中学生自学丛书

数学问题的分析与解答

河南人民出版社

前　　言

同学们经常提出这样的问题："这道数学问题的解法是怎样想出来的？"

"想"是有一定的方法的，是有规律可遵循的，而不是盲目的想。在数学上的所谓想，就是对问题的分析．"所谓分析，就是分析事物的矛盾．"任何一个数学问题，都有"已知"和"欲知"的矛盾，"已知"就是根据，"欲知"就是目的，我们的分析就是找出把"欲知"转化为"已知"的转化途径，也就是找出解题的方法和规律．这本书就是为了帮助同学们在解答数学问题时"怎样想"——也就是为了提高同学们对数学问题的分析能力而写的．

本书分代数、三角、几何三编，共二十三章．每章分三部分，其内容如下：

一、解法简述．概括地叙述这一章的解题方法．

二、分析与解答举例．对一些问题进行了详细的分析与解答．在有些例题后面还附有思考和注意，思考是为了加深对知识的理解和应用；注意是指出容易混淆的概念和容易出错误的地方，或者是其它解题方法．

三、练习题．

由于我们的水平所限，错误之处恳望读者批评指正．

目　　录

第一编　代　　数

第二编　平　面　三　角

第三编　几　何

第一编 代 数

第一章 有理数

一、解法简述

解答有理数的问题，关键在于掌握好运算法则、运算性质和运算顺序。

有理数的加、减、乘（包括乘方）、除的运算法则中，尤其加法法则应特别注意，这是因为它的两种情况的运算，实质上恰是两种相反的方法.（1）“同号相加，符号不变，绝对值相加.”这一种运算，容易掌握，且不易出错误；（2）“异号相加，取绝对值较大的符号，较大的绝对值减去较小的绝对值.”这后一种运算，实质上是减法，在运算中，很容易出错误，因为它既需要决定结果的符号，又需要确定被减数与减数，所以要特别注意这后一种“加”法的运算. 减法法则是“改变减数的符号与被减数相加”，实际上是通过加法进行的，因此，有理数的加法是有理数减法的基础. 有理数乘（包括乘方）、除运算的关键是决定结果的符号，即“同号相乘、除得正，异号相乘、除得负.”至于绝对值的乘、除运算和算术数的运算是一样的.

有理数的运算性质和算术中的运算性质是一样的，可以使运算简单，但在应用时应具体问题具体分析，不能死记硬套.

有理数的运算顺序和算术数的运算顺序是一样的. 首先

解 $\left(-\frac{1}{2}\right)^2\times(-2)^3-\left\{-4^2\times\frac{1}{2}-\left[(-1)^8-3^4\right.\right.$

$\left.\left.\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right]\right\}-350\div(-175)$

$=\frac{1}{4}\times(-8)-\left\{-16\times\frac{1}{2}-\left[1-81\times\frac{1}{9}\right]\right\}$

$-350\div(-175)$

$=(-2)-\{(-8)-[-8]\}-(-2)$

$=(-2)-0-(-2)$

$=-2-(-2)=0.$

注意 $(-2)-0-(-2)$不能把“0”省掉，如果省略了就变为$(-2)--(-2)$，而$(-2)--(-2)$实质上是等于-4，这是错误的.

例7 计算$-3-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-5+\frac{1}{10}-2+4\frac{1}{5}$.

分析 这是代数和的形式，根据加法交换律可以分别把正数和负数集中起来计算，最后再求它们的代数和。

解 $-3-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-5+\frac{1}{10}-2+4\frac{1}{5}$

$=\frac{2}{5}+\frac{1}{10}+4\frac{1}{5}-3-\frac{1}{2}-5-2$

$=4\frac{7}{10}-10\frac{1}{2}$

$=-5\frac{8}{10}=-5\frac{4}{5}$.

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2),$$
是因式分解和分式运算的基础，必须能左右互化，运用纯熟.

因式分解是把一个多项式化成几个整式的积，常用的方法有：提取公因式法、分组分解法、公式法，若是二次三项式可用“十字相乘法”.

二、分析与解答举例

例 1 一个分数的分子比a大1，分母比分子的3倍小2．试列出代数式表示这个分数.

分析 这个分数的分子比a大1就是$a+1$．而分母比分子的3倍小2，分子的3倍是$3(a+1)$，比$3(a+1)$小2就是$3(a+1)-2$，这就是分母.

解 这个分数是$\dfrac{a+1}{3(a+1)-2}$.

例 2 计算代数式$2x^3-5x^2+3x-8$的值：

(1)当$x=1$；　　　(2)$x=-\dfrac{1}{2}$.

分析 这是代入求值的问题，就是把代数式中的x用数字去代替，把代数式（含有字母的）变成有理式（不含有字母）．再进行有理式的计算.

解

(1) $2x^3-5x^2+3x-8$

$=2(1)^3-5(1)^2+3(1)-8$

$=2-5+3-8=-8$；

(2) $2x^3-5x^2+3x-8$

$$=2\left(-\frac{1}{2}\right)^3-5\left(-\frac{1}{2}\right)^2+3\left(-\frac{1}{2}\right)-8$$

$$=2\left(-\frac{1}{8}\right)-5\left(+\frac{1}{4}\right)+3\left(-\frac{1}{2}\right)-8$$

$$=-\frac{1}{4}-\frac{5}{4}-\frac{3}{2}-8=-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}-8=-11.$$

注意 把字母的指定数值代入代数式后，有些乘方或原来省略乘号的地方，需要添上括号或者乘号．如 $2x^3$ 用 $x=-\frac{1}{2}$ 代入后，应写为 $2\left(-\frac{1}{2}\right)^3$，而不能写成 $2-\frac{1}{2}^3$．也不能写成 $2\cdot-\frac{1}{2}^3$．

例 3 合并同类项

$$3a+2b+2a^2+2a+4b-a^2.$$

分析 $3a$ 与 $2a$ 是同类项，合并起来就是 3 个 a 加 2 个 a，共得 5 个 a，即 $5a$；

$2b$ 与 $4b$ 是同类项，合并起来就是 2 个 b 加 4 个 b，得 6 个 b，即 $6b$；

$2a^2$ 与 $-a^2$ 是同类项，合并起来就是 2 个 a^2 减 1 个 a^2，得 1 个 a^2，即 a^2．

解 $3a+2b+2a^2+2a+4b-a^2$

$$=3a+2a+2b+4b+2a^2-a^2$$

$$=5a+6b+a^2.$$

例 4 合并同类项

$$2a^4-8a^2b^2-ab^3+5a^3b+3a^4+8a^2b^2-ab^3.$$

分析 我们把这个式子看作代数和，每个系数包括前面

分析 这里都是多项式的减法，首先要认清被减式与减式．每题中的第一个多项式都是被减式，第二个多项式都是减式（第 4 小题后两个多项式都是减式）．在计算时去掉每个多项式的括号和括号与括号之间的“－”号时，被减式中各项的符号不变，只改变减式中各项的符号为相反的符号，然后合并同类项即可．

(1) $(-2a+4b)-(-5a-6b)$

$=-2a+4b+5a+6b$

$=-2a+5a+4b+6b$

$=3a+10b$；

(2) $(3x^2-4y)-(2x^2-3y)$

$=3x^2-4y-2x^2+3y$

$=3x^2-2x^2-4y+3y$

$=x^2-y$；

(3) $(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)-(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)$

$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3$

$=a^3-a^3-3a^2b-3a^2b+3ab^2-3ab^2-b^3-b^3$

$=-6a^2b-2b^3$；

(4) $\left(\frac{1}{3}a^3-2a^2-\frac{1}{2}a-6\right)-\left(\frac{1}{3}a^2-5\right)-\left(\frac{1}{2}a^3-4a-7\right)$

$=\frac{1}{3}a^3-2a^2-\frac{1}{2}a-6-\frac{1}{3}a^2+5-\frac{1}{2}a^3+4a+7$

$=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^3-2a^2-\frac{1}{3}a^2-\frac{1}{2}a+4a-6+5+7$

$=-\frac{1}{6}a^3-\frac{7}{3}a^2+\frac{7}{2}a+6$．

(1) $a^2 \cdot a^3$;　　(2) $a^6 \cdot a$;

(3) $a \cdot a^3 \cdot a^4$;　　(4) $a^2 \cdot a^{3m}$;

(5) $x^p \cdot x^{2q}$;　　(6) $x^{2m+1} \cdot x^{2n} \cdot x^{m+n}$.

分析　这里都是同底数幂的相乘，根据同底数的幂的乘法法则："底数不变，指数相加"进行计算即可。

解

(1) $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$;

(2) $a^6 \cdot a = a^{6+1} = a^7$;

(3) $a \cdot a^3 \cdot a^4 = a^{1+3+4} = a^8$;

(4) $a^2 \cdot a^{3m} = a^{2+3m}$;

(5) $x^p \cdot x^{2q} = x^{p+2q}$;

(6) $x^{2m+1} \cdot x^{2n} \cdot x^{m-n} = x^{(2m+1)+2n+(m-n)}$

$= x^{2m+1+2n+m-n} = x^{3m+n+1}$.

注意　第(2)、(3)小题中的 a 就是 a^1，所以

$a^6 \cdot a = a^{6+1} = a^7$; $a \cdot a^3 \cdot a^4 = a^{1+3+4} = a^8$.

例8　化简：

(1) $(a^2)^3$;　　(2) $(b^m)^n$;　　(3) $(b^{2m})^{3n}$;

(4) $(y^{m+n})^{m-n}$;　　(5) $[(y^2)^3]^4$.

分析　这里都是幂的乘方，根据幂的乘方法则："底数不变，幂指数乘以乘方指数"即可。

解

(1) $(a^2)^3 = a^{2\times3} = a^6$;

(2) $(b^m)^n = b^{m\cdot n} = b^{mn}$;

(3) $(b^{2m})^{3n} = b^{2m\cdot3n} = b^{6mn}$;

(4) $(y^{m+n})^{m-n} = y^{(m+n)(m-n)} = y^{m^2-n^2}$;

(5) $[(y^2)^3]^4=y^{2\cdot3\cdot4}=y^{24}$.

例9 计算：

(1) $(2a^3b^2x)(-3ab^3)$；

(2) $(-x)(x^2y)$；

(3) $\left(\frac{1}{2}ax^2y^3\right)\left(-\frac{4}{5}a^2x^3y\right)$.

分析 这里都是单项式乘以单项式，只要把它们的系数相乘作为积的系数，把相同字母的指数相加的和作为积里这个字母的指数，只在一个单项式里含有的字母，连同它的指数写在积里即可.

解

(1) $(2a^3b^2x)(-3ab^3)$

$=[2\cdot(-3)](a^3\cdot a)(b^2\cdot b^3)x$

$=-6a^{3+1}b^{2+3}x$

$=-6a^4b^5x$；

注意

①以后计算中间步骤可以省略，直接写出结果来；

②相乘时负系数的负号不要丢掉；

③指数是“1”的，相加时不要忘掉.

(2) $(-x)(x^2y)=-x^3y$；

注意 第一个因式的系数是“-1”，第二个因式的系数是“$+1$”，它们相乘，得“-1”，这就是积的系数.

(3) $\left(\frac{1}{2}ax^2y^3\right)\left(-\frac{4}{5}a^2x^3y\right)$

$=-\frac{2}{5}a^3x^5y^4$.

(3) $(a+b)^4\div(a+b)^3=(a+b)^{4-3}=a+b$;

(4) $(x-y)^{m+n}\div(x-y)^{m-n}$

$=(x-y)^{(m+n)-(m-n)}=(x-y)^{m+n-m+n}$

$=(x-y)^{2n}$.

注意 这种指数相减的方法，必需是同底幂.

例13 计算：

(1) $3^5\cdot3^4\div3^7$;

(2) $(a^2)^4\div a^5$;

(3) $(x\cdot x^5\cdot x^3)^4\div(x^4\cdot x^2)^3$;

(4) $(x^3)^8\div[(x^2)^3]^2$.

分析 先计算同底幂的相乘与幂的乘方，再计算同底幂的相除.

解

(1) $3^5\cdot3^4\div3^7=3^{5+4}\div3^7=3^{9-7}=3^2=9$;

(2) $(a^2)^4\div a^5=a^{2\times4}\div a^5=a^{8-5}=a^3$;

(3) $(x\cdot x^5\cdot x^3)^4\div(x^4\cdot x^2)^3=(x^{1+5+3})^4\div(x^{4+2})^3$

$=(x^9)^4\div(x^6)^3=x^{36}\div x^{18}=x^{18}$;

(4) $(x^3)^8\div[(x^2)^3]^2=x^{24}\div x^{12}=x^{12}$.

例14 计算：

(1) $8a^4\div(-8a)$;

(2) $(-12x^7y^5z^3)\div2x^2y^2$;

(3) $-\frac{5}{12}x^{2m}y^{3n}\div0.5x^my^{2n}$;

(4) $(5a^3b^4)^2\div5ab^4$.

分析 这里是单项式除以单项式，系数与相同字母的幂分别相除. 系数除以系数的结果是商的系数，相同字母的幂

就可先应用平方差公式，再应用差的平方公式计算。

解 $(3a+4b-5c)(3a-4b+5c)$

$=[3a+(4b-5c)][3a-(4b-5c)]$

$=(3a)^2-(4b-5c)^2$

$=9a^2-(16b^2-40bc+25c^2)$

$=9a^2-16b^2+40bc-25c^2$.

注意

①在添括号的前面是“－”号时，括号内要变号，在去括号时括号前面是“－”号，括号内也要变号；

②下面的作法是错误的：

$(3a+4b-5c)(3a-4b+5c)$

$=[(3a+4b)-5c][(3a-4b)+5c]$

因为这里$(3a+4b)$与$(3a-4b)$不相同。

例24 利用乘法公式计算：

$(3a+4b-5c)(3a-4b-5c)$.

分析 这里两个因式的第一项与第三项都相同，第二项相差一个性质符号，所以根据加法交换律把各因式中的第二项与第三项交换位置，然后各添一个括号，再应用乘法公式。

解 $(3a+4b-5c)(3a-4b-5c)$

$=(3a-5c+4b)(3a-5c-4b)$

$=[(3a-5c)+4b][(3a-5c)-4b]$

$=(3a-5c)^2-(4b)^2$

$=9a^2-30ac+25c^2-16b^2$.

注意 下面添括号的做法都是错误的：

①$(3a+4b-5c)(3a-4b-5c)$

$=[3a+(4b-5c)][3a-(4b-5c)]$，这个做法的

$=2ax^4(3a^2-5ax+7x^2)$;

(3) $a^8+a^7-2a^6-3a^5=a^5(a^3+a^2-2a-3)$.

例26 分解因式：

(1) x^3+x^2+x;

(2) $-x^2y^3-x^2y^2-xy$.

分析

(1) x^3+x^2+x里，x是公因式，可以提出来. 这里应该注意的是：x是$1\cdot x$，提出x后，另一因式是1，这个"1"千万不能漏掉.

(2) 在$-x^2y^3-x^2y^2-xy$里，各项里都有因数x和y，且最低次数都是1，可以提出x和y. 又因三项都有"－"号，就表示它们的系数都是－1，这个系数－1也是公因式，也应该把它提出来，但－1的1可以省略不写，只写"－"号. 因此，三项的公因数是$-xy$.

解

(1) $x^3+x^2+x=x(x^2+x+1)$;

(2) $-x^2y^3-x^2y^2-xy=-xy(xy^2+xy+1)$.

注意 在(2)式中，当提出"－"号后，括号内各项要变号.

例27 分解下列各因式：

(1) $3(a+b)(a-b)(x+y)-(a+b)(a-2b)(x+y)$;

(2) $(a-b)^2+(b-a)(x+y)$;

(3) $(x-2y)(2x+3y)-2(2y-x)(5x-y)$.

分析

(1) 因二项中都含有因式$(a+b)$和$(x+y)$，把$(a+b)(x+y)$提出来就可以了；

(2) 在$(a-b)^2+(b-a)(x+y)$的两项中没有公因式，但$b-a$可以变形为$-(a-b)$，用$-(a-b)$去代换原式中的$b-a$，这时原式的两项中就有公因式$(a-b)$了；

(3) 因为$2y-x=-(x-2y)$，所以原式的两项中有公因式$(x-2y)$.

解

(1) $$\begin{aligned}&3(a+b)(a-b)(x+y)-(a+b)(a-2b)(x+y)\\&=(a+b)(x+y)[3(a-b)-(a-2b)]\\&=(a+b)(x+y)(3a-3b-a+2b)\\&=(a+b)(x+y)(2a-b);\end{aligned}$$

注意 $[3(a-b)-(a-2b)]$中有同类项，所以要把小括号去掉化简.

(2) $$\begin{aligned}&(a-b)^2+(b-a)(x+y)\\&=(a-b)^2-(a-b)(x+y)\\&=(a-b)[(a-b)-(x+y)]\\&=(a-b)(a-b-x-y);\end{aligned}$$

注意 因为$(a-b)^2=(b-a)^2$，所以此题也可以这样作：

$$\begin{aligned}&(a-b)^2+(b-a)(x+y)\\&=(b-a)^2+(b-a)(x+y)\\&=(b-a)[(b-a)+(x+y)]\\&=(b-a)(b-a+x+y)\end{aligned}$$

这个结果与$(a-b)(a-b-x-y)$是一样的.

(3) $$\begin{aligned}&(x-2y)(2x+3y)-2(2y-x)(5x-y)\\&=(x-2y)(2x+3y)+2(x-2y)(5x-y)\\&=(x-2y)[(2x+3y)+2(5x-y)]\end{aligned}$$

(1) $4x^2-9y^2$；

(2) a^4-4b^4；

(3) $16a^4x^{10}-25b^6y^8$.

分析 把各项分别化成完全平方的形式，如$4x^2=(2x)^2$，$9y^2=(3y)^2$，分别以$2x$和$3y$代替公式中的a和b，再应用平方差公式就可以了.

解

(1) $4x^2-9y^2=(2x)^2-(3y)^2$

$=(2x+3y)(2x-3y)$；

(2) $a^4-4b^4=(a^2)^2-(2b^2)^2$

$=(a^2+2b^2)(a^2-2b^2)$；

(3) $16a^4x^{10}-25b^6y^8=(4a^2x^5)^2-(5b^3y^4)^2$

$=(4a^2x^5+5b^3y^4)(4a^2x^5-5b^3y^4)$.

例31 分解因式：

(1) $(x-y)^2-z^2$；　　(2) $(ax+by)^2-1$；

(3) $4(a+b)^2-9(a-b)^2$.

分析 这里每一个多项式都是平方差的形式，可以直接应用公式进行分解. 例如在(1)里$(x-y)$就相当于公式里的a；在(2)里$(ax+by)$相当于公式里的a；在(3)里$2(a+b)$相当公式里的a.

解

(1) $(x-y)^2-z^2$

$=[(x-y)+z][(x-y)-z]$

$=(x-y+z)(x-y-z)$；

(2) $(ax+by)^2-1$

$=[(ax+by)+1][(ax+by)-1]$

$=(ax+by+1)(ax+by-1)$;

(3) $4(a+b)^2-9(a-b)^2$

$=[2(a+b)]^2-[3(a-b)]^2$

$=[2(a+b)+3(a-b)][2(a+b)-3(a-b)]$

$=(2a+2b+3a-3b)(2a+2b-3a+3b)$

$=(5a-b)(-a+5b)$

$=(5a-b)(5b-a)$.

注意

①在第一步分解成因式时，中括号不要省略，但以后要把这些括号内尽量化简，改用小括号；

②在第(2)小题中的1就是1^2，在今后练习时要注意。

例32 分解因式：

(1) x^4-y^4； (2) $a^4-9a^2b^2$；

(3) a^2-b^2+a-b.

分析

(1) 先将x^4和y^4分别化为完全平方形式，即$x^4=(x^2)^2$，$y^4=(y^2)^2$，再应用公式分解；

(2) 可以先提取公因式a^2，再用平方差公式分解；

(3) 可以分为两组，第一组应用平方差公式，再提取公因式$(a-b)$。

解

(1) $x^4-y^4=(x^2)^2-(y^2)^2$

$=(x^2+y^2)(x^2-y^2)$

$=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$；

注意 x^2-y^2还可以应用公式来分解，要继续分解到不能分解为止。但x^2+y^2不能分解，要照写下来，不能漏掉。