SPT 高等院校选用教材 非数学专业

高 等 数 学 系 列 教 材

多元分析基础

湖南大学数学与计量经济学院 组编

曹定华 罗 汉 主编

科 学 出 版 社

高等院校选用教材(非数学专业)

高 等 数 学 系 列 教 材

多 元 分 析 基 础

湖南大学数学与计量经济学院组编

曹定华　罗　汉　主编

科 学 出 版 社

2 0 0 1

内 容 简 介

本书是高等数学系列教材之一. 其内容包括多元函数的微分学和积分学、场论、傅里叶级数、积分变换、偏微分方程等. 各节后面配有适量的习题. 书末附有习题答案.

本书的结构和一些表述方法有别于以往的同类教材,如:以向量、矩阵为工具处理多元微积分;给出了黎曼积分的概念;增加了偏微分方程的内容等. 本书结构严谨、内容精炼、条理清楚、重点突出、例题较多.

本书可作为各类高等院校"高等数学"课程的教材,也可作为工程技术及有关人员的自学用书或参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

多元分析基础/曹定华,罗汉主编. －北京:科学出版社,2001

(高等院校选用教材(非数学专业))

ISBN 7-03-009220-1

Ⅰ. 多… Ⅱ. ①曹…②罗… Ⅲ. 多元分析-高等院校-教材

Ⅳ. O212.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 06754 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

北京双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001 年 3 月第 一 版 开本: 710×1000 1/16

2001 年 3 月第一次印刷 印张: 20

印数: 1—10 000 字数: 355 000

定价: 25.00 元

前　　言

我国国民经济和科学技术在21世纪的更大发展已成必然之势，培养各类高等专门人才的我国大学教育的改革也势在必行．作为大学教育中重要一环的大学数学教育的改革应如何革故鼎新，以适应新的形势，这是广大数学教育工作者所面临的重大课题．近年来，我校十分注重这方面的工作，组织了一大批教学经验丰富、又具创新精神的教师，进行教学和教材的改革研究．

高等数学是高等院校众多专业学生必修的重要基础理论课，它的设置是为培养各类高等专门人才服务的，因此我们编写的这套高等数学系列教材，在传授知识的同时，注意到通过各环节逐步培养学生具有抽象概括问题的能力、逻辑推理能力、空间想象能力和自学能力，还特别注意培养学生具有比较熟练的运算能力和综合运用所学知识去分析问题和解决问题的能力．

这套系列教材由《一元分析基础》、《线性代数与解析几何》、《多元分析基础》、《随机分析基础》和《数学实验》五册组成，它们在结构体系和内容选取方面，不同于以往的众多同类教材，它是按照培养跨世纪人才数学素质的要求编写的，渗透了不少现代数学的观点和内容，以开阔学生的眼界，启迪他们的思维．这套教材中难免会有不妥之处，希望使用本套教材的教师和学生提出宝贵意见．

这套系列教材由刘楚中教授任总主编，周叔子教授任总主审．本册《多元分析基础》是在科学出版社1999年3月出版，罗汉、曹定华主编的《多元微积分与代数》的基础上，经过两年的教学实践，广泛征求意见后重新修改，编写而成的．此次修改，编写除由曹定华、罗汉任主编外，参加的人员还有：周润兰、刘楚中、戴斌祥、刘岚喆．本教材中带 * 号的内容，可根据授课学时和教学对象进行取舍．

这套系列教材在编写过程中得到湖南大学教务处的大力支持，在此表示衷心感谢．

湖南大学数学与计量经济学院

2001年1月

《高等数学系列教材》

主　编　刘楚中

主　审　周叔子

《多元分析基础》

主　编　曹定华　罗　汉

编　者　周润兰　刘楚中　戴斌祥　刘岚喆

目　　录

第一章　多元函数微分学

多元函数微分学中的基本概念及性质大部分可从一元函数微分学中推广而来. 在将一元函数的情形向多元函数的情形作推广时,常会出现下列情况:从一元推广到二元时会产生新的问题,需要用到一些新的工具和手段来处理. 而从二元推广到三元及三元以上时,则可以类推. 因此,本章将主要介绍二元函数的情形,然后再类推到三元及三元以上的函数中去.

另外,由于 R^2,R^3 中的点与向量是一一对应的,因此,以后在表述时不再区分点与向量这两个概念. 在无特别声明时,总用 X,Y 等表示 R^2,R^3 中的点(向量),而用 x, y, z, a, b, c 等表示实数. 由于有多种乘积使用符号"·",因此,读者在阅读教材时应注意区别"$\lambda \cdot a$","$A \cdot P$","$B \cdot X$"的含义,它们可能是两个实数的乘积,或一个数乘以向量,或两个向量的数量积,或两个矩阵的乘积. 对符号"+"也类似.

§1　多元函数的概念

一、多元函数的概念

以前我们所接触到的函数 $y=f(x)$有一个特点,就是它只有一个自变量,函数 y 是随着这一个自变量的变化而变化的. 我们称之为一元函数. 如 $y=\sin x$, $y=x^2+\mathrm{e}^x$ 等.

直观的,所谓多元函数,就是有多个自变量的函数,函数 y 随多个自变量的变化而变化,比如

圆柱体体积　　　$V=\pi r^2 h$,

其中 r 为底圆半径,h 为圆柱体的高. 易见,体积 V 随 r,h 的变化而变化. 或者说,任给一对数(r, h),就有惟一的一个 V 与之对应.

长方体体积　　　$V=xyz$,

其中 x, y, z 分别为长方体的长、宽、高. 体积 V 随 x, y, z 的变化而变化. 或者说,任给一组数(x, y, z),就有惟一的一个 V 与之对应.

这些都是多元函数的例子. 有两个自变量的称为二元函数,有三个自变量的称为三元函数,……,有 n 个自变量的称为 n 元函数,统称为多元函数.

与一元函数类似,有二元函数定义.

定义　设 D 是 xy 平面上的一个非空点集，即 $D\subset R^2$，若对任意的点 $X=(x, y)\in D$，按照某个对应规则 f，总有惟一确定的实数 z 与之对应，则称 f 是定义在 D 上的二元(实值)函数，记作

$$f: D\to R,\ X=(x, y)\to z.$$

称 z 为点 $X=(x, y)$ 在 f 下的像，记作 $f(X)$ 或 $f(x, y)$，即 $z=f(X)=f(x, y)$，也称为 $X=(x, y)$ 所对应的函数值.

称 D 为函数 f 的定义域. f 的定义域常记作 $D(f)$. 定义域 D 在 f 下的像集 $f(D)=\{f(X)\mid X\in D\}$ 称为 f 的值域.

习惯上，我们把函数 f 在任意点 $X\in D$ 处的函数值 $z=f(X)=f(x, y)$ 也称做函数，并称 x, y 为自变量，z 为因变量.

应该注意的是，所谓二元函数就是从平面点集 $D\subset R^2$ 到实数集 R 的一个映射. 二元函数的定义域总是一个平面点集，而它的值域总是一个实数集.

在二元函数 $z=f(X)=f(x, y)$ 中，自变量 x, y 都是独立变化的，它们只受到 $(x, y)\in D$ 的限制. 另外，若给出了函数 $z=f(x, y)$ 的表达式，求它在 $X_0=(x_0, y_0)$ 处的函数值 $f(x_0, y_0)$ 的方法与一元函数类似.

由函数定义易知，若 $z=f(x, y)$ 的定义域 D 是 xy 平面上一条曲线 D: $y=y(x)$，则二元函数 $z=f(x, y)=f(x, y(x))$ 成为一元函数. 而任何一个一元函数都可看作是一个二元函数. 可见二元函数是一元函数的推广，而一元函数则是二元函数的特殊情形.

类似地，有 n 元函数定义.

定义　设 $D\subset R^n$，若对任意的 $X=(x_1, \cdots, x_n)\in D\subset R^n$，按某个对应规则 f，总有惟一确定的实数 z 与之对应，则称 f 是定义在 D 上的 n 元(实值)函数. 记作

$$f: D\to R,\ X=(x_1, \cdots, x_n)\to z.$$

$$\text{并记 } z=f(X),\ \text{或 } z=f(x_1, \cdots, x_n).$$

例 1　求 $z=\ln(x+y)$ 的定义域 D_1，并画出 D_1 的图形.

解　与一元函数类似，要求函数 z 的定义域，就是要求使得这个式子有意义的 xy 平面上点的集合. 由 $x+y>0$，得定义域

$$D_1=\{(x, y)\mid x+y>0\}.$$

如图 1-1. D_1 在直线 $y=-x$ 上方，不包括直线 $y=-x$.

例 2　求 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的定义域 D_2，并画 D_2 的图形.

解　$1-x^2-y^2\geqslant 0$，即 $x^2+y^2\leqslant 1$，故

$$D_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}.$$

由于$\sqrt{x^2+y^2}$表示点(x, y)到原点 O 的距离,因此 D_2 表示 xy 平面上到原点的距离不超过 1 的点的集合,即 D_2 为单位圆盘(包括圆周),如图1-2.

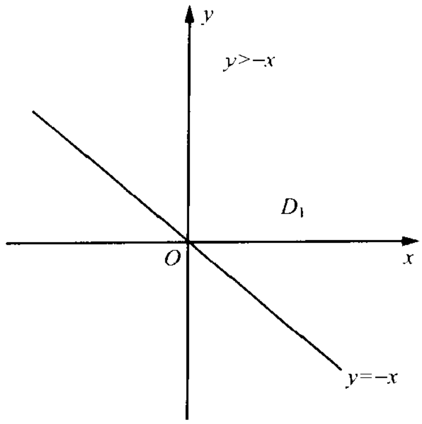

图 1-1

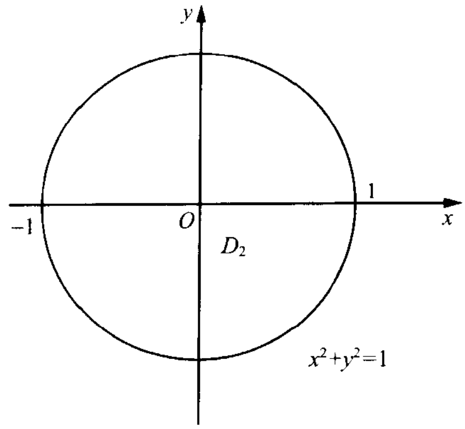

图 1-2

二、平面区域

研究函数当然要涉及到它的定义域,由于二元函数的定义域是平面点集,因此,有必要介绍一些关于平面点集的知识. 在一元函数微积分中,区间的概念是很重要的,大部分问题是在区间上讨论的. 在平面上,与区间这一概念相对应的概念是平面区域.

1. 邻域

以点 $X_0=(x_0, y_0)$为中心,以 $\delta>0$ 为半径的圆周内部的点的全体称为 X_0 的 δ 邻域,记作 $U(X_0, \delta)$,即

$$\begin{aligned} U(X_0, \delta) &= \{(x, y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta\} \\ &= \{X=(x, y) \mid \|X-X_0\| < \delta\}, \end{aligned}$$

其中 $\|X-X_0\| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$是点 X 与 X_0 之间的距离,也称作向量 $X-X_0$ 的模(或范数,长度).

记

$$\hat{U}(X_0,\delta) = U(X_0, \delta) - \{X_0\}$$

$$=\{(x,\ y)|0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

$$=\{X=(x,\ y)|0<\|X-X_0\|<\delta\},$$

称为 X_0 的去心 δ 邻域(如图 1-3). 当不必关心邻域半径时,简记为 $U(X_0)$和 $\hat{U}(X_0)$. 邻域和去心邻域都不包括圆周,去心邻域还不包括圆心.

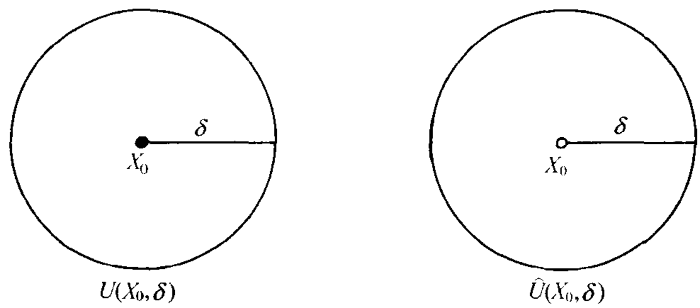

图 1-3

2. 内点

设 E 是一平面点集,即 $E\subset R^2$,$X_0=(x_0,\ y_0)\in E$,若存在邻域 $U(X_0,\ \delta)\subset E$,则称 X_0 为 E 的内点.

所谓 X_0 是 E 的内点,就是说,若存在以 X_0 为心的小圆盘 $U(X_0,\ \delta)$,不论它的半径 $\delta>0$ 多么小,只要能使这个小圆盘全落在 E 内,则称 X_0 为 E 的内点. E 的内点总是E 中的点.

E 的全体内点所成集合称为E 的内部,记作 E°. 显然,$E^\circ\subset E$.

若 X_0 是 $R^2-E=E^c$(称为 E 的余集或补集)的内点,则称 X_0 是 E 的外点.

例 1 中 $z=\ln(x+y)$的定义域 $D_1=\{(x,\ y)|x+y>0\}$. 直线 $x+y=0$ 上方的点都是 D_1 的内点,直线 $x+y=0$ 下方的点都是 D_1 的外点,直线 $x+y=0$ 上的点既不是 D_1 的内点也不是 D_1 的外点. 例 2 中 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$的定义域 $D_2=\{(x,\ y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$. 圆内部的点都是 D_2 的内点,圆外部的点都是 D_2 的外点,圆周上的点既不是 D_2 的内点也不是 D_2 的外点(如图1-4).

3. 边界点

设 E 是一个平面点集,即 $E\subset R^2$,$X_0=(x_0,\ y_0)$是平面上一个点. 若 X_0 的任何邻域 $U(X_0,\ \delta)$内既有属于 E 的点,又有不属于 E 的点,则称 X_0 为 E 的边界点.

E 的全体边界点所成集合称为E 的边界,记作∂E.

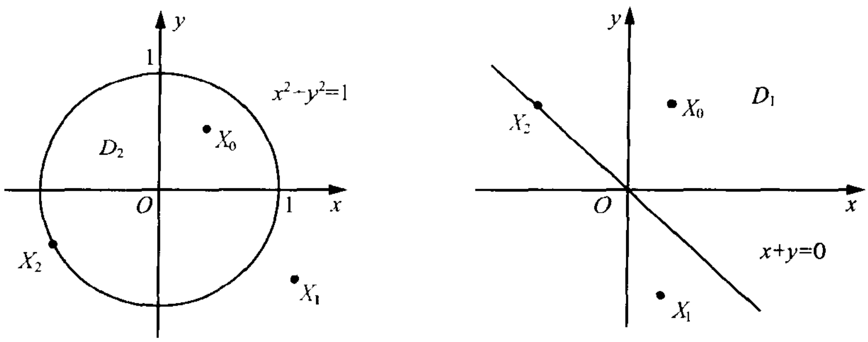

图 1-4

在例 1 中，直线 $x+y=0$ 上的点都是定义域 D_1 的边界点，D_1 的边界就是直线 $x+y=0$ 上点的全体. 在例 2 中，圆周 $x^2+y^2=1$ 上的点都是定义域 D_2 的边界点，D_2 的边界就是圆周 $x^2+y^2=1$ 上点的全体.

可见，E 的边界点可以是 E 中的点(例 2)，也可以不是 E 中的点(例 1).

4. 开集

设 $E\subset R^2$，若 E 中每一点都是 E 的内点，即 $E\subset E^\circ$，则称 E 是一个开集. 规定空集 $\varnothing$ 和 R^2 为开集.

由于 $E^\circ\subset E$，故也可以说，若 $E^\circ=E$，则称 E 是一个开集. 比如，例 1 中的 D_1 是开集($D^\circ_1=D_1$)，而例 2 中的 D_2 不是开集. 容易证明，非空平面点集 E 为开集的充要条件是 E 不含有 E 的边界点.

平面上开集的概念可以看作是 x 轴上若干开区间的并集这一概念的推广，为了将开区间的概念推广到平面上，我们还需要连通集的概念.

5. 连通集

设 E 是非空平面点集，若对任意的 $X,Y\in E$，都可用完全含于 E 的折线将它们连接起来，则称 E 为连通集，如图 1-5.

从几何上看，E 是连通集是指 E 是连成一片的，E 中的点都可用 E 中的折线连接. 例 1 和例 2 中的 D_1 和 D_2 都是连通集.

6. 开区域(开域)

设 E 是非空平面点集，若 E 是连通的开集，则称 E 是开区域.

从几何上看，开区域是连成一片的，不包括边界的平面点集. 比如例 1 中的 D_1 是开区域. 开区域是开区间这一概念的推广.

7. 闭区域(闭域)

若 E 是开区域，记 $\bar{E}=E\cup\partial E$，称为闭区域(闭域).

闭区域是由一个开区域再加上它的边界所构成的，它是 x 轴上闭区间这

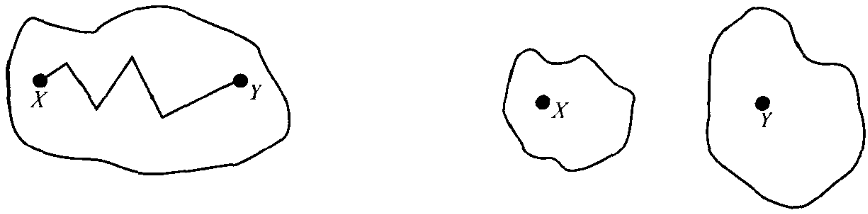

图 1-5

一概念的推广．例 2 中的 D_2 就是一个闭区域．从几何上看，闭区域是连成一片的，包括边界的平面点集．

本教材把开区域和闭区域统称为区域．

8．有界集

设 E 是非空平面点集，若存在 $r>0$，使得 E 全部落在以原点 O 为心，r 为半径的圆内，即 $E\subset U(O,\ r)$，则称 E 为有界集．否则称 E 为无界集．

易见，例 1 中的 D_1 是无界集，它是无界开区域．例 2 中的 D_2 是有界集，它是有界闭区域．

9．聚点

设 E 是平面点集，X_0 是平面上一个点．若 X_0 的任一邻域内都有无限多个点属于 E，则称 X_0 是 E 的一个聚点．

设 X_0 为 E 的一个聚点，由于在 X_0 的任何邻域内总有无限多个 E 中的点，所以，若以 X_0 为心，以 δ 为半径作圆，该圆内有无限多个 E 中的点．再以 X_0 为心，以 $\delta/2$ 为半径作圆，该圆内仍有无穷多个 E 中的点．以 $\delta/2^2,\cdots,\delta/2^n$ 为半径作圆，结论也是一样的．可见，不论小圆半径多么小，其内部总有无限多个 E 中的点，这相当于在 X_0 附近“聚集”了无限多个 E 中的点，这也是我们称 X_0 为 E 的聚点的原因．

聚点的定义也可叙述为：若 X_0 的任一邻域内至少含有 E 中一个异于 X_0 的点，则称 X_0 为 E 的一个聚点，读者不难自行证明这一定义与前一定义的等价性．

注意到例 1 中 D_1 的边界点是 D_1 的聚点，但它不属于 D_1；而例 2 中 D_2 的边界点是 D_2 的聚点，它属于 D_2．可见，E 的聚点 X_0 可能属于 E，也可能不属于 E．

由内点和聚点的定义可知，E 的内点一定是 E 的聚点．一般，E 的边界点不一定是 E 的聚点，但若 E 是开集，则 E 的边界点一定是 E 的聚点．若 E 为