初三年级 数学

通用各科
奥林匹克教材

数学奥林匹克工作室 编

首都师范大学出版社

tongyong geke
aolinpike
jiaocai

奥林匹克

OLYMPIC

通用各科
奥林匹克教材

数 学 奥 林 匹 克 工 作 室　编

初三年级数学

奥林匹克

首都师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

通用各科奥林匹克教材:初三数学/吴建平主编. —北京:
首都师范大学出版社,2000.1
ISBN 7-81064-093-3

Ⅰ.通… Ⅱ.周… Ⅲ.数学课-初中-教材 Ⅳ.G634.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 65127 号

TONGYONG GEKE AOLINGPIKE JIAOCAI
· CHUSAN NIANJISHUXUE

通用各科奥林匹克教材

初三年级数学

首都师范大学出版社
(北京西三环北路 105 号 邮政编码 100037)
北京昌平兴华印刷厂印刷 全国新华书店经销
2000 年 1 月第 1 版 2000 年 3 月第 2 次印刷
开本 850×1168 1/32 印张 6.875
字数 177 千 印数 15,001～36,000 册
定价 8.00 元

编　委　会

主编：吴建平　李念伟
编委：方运加　李念伟　吴建平
　　　　郜舒竹　董凤举
编者：王　忠　无　边　尹克新
　　　　刘汉昭　刘向军　李念伟
　　　　关　闳　陈　娴　吴　易
　　　　张　丽　张燕勤　欧　丽
　　　　赵维民　夏国生

65.06

目　　录

一、不定方程

第一学期

所谓不定方程(组)是指未知数的个数多于独立方程的个数的方程(组),这类方程(组),一般说来总有无穷多个解,如果只讨论求整系数的不定方程的整数解,其解数方有可能为有限个.

常见的不定方程主要有二元一次不定方程、二元二次不定方程以及多元不定方程.

例1 求 $5x+2y=22$ 的正整数解.

分析与解 由已知得 $x=\dfrac{22-2y}{5}$.

要使 x 取整数,必须使分式的分子 $22-2y$ 是5的倍数,因此 $22-2y$ 的个位数只能是0或5,当 $y=1$ 时,求得 $x=4$,即方程有一组正整数解 $\begin{cases}x_0=4,\\y_0=1.\end{cases}$

设方程的所有解可表达为 $\begin{cases}x=4+m,\\y=1+n,\end{cases}$ 代入原方程有:

$$5(4+m)+2(1+n)=22,$$

即

$$5m+2n=0$$

于是 $\dfrac{m}{2}=\dfrac{n}{-5}$,设比值为整数 t,有

$$m=2t, n=-5t.$$

由此得到原方程的通解为

$$\begin{cases}x=4+2t,\\y=1-5t.\end{cases}$$

要求出正整数解,只要解不等式组

$$\begin{cases}4+2t>0,\\1-5t>0.\end{cases}$$

由不等式组得$\frac{1}{5}>t>-2$,在此范围内整数 t 只能取 $-1,0$,分别令 $t=-1,0$,得到方程的正整数解为

$$\begin{cases}x=2,\\y=6,\end{cases}\quad\begin{cases}x=4,\\y=1.\end{cases}$$

例 1 的解法可归纳为下面的定理:

定理 若$\begin{cases}x=x_0\\y=y_0\end{cases}$ 为 $ax+by=c$(其中$(a,b)=1$)的一组整数解,则 $ax+by=c$ 的通解为

$$\begin{cases}x=x_0+bt,\\y=y_0-at.\end{cases}$$

其中 $t=0,\pm1,\pm2,\cdots$

例 2 求 $7x-3y=5$ 的正整数解.

分析与解 将原方程化为 $x=\frac{3y+5}{7}$,得到一组整数解为

$$\begin{cases}x=2,\\y=3.\end{cases}$$

由定理可得出方程通解为

$$\begin{cases}x=2-3t,\\y=3-7t,\end{cases}\quad t\text{ 为整数}$$

解不等式组

$$\begin{cases}2-3t>0,\\3-7t>0,\end{cases}$$

得

$$t<\frac{3}{7}.$$

所以,当 t 取 $0,-1,-2,\cdots$时,可得方程的无穷多组正整数解:

$$\begin{cases}x=2,\\y=3,\end{cases}\quad\begin{cases}x=5,\\y=10,\end{cases}\quad\begin{cases}x=8,\\y=17,\end{cases}\cdots$$

例 3 求方程 $5x-3y=-7$ 的整数解，使 $60<x+y<80$.

分析与解 将方程化为 $x=\frac{3y-7}{5}$，得到一组解为

$$\begin{cases}x=1,\\y=4.\end{cases}$$

则方程通解为

$$\begin{cases}x=1-3t,\\y=4-5t,\end{cases}\quad t\text{ 为整数}.$$

$\therefore$ $$60<(1-3t)+(4-5t)<80$$

解得 $$-\frac{75}{8}<t<-\frac{55}{8}$$

由 t 为整数，得

$$t=-7,-8,-9.$$

故满足条件的方程 $5x-3y=-7$ 的整数解为

$$\begin{cases}x=22,\\y=39,\end{cases}\quad\begin{cases}x=25,\\y=44,\end{cases}\quad\begin{cases}x=28,\\y=49.\end{cases}$$

例 4 求方程组 $\begin{cases}4x+5y+2z=30 & ①\\5x-2y+4z=21 & ②\end{cases}$

的非负整数解.

分析与解 这里有三个未知数两个方程，属一次不定方程组，消去一个未知数后，便可转化为二元一次不定方程来解.

消去 z，得 $x+4y=13$.

$\therefore$ $x=13-4y$ 代入②得

$5(13-4y)-2y+4z=21$,

$\therefore$ $y=\frac{2z+22}{11}=2+\frac{2z}{11}$.

令 $\frac{2z}{11}=t$.

则 $z=\frac{11t}{2}$ （t 为整数）.

再令 $t=2k$,

则 $z=11k$（k 为整数），故方程组的整数解为

$$\begin{cases} x=5-8k \\ y=2+2k \quad (k\text{ 为整数}) \\ z=11k \end{cases}$$

根据题目要求 x、y、z 均为非负整数

$$\therefore \begin{cases} 5-8k\geqslant 0 \\ 2+2k\geqslant 0 \\ 11k\geqslant 0 \end{cases}$$

解得　$k=0$

故原方程组的非负整数解为 $\begin{cases} x=5, \\ y=2, \\ z=0. \end{cases}$

例 5　求方程 $x^2-y^2=72$ 的正整数解.

分析与解　这是二元二次不定方程. 因 72 为偶数,可知 x,y 同为奇数或偶数,可设

$x=y+2t$　(t 为正整数)

则 $(y+2t)^2-y^2=72$

$\therefore\quad y=\dfrac{18-t^2}{t}>0$,

解得　$0<t<\sqrt{18}<5$

另 $y=\dfrac{18}{t}-t$,$\therefore$　t 为 18 的约数.

$\therefore$　t 可取 1,2,3.

故原方程的正整数解为

$$\begin{cases} x=19, \\ y=17, \end{cases}\quad \begin{cases} x=11, \\ y=7, \end{cases}\quad \begin{cases} x=9, \\ y=3. \end{cases}$$

例 6　求方程 $2xy+x-4y-5=0$ 的整数解.

分析与解　可采用因式分解法.

原方程化为

$$x(2y+1)-2(2y+1)-3=0,$$
$$(x-2)(2y+1)=3.$$

若 x 和 y 都是整数，则 $x-2$ 和 $2y+1$ 都应是 3 的约数，而 3 的约数有 ±1，±3，于是可得到四个方程组

$$\begin{cases}x-2=1,\\2y+1=3,\end{cases}\quad\begin{cases}x-2=3,\\2y+1=1,\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-2=-1,\\2y+1=-3,\end{cases}\quad\begin{cases}x-2=-3,\\2y+1=-1.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=3,\\y=1,\end{cases}\quad\begin{cases}x=5,\\y=0,\end{cases}\quad\begin{cases}x=1,\\y=-2,\end{cases}\quad\begin{cases}x=-1,\\y=-1.\end{cases}$

即原方程有四组整数解.

例 7 求方程 $3x^2-4xy+3y^2=35$ 的正整数解.

分析与解 将 $3x^2-4xy+3y^2=35$ 两端乘以 3，得

$$9x^2-12xy+9y^2=105$$

配方，得

$$(3x-2y)^2+5y^2=105$$

因为 $(3x-2y)^2\geqslant0$，所以 $5y^2\leqslant105$，故 $y^2\leqslant21$.

因为求正整数解，可得

$$0<y\leqslant\sqrt{21}.$$

故 y 可取 1，2，3，4

把 $y=1,2,3,4$ 分别代入

$$(3x-2y)^2+5y^2=105.$$

当 $y=1$ 时，$x=4$；

当 $y=2$ 时，x 非整数值；

当 $y=3$ 时，x 非整数值；

当 $y=4$ 时，$x=1$.

综上所述，原方程的正整数解为：

$$\begin{cases}x=4,\\y=1,\end{cases}\quad\begin{cases}x=1,\\y=4.\end{cases}$$

例 8 求 $3x+4y+13z=57$ 的整数解.

分析与解 由题设方程得

$$x=\frac{1}{3}(57-4y-13z)$$
$$=19-y-4z-\frac{1}{3}(y+z).$$

令$\frac{1}{3}(y+z)=m$,则

$$z=3m-y$$
$$x=19-y-4(3m-y)-m=19+3y-13m.$$

原方程的通解为

$$\begin{cases}x=19+3y-13m\\y=y\\z=3m-y\end{cases}$$

其中 y,m 取任意整数值.

例 9 求方程组

$$\begin{cases}6x-y-z=20\\x^2+y^2+z^2=1979\end{cases}$$

的所有正整数解.

分析与解 首先注意到这样一个不等式

$$(y+z)^2\leqslant 2(y^2+z^2),$$

这是因为 $2(y^2+z^2)-(y+z)^2=(y-z)^2\geqslant 0$.

利用这个不等式可得

$$(y+z)^2=(6x-20)^2\leqslant 2(y^2+z^2)=2(1979-x^2),$$

于是 $(6x-20)^2\leqslant 2(1979-x^2)\leqslant 2\times 1978<63^2$

从而 $-63<6x-20<63.$

由于 $y+z=6x-20$ 是正整数,则有

$$0<6x-20<63,$$

即
$$\frac{20}{6}<x<\frac{83}{6},$$

从而
$$4\leqslant x\leqslant 13.$$

再由 $y+z$ 为偶数,从而 y^2+z^2 为偶数,x^2 为奇数,进而 x 为奇数.

取 $x=5,7,9,11,13$ 一一验证，可得出四组解：

$$\begin{cases}x=11,\\y=3,\\z=43,\end{cases}\quad\begin{cases}x=11,\\y=43,\\z=3,\end{cases}\quad\begin{cases}x=13,\\y=21,\\z=37,\end{cases}\quad\begin{cases}x=13,\\y=37,\\z=21.\end{cases}$$

例 10 求出所有满足 $5(xy+yz+zx)=4xyz$ 的正整数解.

分析与解 这是三元三次不定方程，它可变形为 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5}$. 再将 x、y、z 排列一下大小顺序，便可得到相应的不等式，从而求出它们的取值范围，最后再来确定它们的正整数值.

不妨设 $x\leqslant y\leqslant z$，则有

$$\frac{3}{x}\geqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5}.$$

解得 $$x\leqslant\frac{15}{4}<4.$$

另有 $$\frac{1}{x}<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5},$$

解得 $$x>\frac{5}{4}>1.$$

所以 $$1<x<4,$$

故 $x=2$ 或 3.

(1)当 $x=2$ 时，有 $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{10}$.

则 $$\frac{2}{y}\geqslant\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{10}$$

所以 $$y\leqslant\frac{20}{3}<7$$

另 $$\frac{1}{y}<\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{10}$$

所以 $$y>\frac{10}{3}>3.$$

所以 $$3<y<7,\therefore\quad y=4,5,6$$

当 $y=4$ 时，有 $\frac{1}{4}+\frac{1}{z}=\frac{3}{10}$，$\therefore\quad z=20$；

当 $y=5$ 时，有$\frac{1}{5}+\frac{1}{z}=\frac{3}{10}$，∴ $z=10$；

当 $y=6$ 时，有$\frac{1}{6}+\frac{1}{z}=\frac{3}{10}$，∴ $z=\frac{5}{2}$(非整数).

(2)当 $x=3$ 时，有$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{15}$.

仿前可求得 $y=3$ 或 4，但此时 z 均无整数值.

这样可得到当 $x\leqslant y\leqslant z$ 时方程的正整数解为

$$\begin{cases}x=2,\\y=4,\\z=20,\end{cases}\quad\begin{cases}x=2,\\y=5,\\z=10.\end{cases}$$

由于 x,y,z 可以轮换，故可得原方程组的正整数解共有 12 组：

(2,4,10)、(2,20,4)、(4,2,20)、(4,20,2)、

(20,2,4)、(20,4,2)、(2,5,10)、(2,10,5)、

(5,2,10)、(5,10,2)、(10,2,5)、(10,5,2).

练习一

1. 求 $2x+5y=28$ 的正整数解.

2. 求方程

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=\frac{3}{7}$$

的所有整数解.

3. 求方程 $5x^2-xy-6=0$ 的整数解.

4. 求方程组$\begin{cases}x+y+z=0\\x^3+y^3+z^3=-18\end{cases}$ 的整数解.

5. 84 能否表示成若干个连续正整数的和的形式？如果不能，试给出证明；如果能，则给出所有的表示方法.

二、一元二次方程(一)

一元二次方程是初中数学的重要内容之一，初中数学竞赛中涉及到一元二次方程的问题也很多.这一讲讨论一元二次方程的解、根的判别式及韦达定理.

一元二次方程的一般式是

$$ax^2+bx+c=0(a\neq 0) \quad ①$$

$\Delta=b^2-4ac$ 叫做方程①的根的判别式，并且：

$\Delta>0\Longleftrightarrow$方程①有两个不等的实根；

$\Delta=0\Longleftrightarrow$方程①有两个相等的实根；

$\Delta<0\Longleftrightarrow$方程①没有实根.

方程①若有实根，则其根可由公式

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

求得.

设 x_1,x_2 是方程①的两个根，则

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

这两个等式表明了方程中根与系数之间的密切关系，通常称为①的韦达定理.韦达定理的逆定理也成立.

例 1 解关于 x 的方程

$$(m-2)x^2+(2m-3)x+m-4=0 \quad ①$$

分析与解 对于带有字母系数的方程，一般要对字母的取值进行讨论.因本题的已知条件并未指明关于 x 的方程是二次方程，故应对 $m-2=0$ 和 $m-2\neq 0$ 两种情况分别加以讨论.

当 $m-2=0$ 时，方程①为 $x-2=0$，所以 $x=2$.

当 $m-2\neq 0$ 时，方程①是关于 x 的二次方程，其根的判别式为

$$\Delta=(2m-3)^2-4(m-2)(m-4)=12m-23.$$

当 $m>1\frac{11}{12}$时，$\Delta>0$，方程①有两个不等实根.

$$x_{1,2}=\frac{(3-2m)\pm\sqrt{12m-23}}{2(m-2)}.$$

当 $m=1\frac{11}{12}$时，$\Delta=0$，方程①有两个相等实根.

$$x_{1,2}=\frac{3-2m}{2(m-2)}=5.$$

当 $m<1\frac{11}{12}$时，$\Delta<0$，方程①无实根.

例 2 b 为何值时，方程 $x^2-bx-2=0$ 和 $x^2-2x-b(b-1)=0$ 有相同的根？并求出它们相同的根.

分析与解 两个方程如果有相同的根，这个根就称为两个方程的公根. 两个一元二次方程最多有两个公根. 解决两个一元二次方程的公根问题的一般方法是：设公根为 α 并分别代入两个方程，得到一个关于 α^2 和 α 的二元一次方程组，消去 α^2 项得到一个关于 α 的一元一次方程，由此求得 α 和有关待定的常数.

设 α 是方程 $x^2-bx-2=0$ 与 $x^2-2x-b(b-1)=0$ 的公根，则

$$\alpha^2-b\alpha-2=0 \qquad ①$$

$$\alpha^2-2\alpha-b(b-1)=0 \qquad ②$$

②－①得

$$b\alpha-2\alpha-b(b-1)+2=0$$

因式分解，得

$$(b-2)(\alpha-b-1)=0$$

当 $b\neq 2$ 时，$\alpha-b-1=0$

$\therefore\quad \alpha=b+1.$

代入①或②，得

$b=1$, $\therefore$ $\alpha=2$.

当 $b=2$ 时，①和②都变为

$$\alpha^2-2\alpha-2=0$$

解之，得 $\alpha_1=1+\sqrt{3}$，$\alpha_2=1-\sqrt{3}$.

所以，当 $b=1$ 或 2 时，已知两方程有相同的根，当 $b=1$ 时，两方程有一个相同的根 2；当 $b=2$ 时，两方程有两个相同的根：$1+\sqrt{3}$，$1-\sqrt{3}$.

例 3 若方程 $x^2+(m-2)x+5-m=0$ 的两个实根都大于 2，求实数 m 的取值范围.

分析与解 设 x_1，x_2 为方程的两实根，要使 $x_1>2$，$x_2>2$，即 $x_1-2>0$，$x_2-2>0$，只须 $(x_1-2)(x_2-2)>0$ 且 $(x_1-2)+(x_2-2)>0$. 因此，在方程有实根的前提下，应用韦达定理及上述条件，可求出实数 m 的取值范围.

设方程两实根分别为 x_1，x_2，于是

$$\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\(x_1-2)+(x_2-2)>0,\\(x_1-2)\cdot(x_2-2)>0.\end{cases}$$

$\because$ $x_1+x_2=2-m$，$x_1x_2=5-m$，

$$\therefore\ \begin{cases}(2-m)^2-4(5-m)\geqslant 0\\2-m-4>0\\(5-m)-2(2-m)+4>0.\end{cases}$$

解不等式组，得 $-5<m\leqslant -4$.

例 4 已知关于 x 的二次方程 $x^2-k=2x$（k 为实数）无实根. 试证明关于 x 的二次方程

$$x^2+2kx+1+2(k^2-1)(x^2+1)=0$$

也没有实根.

分析与证明 把两个关于 x 的二次方程化为一元二次方程的一般形式，分别得出它们根的判别式 Δ_1，Δ_2. 显然 Δ_1 和 Δ_2 都是和 k 有关的代数式，利用已知条件可知 $\Delta_1<0$，由此得到 $\Delta_2<0$.