数理化自学丛书

平　面　几　何

第　二　册

数理化自学丛书编委会
数　学　编　写　小　组　编

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书介绍了平面几何中的相似形，有关三角形和圆的线段间的度量，多边形的面积，正多边形和圆的周长、面积等。讲解详尽，说理透彻，并配有大量插图和例题，适宜于自学。

本书每节每章之后都配有一定数量的习题，供读者选用。题号前有“*”的要难一些，可暂时不做。正文中用小字排印的部分、初次阅读时可以略去。

本书可供青年工人，知识青年，在职干部或学习过本书第一册的读者自学之用，也可供中等学校青年教师参考。

数理化自学丛书

平面几何（第二册）

数理化自学丛书编委会
数 学 编 写 小 组 编

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路 450 号）

北 京 出 版 社 重 印
北京市新华书店发行
北京印刷二厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 10 字数 223,000
1961 年 4 月第 1 版 1979 年 1 月第 1 次印刷

书号：13119·37 定价：0.63 元

目录

重印说明

第一章 相似形……1

成比例的线段……1

§1·1 线段的比……1

§1·2 成比例的线段……11

§1·3 平行线截得比例线段定理……19

§1·4 应用平行线截得比例线段定理的作图题……32

§1·5 三角形内角、外角平分线性质……38

相似三角形……46

§1·6 相似多边形……46

§1·7 相似三角形的判定……52

§1·8 相似直角三角形的判定……67

§1·9 相似三角形的性质……74

§1·10 比例规和对角线尺……80

相似多边形……84

§1·11 相似多边形的性质……84

§1·12 多边形相似的判定……87

§1·13 位似形……93

§1·14 应用作位似形解作图题……100

§1·15 放缩尺……106

本章提要……109

复习题一……109

第二章 有关三角形和圆的线段间的度量关系……115

和三角形有关的线段间的度量关系……116

§2·1 直角三角形中成比例的线段……116

§2·2 勾股定理……122

§2·3 勾股定理的推广……128

§2·4 勾股定理的逆定理……131

§2·5 三角形的中线、高、外接圆半径和角平分线的计算公式……136

和圆有关的线段间的度量关系……141

§2·6 关于圆的切线和割线间的度量关系……141

§2·7 关于圆内相交两弦的度量关系……146

代数作图法……151

§2·8 代数作图法的基本作图题……151

本章提要……159

复习题二……160

第三章 多边形的面积……165

§3·1 多边形的面积……165

§3·2 矩形的面积……168

§3·3 平行四边形的面积……176

§3·4 三角形的面积……182
§3·5 梯形的面积……192
§3·6 相似多边形的面积的比……197
§3·7 关于多边形面积的作图题……206
本章提要……219
复习题三……219
第四章 正多边形……222
§4·1 圆的内接和外切正多边形……223
§4·2 正多边形的外接圆和内切圆……230
§4·3 关于正多边形的计算题……234
§4·4 正多边形的作图……248
本章提要……258
复习题四……259
第五章 圆的周长和面积……262
§5·1 圆的周长……262
§5·2 圆弧的长……272
§5·3 弧度制……278
§5·4 圆的面积……283
§5·5 扇形的面积……290
§5·6 弓形的面积……296
本章提要……301
复习题五……301
总复习题……304
习题答案……309

第一章 相 似 形

成比例的线段

§1·1 线 段 的 比

1. 线段的度量 为了要知道竹竿的长度，我们就用尺去量．这里所谓“量”，就是把一把尺的一端和竹竿的一端对齐，然后把这把尺紧密地沿着竹竿一尺接一尺地比较，最后得到了竹竿的长度．例如5尺，这表示从长度来讲，竹竿是尺的五倍(图1·1)．

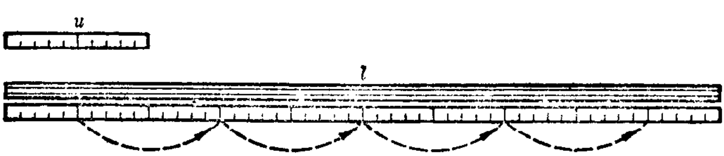


图 1·1

用几何的观点来研究，尺和竹竿可以分别看做是线段 u 和 l；用尺量竹竿的过程，可以看做是用线段 u 去量线段 l，得出线段 l 含有线段 u 多少倍的过程．这里线段 u 叫做**长度单位**，线段 l 是**被度量的线段**，最后所得的倍数叫做**量数**．说得更确切一些，它是以线段 u 作长度单位去量线段 l 所得的量数．线段的量数和线段的长度是有区别的：量数只是一个正数，量数后面注明了长度单位才是长度．在前面的实例中，

“5”是以尺作长度单位去量竹竿所得的量数，“5 尺”才是竹竿的长度．度量线段的目的就是要得到一个量数．要得到线段的量数首先要选定作为长度单位的线段．用两种不同的长度单位先后去度量同一条线段，所得的两个量数显然是不等的．例如用市尺作单位去量线段 l，如果所得的量数是 6，用m（米尺）作单位去量同一线段，所得的量数就是 2 了．

但是，用线段 u 量线段 l 和用尺量竹竿毕竟有些不同．给定了两条线段 u 和 l 的图形之后，我们很难想象，在图形上“拿起”线段 u，紧贴着线段 l，对齐了两端，一次接一次地进行比较．这里就得利用分割规了．首先把分割规两脚的两个尖端分别放在线段 u 的两个端点上（图 1·2(1)），然后保持分割规两脚张口的大小，把一个脚的尖端放在线段 l 的一个端点 A 上，依着图 1·2(2) 虚线所指的方向，在线段 l 上，连续截取等于 u 的线段 $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \cdots$，这样就在图形上进行了用线段 u 度量线段 l 的过程．

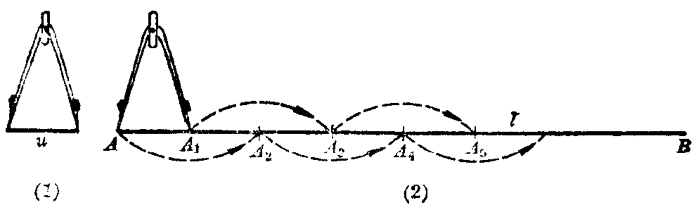


图 1·2

用尺量竹竿是一件十分简单的事，但不能因此把线段的度量问题也理解为简单的问题．用长度单位 u 去截线段 l 是否一定截得尽？截不尽怎么办？度量线段所得的量数究竟是怎样的数？这些问题都是比较复杂的．下面我们将详细地、精确地来研究它们．

图 1·3 中，线段 u 是长度单位，线段 AB 是要度量的线段. 现在利用分割规在线段 AB 上，从端点 A 起，连续截取等于 u 的线段 AA_1, A_1A_2, A_2A_3, …. 这样截取的结果总不出下面两种情况中的一种：

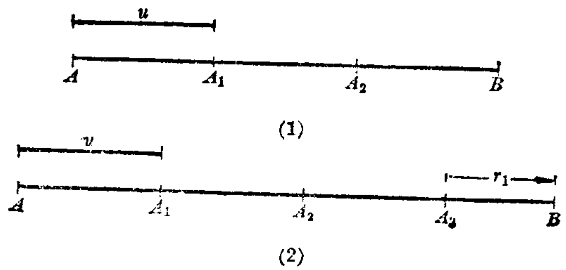


图 1·3

(1) 截了 m 次以后(这里 m 是一个自然数)，恰巧截尽(图 1·3(1))；

(2) 截了 m 次以后，得到了小于 u 的剩余线段 r_1(图 1·3(2)).

对于第一种情况，线段 AB 恰巧是线段 u 的整数倍. 所得的量数是一个正整数 m. 在图 1·3(1) 里，$m=3$. 度量线段 AB 的过程到此结束.

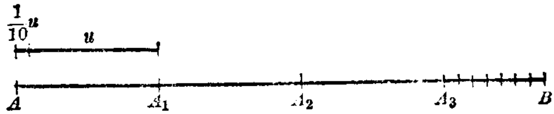
对于第二种情况，线段 AB 的量数还没有确定，只知道它的量数应当大于正整数 m，但是小于正整数 $m+1$. 在图 1·3(2) 里，线段 AB 的量数大于 3 而小于 4，度量的过程还没有结束. 我们把它叫做第一回截取. 在第一回截取里所得的剩余线段是 r_1. 为了进一步确定线段 AB 的量数，我们可以采用比 u 小的线段作长度单位，继续度量线段 r_1.

现在用线段 u 的 $\frac{1}{10}$ 作单位来度量剩余线段 r_1，从线段 r_1

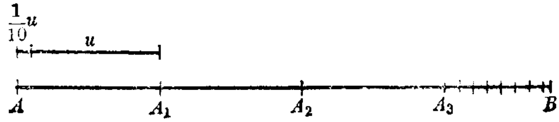
的左端起，用分割规连续截取等于$\frac{1}{10}u$的线段，截取的结果总不出下面的两种情况之一：

(1) 截了m_1次以后，线段r_1恰巧被截尽(图1·4(1))。

(2) 截了m_1次以后，得到了小于$\frac{1}{10}u$的剩余线段r_2(图1·4(2))。



(1)



(2)

图 1·4

对于第一种情况，线段r_1恰巧是线段$\frac{1}{10}u$的整数m_1倍，这里m_1可以等于从1到9的任何一个正整数．这时线段AB的量数已经确定为有限小数$m+\frac{m_1}{10}$．在图1·4(1)里$m+\frac{m_1}{10}=3.7$．度量线段AB的过程到此结束．

对于第二种情况：线段AB的量数仍旧没有确定，只知道它的量数大于$m+\frac{m_1}{10}$而小于$m+\frac{m_1+1}{10}$，这里m_1可以等于$0\left(如果r_1<\frac{1}{10}u\right)$，也可以等于从1到9的任何一个正整数

$\left(\text{如果}\, r_1 > \frac{1}{10}u\right)$. 在图 1·4(2) 里，线段 AB 的量数大于 3.7 而小于 3.8. 度量线段 AB 的过程还没有结束，我们把这一回的截取叫做第二回截取. 在第二回截取里所得的剩余线段是 r_2. 为了更进一步确定线段 AB 的量数，我们可以采用比 $\frac{1}{10}u$ 小的线段作长度单位，继续度量线段 r_2.

线段的度量就是这样进行的. 从上面的讨论，可以得到度量线段的初步结论：用长度单位 u 去度量线段 l. 如果线段 l 恰巧被 u 所截尽，那末线段 l 的量数是一个正整数；如果截不尽，那末再用 $\frac{1}{10}u$，$\frac{1}{100}u$，$\frac{1}{1000}u$，…做长度单位分别去截第一回剩余线段 r_1，第二回剩余线段 r_2，第三回剩余线段 r_3，…. 如果某一回的剩余线段恰巧被截尽，那末线段 l 的量数是一个正有限小数.

用线段 u，$\frac{1}{10}u$，$\frac{1}{100}u$，…分别去截线段 l，第一回剩余线段 r_1，第二回剩余线段 r_2，…，会不会每截一次总有剩余，线段的度量过程将无限止地进行下去呢？下面的两个例题将说明这个问题.

例 1. 用线段 AB 作长度单位去量线段 CD，所得的量数是 +3，研究用线段 CD 作长度单位去度量线段 AB 的度量过程（图 1·5）.

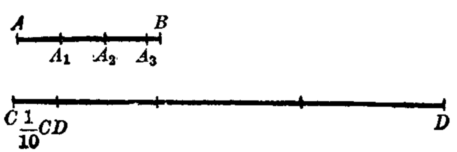


图 1·5

【解】 依照题意，线段 CD 含有线段 AB 的 3 倍. 显然 $CD > AB$. 用 CD 作长

度单位去度量 AB 时，第一回就得用 $\frac{1}{10}CD$ 去截 AB.

因为 $AB-3\cdot\frac{1}{10}CD=AB-3\cdot\frac{1}{10}\cdot 3AB=\frac{1}{10}AB$，所以用 $\frac{1}{10}CD$ 去截 AB，截了 3 次而得到第一回剩余线段 $\frac{1}{10}AB$.

因为 $\frac{1}{10}AB-3\cdot\frac{1}{100}CD=\frac{1}{10}AB-3\cdot\frac{1}{100}\cdot 3AB=\frac{1}{100}AB$，所以用 $\frac{1}{100}CD$ 去截第一回剩余线段 $\frac{1}{10}AB$，截了 3 次而得第二回剩余线段 $\frac{1}{100}AB$.

因为 $\frac{1}{100}AB-3\cdot\frac{1}{1000}CD=\frac{1}{100}AB-3\cdot\frac{1}{1000}\cdot 3AB=\frac{1}{1000}AB$，所以用 $\frac{1}{1000}CD$ 去截第二回剩余线段 $\frac{1}{100}AB$，截了 3 次而得第三回剩余线段 $\frac{1}{1000}AB$.

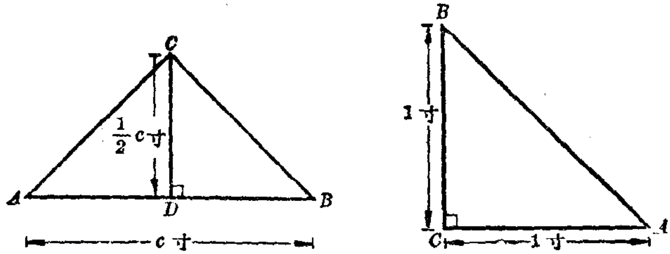
……………………

度量的过程将无限地继续下去，所得的量数是一个循环小数 0.333….

例 2. 在等腰直角三角形 ABC 里，腰 AC 的长度是一寸．现在以寸作长度单位，求斜边 AB 的量数(图 1·6).

【解】 我们将利用计算三角形面积的方法来求得 AB 的量数①．作斜边 AB 上的高 CD（图 1·6(1)）．因为三角形

① 在算术里已经学习过计算三角形面积的方法．三角形的面积等于底和高乘积的一半．



(1)　　　　(2)

图 1·6

ABC 是等腰的，所以 CD 又是斜边上的中线，从而 $AD=\frac{1}{2}AB$. 容易看出，直角三角形 ACD 也是等腰的，所以 $CD=AD$, $CD=\frac{1}{2}AB$. 设AB的长度为 c 寸，这里 c 是它的量数，则 CD 的长度是$\frac{1}{2}c$ 寸. 依据三角形面积公式：

$$\text{三角形 } ABC \text{ 的面积}=\frac{1}{2}\cdot c\cdot\frac{c}{2}=\frac{1}{4}c^2\,(\text{平方寸}).\quad(1)$$

但是直角三角形 ABC 的直角边 AC, BC 可以分别做三角形的底边和高（图 1·6(2)）. 因为 AC, BC 的长度都是一寸，所以

$$\text{三角形 } ABC \text{ 的面积}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{1}{2}\,(\text{平方寸}).\quad(2)$$

由(1),(2)两式，得

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{4}c^2,\quad c^2=2,\quad \therefore\quad c=\sqrt{2}.$$

这里斜边 AB 的量数是一个无理数$\sqrt{2}$，它是一个无限不循环小数，开头几位数字是 1.4142…. 这表示用线段 AC

去截 AB，截了1次而得剩余线段 r_1；用线段 $\frac{1}{10}AC$ 去截 r_1，截了4次而得剩余线段 r_2；用线段 $\frac{1}{100}AC$ 去截 r_2，截了1次而得 r_3；…．度量的过程将无限止地继续下去．

从前面的两个例题可以知道：度量线段的过程有时将无限止地继续下去，这时线段的量数可能是一个正的循环小数，也可能是一个正的无理数(无限不循环小数)．

一般地说，在选定了长度单位线段之后，每一条线段总有一个量数，这量数可能是正整数、正有限小数、正循环小数或正无限不循环小数．在代数学里，把整数、分数(有限小数、循环小数)叫做**有理数**，把无限不循环小数叫做**无理数**；有理数和无理数总称**实数**．因此我们有下面的结论：以确定的长度单位线段去度量任意线段，总有一个确定的正实数作为它的量数．

2．两条线段的比　给定了两个数 a 和 b，要想知道 a 是 b 的多少倍($a>b$)，或者 a 是 b 的几分之几($a<b$)，我们可以用 b 去除 a．所得的商叫做 a 和 b 两数的**比**；这里被除数 a 叫做比的**前项**，除数 b 叫做比的**后项**．两个数 a 和 b 的比通常表达为 $\frac{a}{b}$ 的形式，或者 $a:b$ 的形式．

两个数的比的概念可以推广到两条线段的比．

用同一长度单位去量两条线段，所得的两个量数的比叫做这两条线段的比．

在图1·7里，线段 EF 是长度单位，用 EF 分别去量线段 AA' 和 BB'，必然得到两个量数 a 和 b．量数 a 和 b 的比就是线段 AA' 和 BB' 的比，并且表达为 $\frac{AA'}{BB'}=\frac{a}{b}$，或者

$AA':BB'=a:b$. 在图 1·7 里，显然有 $\frac{AA'}{BB'}=\frac{6}{11}$.

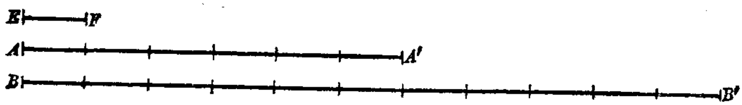


图 1·7

确定线段的量数必须首先确定长度单位．长度单位改变了，一条线段的量数也跟着改变．例如用尺做长度单位量竹竿，如果量数是 5；长度单位改用了寸，这根竹竿的量数就变为 50 了．

线段的量数既由所选的长度单位确定，两线段的比又由两线段的量数确定，那末，改变了长度单位，两线段的比是否也要改变呢？

假设用寸作长度单位，两条线段的量数分别为 50 和 30．改用尺作长度单位后，它们的量数分别改变为 5 和 3 了．改用分作长度单位后，它们的量数又分别改变为 500 和 300．我们先后采用尺，寸，分作长度单位，两线段的比先后为：$\frac{5}{3}$，$\frac{50}{30}$ 和 $\frac{500}{300}$，它们是相等的．由此可见，每改变一次长度单位，两条线段的量数各扩大或缩小同样的倍数，对于两线段的比来讲，正好把它的前项和后项扩大或缩小同样的倍数，比的值是不会改变的．因此，两线段的比和所采用的长度单位没有关系．

例 3. 线段 AB 和 CD 的长度分别为 2.1 尺和 1.4 米．求两线段 AB 和 CD 的比．如果用 CD 作长度单位，求出线段 AB 的量数．

【解】 要求 AB 与 CD 的比，首先要使它们的长度单位相同. CD 的长度 1.4 米=4.2尺，所以 $\frac{AB}{CD}=\frac{2.1}{4.2}=0.5$.

用 CD 作长度单位去度量线段 AB，所得的量数 a，就是线段 AB 含有线段 CD 的倍数，所以 $a=\frac{2.1}{4.2}=0.5$.

从这个例题可以知道，两线段 AB,CD 的比，也可以理解为以线段 CD 作长度单位去度量线段 AB 所得的量数.

习 题 1·1

1. 一条线段的量数一定是有理数吗？并举出例子.

2. 线段 a 和长度单位 l 分别含有第三线段 c 的 54 倍和 15 倍，求出线段 a 的量数.

3. 用圆规和直尺任意作一个正方形和正三角形；再利用分割规截取相等线段的方法，证明：

(1) 以正方形的一边为长度单位，量它的对角线所得的量数，精确到0.1的时候是 1.4.

(2) 以正三角形一边为长度单位，量它的高所得的量数，精确到0.1的时候是 0.8.

4. "线段"和"线段的长度"是一样的吗？为什么？

5. 线段 a 和 b 的长度分别是 5 厘米和 4 厘米，求出它们的比. 如果改用 1 寸长的线段为长度单位时，它们的量数分别是多少？它们的比有没有变化？

6. 什么是两线段之比？它一定是有理数吗？上题中，如果采用线段 b 做长度单位，两线段之比如何？

7. 把一条长 56 厘米的线段分成 1:2:3 的三段，然后求出每一个分点把全线段分成两部分的比.

8. 点 C 把线段 AB 分成 $AC:CB=2:3$. 已知 AB 为 48 厘米，求 AC 和 CB 的长.

9. 如果 $AB=12$ cm, 那末延长几厘米后可以使得 $AC:BC=5:2$? 这里 C 是延长线的终点.

10. 线段 AB 被点 C 分成 $AC:CB=3:2$, 求 AC 和 AB 的比, 以及 AB 和 CB 的比.

§1·2 成比例的线段

在算术里，我们已经学习过关于比例的概念，比例是表示两个比相等. 如果两个数 a 和 b 的比等于另外两个数 c 和 d 的比，那末我们说四个数 a, b, c, d 组成一个比例 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，或 $a:b=c:d$.

在等式 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 里，a, d 叫比例的**外项**，b, c 叫比例的**内项**，d 叫做 a, b, c 的**第四比例项**.

如果 a 和 b 的比等于 b 和 c 的比，即 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$，那末 b 叫做 a 和 c 的**比例中项**.

四个数组成比例的概念，可以推广为四条线段组成比例的概念.

如果线段 a 和 b 的比等于线段 c 和 d 的比，线段 a, b, c, d 叫做**成比例的线段**.

在图 1·8 中，线段 a 和 b 的比等于 $\frac{4}{7}$，线段 c 和 d 的比也

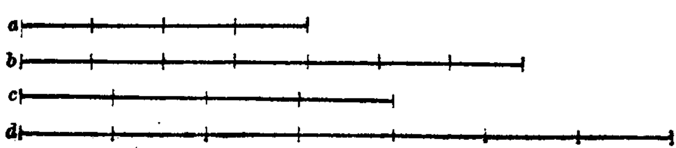


图 1·8

等于$\frac{4}{7}$. 所以线段 a, b, c, d 是成比例的线段.

例1. 在图1·9中, DE, $D'E'$ 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的中位线. 试证线段 BC, DE, $B'C'$, $D'E'$ 是成比例的线段.

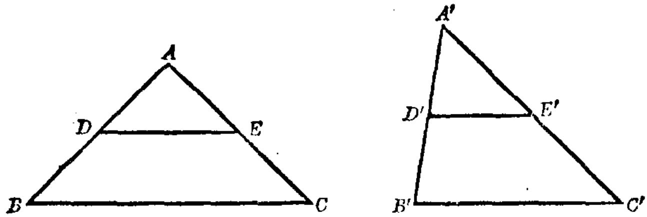


图 1·9

已知 DE, $D'E'$ 分别为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的中位线.

求证 $\frac{BC}{DE}=\frac{B'C'}{D'E'}$.

【证】 因为 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线, BC 是底边, 所以 $BC=2DE$, 或 $\frac{BC}{DE}=2$.

同理可证: $\frac{B'C'}{D'E'}=2$. 从而 $\frac{BC}{DE}=\frac{B'C'}{D'E'}$.

依据两线段的比的定义: 两线段的比是用同一长度单位去量两条线段所得的量数的比, 四条线段组成的比例实际上是它们的四个量数所组成的比例. 因此关于数的比例的各个性质完全适用于线段的比例.

下面是关于比例的一些主要性质的定理. 在定理里的所有字母都代表不等于零的实数. 有些定理比较简单, 读者可参阅括号里的提示, 自己证明.

定理1 如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,那末$ad=bc$$\left(\text{即将等式}\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\text{的两端各乘以}bd\right)$.

定理2 如果$ad=bc$,那末可以以a和d为比例外项(或者比例内项),以b和c为比例内项(或者比例外项)组成比例(即以db除等式$ad=bc$的两端).

定理3(反比定理) 如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,那末$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$\left(\text{把等式}\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\text{两端各乘以}bd\text{,再各除以}ac\right)$.

定理4(更比定理) 如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,那末$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$,$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$$\left(\text{把等式}\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\text{的两端各乘以}\frac{b}{c}\text{或}\frac{d}{a}\right)$.

定理5(合比定理) 如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,那末$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

已知 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

求证 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

【证】 $\because$ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\therefore$ $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$. 通分相加,得

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}.$$

定理6(分比定理) 如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,那末$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$\left(\text{把等式}\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\text{的两端各减}1\text{,再通分}\right)$.