定。即可以通过转化前后等效构件与原系统动能相等和等效力与外力做的功相等的原则，将原有复杂的机械系统等效地转化为只有一个等效构件的等效力学模型。

为了简化，通常可取作定轴转动或直线平动的构件作为等效构件，实用中大多以主动构件为等效构件，决定等效构件位置的转角或位移可作为机构的广义坐标。如果取作直线平动的构件为等效构件，则等效后作用在等效构件上的力称为等效力，记为 F_e ；等效构件具有的质量称为等效质量，记为 m_e 。如果取作定轴转动的构件为等效构件，则等效后作用在等效构件上的力矩称为等效力矩，记为 M_e ；等效构件具有的关于转动轴的转动惯量称为等效转动惯量，记为 J_e 。

例如对于图 2-2 所示的六杆机构，可将各构件的质量与它们所受到的力转化到曲柄 AB 上，使原系统转化为图 2-3a 所示的简单系统。也可以将各构件与它们所受的力转化到滑块 F 上，使原系统转化为图 2-3b 所示的系统。

一、等效力和等效力矩

如前所述,作用在机构上的力的转化是根据功能原理进行的,即等效力或等效力矩可根据等效力或等效力矩所做的功与作用在机构上的所有外力与外力偶所做的功之和相等的原则来确定。实用中为了方便,可以用它们对应的功率相等进行计算。

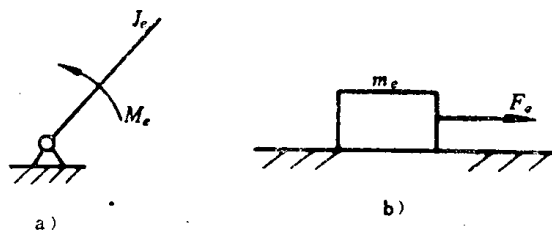


图 2-3 单自由度系统的等效力学模型

设 F_k ($k=1, 2, \dots, m$) 和 M_j ($j=1, 2, \dots, n$) 分别为作用于机械上的外力与外力偶,根据等效力矩 M_e 或等效力 F_e 的功率与原始机械的总功率 P 相等得

$$\left. \begin{aligned} M_e \omega &= \sum_{k=1}^m F_k \cdot v_k + \sum_{j=1}^n M_j \omega_j \\ F_e v &= \sum_{k=1}^m F_k \cdot v_k + \sum_{j=1}^n M_j \omega_j \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

式中 ω ——等效构件的角速度;
 v ——等效构件的速度;
 v_k ——外力 F_k 作用点的速度;
 ω_j ——外力偶 M_j 作用构件的角速度。

根据式 (2-3) 可求出 M_e 和 F_e 的表达式为

$$\left. \begin{aligned} M_e &= \sum_{k=1}^m F_k \cdot \frac{v_k}{\omega} + \sum_{j=1}^n M_j \frac{\omega_j}{\omega} = \sum_{k=1}^m F_k \frac{v_k \cos \alpha_k}{\omega} + \sum_{j=1}^n M_j \frac{\omega_j}{\omega} \\ F_e &= \sum_{k=1}^m F_k \cdot \frac{v_k}{v} + \sum_{j=1}^n M_j \frac{\omega_j}{v} = \sum_{k=1}^m F_k \frac{v_k \cos \alpha_k}{v} + \sum_{j=1}^n M_j \frac{\omega_j}{v} \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

式中 α_k —— F_k 与 v_k 的夹角。

可以用式 (2-4) 转化所有的力和力偶,也可以只转化其中的一个或几个。被转化的力可能是常数,也可能与各种参数有关。由式 (2-4) 可知, M_e 和 F_e 不仅与被转化的力有关,也与机构的传动速比有关。对于单自由度机构,传动速比可能是固定的,也可能与机构的位置有关,但无论如何传动速比不会与机构的运动速度有关。

例 2-1 如图 2-4 所示曲柄滑块机构,若将作用于滑块 C 的工作阻力 F_c 转化到曲柄 AB 上,试计算其等效力矩 M_e 。图中 s_2 为连杆的质心。

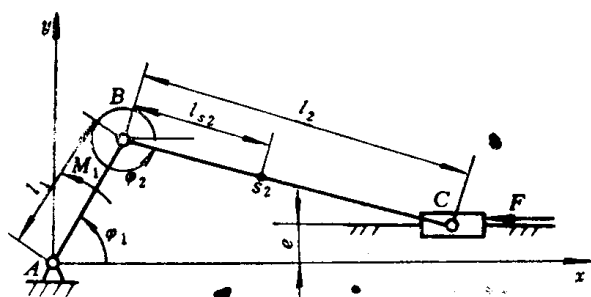


图 2-4 曲柄滑块机构

解 按式 (2-4) 有

$$M_e = F_c \frac{v_c \cos 180^\circ}{\omega_1} = -F_c \frac{v_c}{\omega_1}$$

当滑块向左运动时,上式中 v_c 应取负值。因传动速比 $\frac{v_c}{\omega_1}$ 在不同的位置上具有不同的数值,所以

即使工作阻力 F_c 为常数,其等效力矩 M_e 也是随着曲柄的运动而变化的。

二、等效质量和等效转动惯量

质量的转化是根据动能相等的原则进行的, 即应使等效构件具有的动能与机构中各构件的动能之和相等。根据上述原则, 即可计算出等效构件应具有的质量 m_e 或等效转动惯量 J_e 。

在平面机构中, 每一构件可能作平动、定轴转动或一般平面运动。在构件作一般平面运动时, 其动能 E 可按下式计算

$$E = \frac{1}{2}mv_o^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \quad (2-5)$$

式中 m ——构件质量;
 J ——构件相对于质心的转动惯量;
 v_o ——构件质心运动速度的大小;
 ω ——构件运动的角速度。

对于作平动和定轴转动的构件, 式(2-5)可以分别简化为

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \quad (2-6)$$

$$E = \frac{1}{2}J_o\omega^2 \quad (2-7)$$

式中 J_o ——构件相对于转动轴的转动惯量。

整个机构的动能等于所有构件的动能之和

$$E = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2}m_j v_{s_j}^2 + \frac{1}{2}J_j \omega_j^2 \right) \quad (2-8)$$

根据转化前后系统动能相等的原则, 等效转动惯量 J_e 或等效质量 m_e 应满足

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}J_e\omega^2 &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2}m_j v_{s_j}^2 + \frac{1}{2}J_j \omega_j^2 \right) \\ \frac{1}{2}m_e v^2 &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2}m_j v_{s_j}^2 + \frac{1}{2}J_j \omega_j^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (2-9)$$

从式(2-9)中即可求出 J_e 和 m_e 的表达式为

$$\left. \begin{aligned} J_e &= \sum_{j=1}^n \left[m_j \left(\frac{v_{s_j}}{\omega} \right)^2 + J_j \left(\frac{\omega_j}{\omega} \right)^2 \right] \\ m_e &= \sum_{j=1}^n \left[m_j \left(\frac{v_{s_j}}{v} \right)^2 + J_j \left(\frac{\omega_j}{v} \right)^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (2-10)$$

式中 ω ——等效构件的转动角速度;
 v ——等效构件的平动速度。

式(2-10)中两个等式在结构上完全一样, 因此以下只讨论其中第一个等式。首先, 等效转动惯量的值总是正的, 其值与传动速比的平方有关。仅仅在部分情况下, 即当机构的传动速比不变时, 等效转动惯量才为定值, 而一般情况下这是一个随机构位置而变化的量。然而, 等效转动惯量与机械的实际运动速度无关, 因为单自由机构的传动速比仅与其位置有