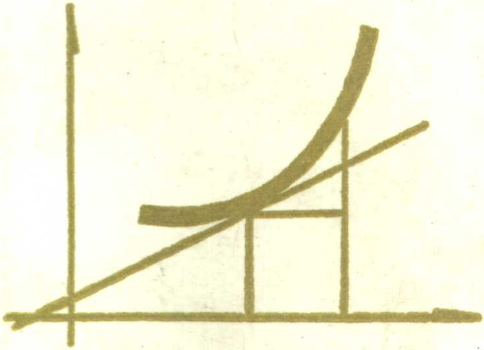
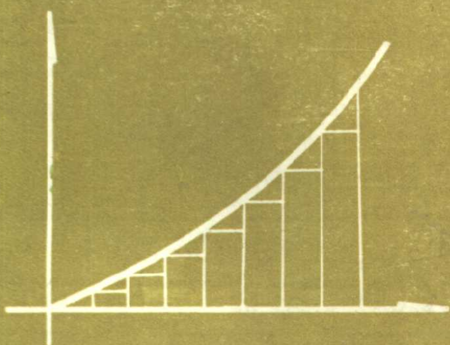
主编 张广梵　副主编 于采盛

北京经济学院出版社

微积分

WEI JI FEN





财经类院校基础数学(一)

微 积 分

主 编 张广梵
副主编 于采盛

北京经济学院出版社

1992 · 北京

(京)新登字 211 号

微 积 分

Weijifen

张广梵 主编

北京经济学院出版社出版
(北京市朝阳区红庙)
北京市通县永乐印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行

787×1092毫米 32开本 14印张 326千字
1992年8月第1版 1992年8月第1版第1次印刷
印数:00 001—5 000
ISBN7-5638-0324-6/O·7
定价:6.50元

前　言

本书以“高等学校财经类专业核心课程教学大纲经济数学基础”和“高等数学(一)自学考试大纲”为编写依据。

本书编委有(以姓氏笔划为序):于采盛、刘佩霞、张广梵、劳允琦、陈承萱、唐森玉、秦源。

自 1987 年夏,在各编委多年教学研究与实践的基础上,经多次研讨,由各编委分章执笔,油印成书,做为校内教材使用,并已增印一次。

1990 年 9 月,决定由张广梵副教授任主编,于采盛老师任副主编,唐森玉副教授任主审。经过诸编委对油印本认真地研讨,决定全书由主编执笔,编委分章审阅发表意见,由主审对全书提出修改建议,再由主编斟酌定稿。

本书有以下特点:

1. 突出概念的准确性与论证的严谨性。例如积分中值定理,各类教材一般都是利用估值定理和介值定理进行论证。这种证法没有证出 ξ 位于积分区间内部这一事实,我们给出了新的证法。

2. 突出解题方法的多样性与灵活性。对同一类型的问题,引导学生从不同角度求解,提高学生的解题能力,对自学考试青年尤有帮助。

3. 近年来,硕士研究生入学试题常涉及微分中值定理与积分中值定理和变上限积分,我们加强了这方面的内容。

4. 突出财经类的特点，增强微积分在经济中的应用。

5. 第八章微分方程，我们采用了常规处理方法，以便学生易于接受，即使个别地方不很严谨。

6. 习题分 A、B 两类，A 类为一般题，B 类为客观题。笔者力争将常见错误收入习题中，以利读者确实搞清概念。

7. 在写法上，每章开头有学习目的与要求，结尾有回味与引申，前后呼应，对读者有一定的参考价值。

书中有些内容加了“ * ”号，依各专业的不同需要和学时安排可略去不讲。

本书读者对象为财经类院校本科生、大专生、自学考试青年、经济与管理方面的科技工作者和财经类院校数学教师。

本书从编写到出版，得到了北京经济学院领导、基础课部领导的大力支持和方向性的指导，北京工业大学梁在中副教授也对本书提出了许多宝贵意见，在此深表谢意。

由于编者水平有限，时间仓促，缺点、错误在所难免，望广大读者批评指正。

编　者

1991 年 9 月于北京经济学院

目　　录

第一章　函　数

学习目的与要求

学习本章，要求掌握函数的有关概念，函数的几种特性，基本初等函数表达式及其图形，复合函数与反函数的意义，学会建立简单的特别是与经济问题有关的函数关系。

微积分是在实数范围内，用极限的方法研究函数的一门学科，因而我们有必要对函数作系统全面讲述，使读者更深入一步理解函数有关概念，较熟练地掌握有关运算，为以后学习做好准备。

§1.1　绝对值

一、实数 x 的绝对值

实数 x 的绝对值记作 $|x|$，定义为

$$|x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0. \end{cases}$$

我们也可以用 x^2 开平方取算术根来表示 $|x|$，即

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

两种表示形式不同，但实质上是一样的。也就是说，任何一个实数的绝对值是一个大于或等于零的数，在数轴上 $|x|$ 表示点 x 到原点的距离。例如 $|x|=3$ 表示点 x 到原点的距离等于 3，当 $x>0$ 时，由定义 $x=3$；当 $x<0$ 时，由定义 $x=-3$。也就是说，在数轴上距原点为 3 的点有两个：$x=3$ 和 $x=-3$。仿此，$|x-3|=2$ 表示点 x 到点 3 的距离等于 2，由定义点 x 有两个：$x=5$ 和 $x=1$（图 1.1）。

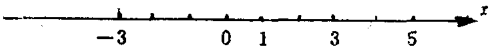


图 1.1

由定义可知

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|,$$

$$|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a \qquad (a>0).$$

〔例 1〕解 $|x-3|<2$.

〔解〕 因为 $|x-3|<2$，所以 $-2<x-3<2$.

同加上 3 得 $\quad 1<x<5$.

在数轴上表示点 x 到点 3 的距离小于 2。

〔例 2〕解 $|-2x+1| \leqslant 3$.

〔解〕因为 $|-2x+1| \leqslant 3$，所以 $-3 \leqslant -2x+1 \leqslant 3$.

同加上 -1 得 $\quad -4 \leqslant -2x \leqslant 2$.

同除以 -2 得 $\quad -1 \leqslant x \leqslant 2$.

二、绝对值的性质

（一）$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$；

（二）$\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$；

（三）$|x+y| \leqslant |x| + |y|$；

(四) $||x|-|y||\leqslant|x-y|$.

性质(一)、(二)明显成立，现证(三)和(四)如下：

〔证(三)〕 因为 $-|x|\leqslant x\leqslant|x|$，$-|y|\leqslant y\leqslant|y|$，

相加得 $$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant|x|+|y|.$$

所以 $$|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

〔证(四)〕 因为 $|x|=|x-y+y|\leqslant|x-y|+|y|$，

所以 $|x|-|y|\leqslant|x-y|$.

将 x 与 y 互换，$-(|x|-|y|)=|y|-|x|\leqslant|y-x|=|x-y|$，

由此 $$||x|-|y||\leqslant|x-y|.$$

三、邻域

满足不等式

$$|x-a|<\delta \quad 或 \quad a-\delta<x<a+\delta$$

的实数 x 的全体，叫做点 a 的 δ 邻域，点 a 叫做邻域的中心，δ 叫做邻域的半径。它表示以 a 为中心，以 δ 为半径在数轴上截得的不包括端点在内的线段(图 1.2)。人们也常把 a 的 δ 邻域叫 a 的附近。

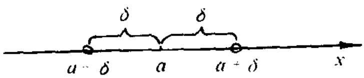


图 1.2

§1.2 常量与变量

客观世界一切事物都在不断地运动和变化，伴随着事物的变化，有的量取各种不同的值，有的取同一数值。在研究某一事物的过程中，可以取不同数值的量叫做变量，相对保持同一数值的量叫做常量。例如，火车由北京开往天津的过程中，

火车经过的路程、火车的速度是变量，车厢的长度、座位个数是常量。

一个量是常量还是变量，是相对的。在某种情况下可认为是常量，而在另一种情况下可能是变量。例如商品的价格、一个人的体重，在某一段时间内是一个常量，在一段长时间内它是一个变量。客观事物，变是绝对的，不变是相对的。为了讨论问题方便，我们把常量看作一种特殊的变量。

我们通常用英文字母表靠前的小写字母 a、b、c 等表示常量，靠后的字母 x、y、z 等表示变量。

任何一个变量，总有一定的变化范围，常用“区间”来表示。所谓区间，是指介于某两个实数之间的全体实数，而这两个实数称为此区间的端点。例如，设 a、b 为两个实数，且 $a<b$，则满足不等式

$$a \leqslant x \leqslant b$$

的全体实数叫做闭区间，记作$[a,b]$。在数轴上表示线段 ab 上所有的点（图 1.3）。

图 1.3

满足不等式

$$a < x < b$$

的全体实数叫做开区间，记作(a,b)。在数轴上表示线段 ab 上去掉端点后所有的点（图 1.4）。

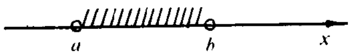


图 1.4

满足不等式

$$a < x \leqslant b \quad 或 \quad a \leqslant x < b$$

的全体实数叫做半开区间，分别记为$(a,b]$或$[a,b)$。在数轴上分别表示把图 1.3 中的 a 点改为空圈或把 b 改为空圈。

以上区间都是在两个有限数之间，所以也称为有限区间。还有一类区间叫无穷区间，如$[a,+\infty)$表示满足不等式 $a\leqslant x$ 的全体实数 x（图 1.5）；$(-\infty,b)$表示满足不等式 $x<b$ 的全体实数 x（图 1.6）；$(-\infty,+\infty)$表示全体实数，或记作 $-\infty<x<+\infty$，等等。记号“$-\infty$”和“$+\infty$”不是数，分别读作“负无穷”与“正无穷”。

图 1.5

图 1.6

§1.3 函数的概念

一、函数的定义

在研究某事物的过程中，我们不仅要分清哪些是变量，哪些是常量，更重要的还要弄清变量之间的依赖关系，这种依赖关系，通常称为函数关系。我们给出如下定义：

定义 1.1 设 x 与 y 是两个变量，如果变量 x 在某一范围中任取一个数值时，变量 y 按照一定的规则总有一个确定的值和这个 x 值相对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x).$$

其中 x 叫做自变量，y 叫做因变量，f 表示由 x 确定 y 值的对应规则。这时也说变量 x 与 y 有函数关系。

〔例 1〕某商品共有 1000 件，以单价 0.3 元销售，则总收

入 y 是销售量 x 的函数。

这是因为，x 在 $\{0,1,2,\cdots,1000\}$ 中任取一个值，按照规则 $y=0.3x$，y 总有一个确定的值和它对应，所以 y 是 x 的函数，即

$$y=f(x)=0.3x.$$

这里 f 表示规则，即 0.3 乘以 x.

说明两点：

1. 若对某一范围内每给一个 x 值，按某规则 y 只有一个确定值与 x 值对应，这种函数称为单值函数；若有 x 与两个或两个以上 y 值对应，则称为多值函数。例如，$y=f(x)=\pm\sqrt{25-x^2}$就是一个双值函数。我们以后讨论的函数都指单值函数。对于多值函数通常是拆成若干个单值函数进行处理，如上面的双值函数可拆成 $y=\sqrt{25-x^2}$和 $y=-\sqrt{25-x^2}$.

2. 用集合概念定义为：设 A、B 是两个非空数集，f 是一个确定规则，如果对于每一个数 $x\in A$，通过 f 有唯一一个数 $y\in B$ 与它对应，则称 f 是 A 上的函数，或说 y 是 x 的函数，记作

$$x\xrightarrow{f}y \quad 或 \quad y=f(x).$$

二、函数的定义域

如果自变量 x 取定某一值 x_0，函数 y 有一个确定的值与它对应，我们就称函数 y 在 x_0 处（点）有定义，否则就称函数 y 在 x_0 点无定义。

使函数有定义的自变量值的全体，叫做函数的定义域。函数的定义域也就是自变量取值的范围。如例 1 中函数 y 的定义域为 $\{0,1,2,\cdots,1000\}$。

一般地，对应规则为 f 的函数，其定义域记为 $D(f)$。

由上述讨论可知，研究一个函数，必须要讨论函数的定义

域，所以如何求函数的定义域是一个重要问题，现分两种情况讨论。

1. 纯数学式子给出的函数关系，其定义域称为自然定义域，就是使得该式子在计算上有意义的全体自变量值组成的集合。其求法大体分类如表 1.1：

表 1.1

	函　　数	定　义　域
1	$y=\sqrt[2n]{u(x)}\quad n=1,2,\cdots$	$\{x\mid u(x)\geqslant 0\}$
2	$y=\log_a u(x)$	$\{x\mid u(x)>0\}$
3	$y=\dfrac{1}{v(x)}$	$D(v)\cap\{x\mid v(x)\neq 0\}$
4	$y=\arcsin u(x)$ $\arccos u(x)$	$\{x\mid \lvert u(x)\rvert\leqslant 1\}$

函数的和、差、积的定义域是每个函数定义域的交集；对于商，由于$\dfrac{u(x)}{v(x)}=u(x)\cdot\dfrac{1}{v(x)}$，也可按积来处理。

〔例 2〕求 $y=\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$的定义域，并在数轴上表示出来。

〔解〕由$\begin{cases}3x-2>0\\3x-2\neq 1\end{cases}$，　解得　$\begin{cases}x>\dfrac{2}{3}\\x\neq 1\end{cases}$.

所以定义域为 $x>\dfrac{2}{3}$且 $x\neq 1$，或表示为$(\dfrac{2}{3},1)\cup(1,+\infty)$。数轴上表示如图 1.7。

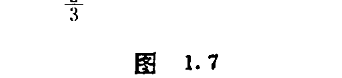


图　1.7