教育部高职高专规划教材
Jiaoyubu Gaozhi Gaozhuan Guihua Jiaocai

经济数学基础

上册

顾静相 主编
钟 宜 傅修文 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

730

教育部高职高专规划教材

经济数学基础

上 册

顾静相 主编
钟宜 傅修文 编

高等教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

经济数学基础　上册/顾静相主编．—北京：高等教育出版社，2000

教育部高职高专规划教材

ISBN 7-04-008706-5

Ⅰ．经…　Ⅱ．顾…　Ⅲ．经济数学-高等教育：职业教育-教材　Ⅳ．F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 26705 号

经济数学基础（上册）

顾静相　主编

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	邮政编码	100009
电　　话	010-64054588	传　　真	010-64014048
网　　址	http：//www.hep.edu.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京地质印刷厂		
开　　本	850×1168　1/32	版　　次	2000 年 7 月第 1 版
印　　张	7.625	印　　次	2000 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	180 000	定　　价	8.20 元

前　言

在进入21世纪之际，我国的高等教育正面临进一步发展的契机，高等职业教育是加速发展的高等教育的一个重要组成部分. 为了适应高职高专教育发展的需要，急需编写适用的、具有特色的教材. 本教材正是针对这一需要编写的.

本书是教育部高职高专规划教材，是按照教育部最新制定的《高职高专教育经济数学基础课程教学基本要求》编写的. 适用于三年制高职高专经济和管理类专业. 教材内容包括微积分、线性代数和概率论与数理统计等三方面的内容，建议总学时为132学时左右.

在编写教材的过程中，我们参考了国内外流行的有关教材，力图吸收它们的优点，编写出既反映本学科特点，又便于师生使用的高质量的教材. 我们主要考虑了下述几个问题：

1. 本书作为一门数学基础课教材，应尽量保持数学学科的科学性和系统性，同时努力使“以应用为目的，以必需够用为度”的原则在教材中有所体现. 因此，本教材不追求理论体系的完整性. 许多概念、定理尽量采用学生容易理解的方式叙述，并选配适量的例题、习题，使学生能掌握基本理论和方法.

2. 本课程是三年制高职高专经济和管理类专业的必修基础课，其内容多是经典的理论和方法. 掌握这些内容是学习现代经济和管理理论的基础. 因此，本教材介绍了一定数量的经济应用的内容，使读者了解并逐步学会运用数学方法解决实际问题. 然而，我们认为本教材不宜过分强调数学在现代经济和管理中的应用，也不宜提出一门基础课所不能承担的任务.

3. 教材应有适量的典型例题和习题，这对学生掌握有关的

理论、方法具有重要的作用．本教材配有适量习题，教师可根据教学实际情况，布置部分习题供学生练习．

本教材分上、下两册，共13章，分别由钟宜(第1、2、3章)、傅修文(第4、5、6章)、顾静相(第7、8、9章)和张旭红(第10、11、12、13章)编写．全书由顾静相统纂主编．

在本教材的编写过程中，中国人民大学胡显佑教授作为编写顾问，对教材的编写提出了许多很好的建议．中央财经大学单立波教授、北京大学姚孟臣教授对教材书稿进行了认真详尽地审阅，提出了很多宝贵意见．高等教育出版社的编辑为本教材的出版付出了辛勤劳动，在此表示衷心感谢．

因受经验和水平所限，本教材中不妥之处实属难免，敬请读者提出批评和建议，以期再版时修正．

编者

2000年2月

第一篇 微 积 分

第1章 极限与连续

学习目标 了解反函数、函数的单调性、奇偶性、有界性、周期性的概念；左、右极限的概念；无穷小、无穷大的概念；闭区间上连续函数的性质.

理解函数、基本初等函数、复合函数、初等函数、分段函数的概念；需求函数与供给函数的概念；函数极限的定义；无穷小的性质；函数在一点连续的概念；初等函数的连续性.

掌握复合函数的复合过程；极限四则运算法则.

会用函数关系描述经济问题；对无穷小进行比较；用两个重要极限求极限；判断间断点的类型；求连续函数和分段函数的极限.

极限概念是在研究变量在某一过程中的变化趋势时引出的. 它是微积分学的重要基本概念之一，微积分学中的其他几个重要概念，如连续、导数、定积分等，都是用极限表述的，并且微积分学中的很多定理也是用极限方法推导出来的. 这一章我们在对函数概念进行复习和补充的基础上将介绍数列与函数极限的概念，求极限的方法及函数的连续性.

1.1 函数

函数是微积分学研究的对象. 在中学里我们已经学习过函数

概念，在这里我们不是进行简单的重复，而是要从全新的视角来对它进行描述并重新分类.

1.1.1 函数的概念

1. 常量与变量

在日常生活、生产活动和经济活动中，经常遇到各种不同的量. 例如：身高、气温、产量、收入、成本等等. 这些量可以分为两类，一类量在考察的过程中不发生变化，只取一个固定的值，我们把它称作**常量**，例如，圆周率 π 是个永远不变的量，某种商品的价格，某个班的学生人数在某一段时间内保持不变，这些量都是常量；另一些量在所考察的过程中是变化的，可以取不同数值，我们把它称作**变量**，例如，一天中的气温，生产过程中的产量都是在不断变化的，它们都是变量.

在理解常量与变量时，应注意下面几点：

(1) 常量和变量依赖于所研究的过程. 同一个量，在某一过程中可以认为是常量，而在另一过程中则可能是变量；反过来也是同样的. 例如，某种商品的价格在一段时间内是常量，但在较长的时间内则是变量. 这说明常量和变量具有相对性.

(2) 从几何意义上讲，常量对应着实数轴上的定点，变量则对应着实数轴上的动点.

(3) 一个变量所能取的数值的集合叫做这个变量的**变动区域**.

有一类变量，例如时间可以取介于两个实数之间的任意实数值，叫做连续变量，连续变量的变动区域常用区间表示.

常量习惯用字母 a，b，c，d 等表示；变量习惯用 x，y，z，u，v，w 等表示.

2. 函数的概念及表示法

在某个变化过程中，往往出现多个变量，这些变量不是彼此孤立的，而是相互影响和相互制约的，一个量或一些量的变化会

引起另一个量的变化. 如果这些影响是确定的，是依照某一规则的，那么我们说这些变量之间存在着函数关系.

例如，生产某种产品的固定成本为6 800元，每生产一件产品，成本增加70元，那么该种产品的总成本 y 与产量 x 的关系可用下面的式子给出：

$$y=70x+6\ 800,$$

当产量 x 取任何一个合理的值时，成本 y 有确定的值和它对应，我们说成本 y 是产量 x 的函数.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量，若当变量 x 在非空数集 D 内任取一数值时，变量 y 依照某一规则 f 总有一个确定的数值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$. 这里，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**或**函数**. f 是函数符号，它表示 y 与 x 的对应规则.有时函数符号也可以用其他字母来表示,如 $y=g(x)$或 $y=\varphi(x)$等.

集合 D 称为函数的**定义域**，相应的 y 值的集合则称为函数的**值域**.

当自变量 x 在其定义域内取定某确定值 x_0 时，因变量 y 按照所给函数关系 $y=f(x)$求出的对应值 y_0 叫做当 $x=x_0$ 时的函数值，记作 $y|_{x=x_0}$或 $f(x_0)$.

例 1 已知 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求：$f(0)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(-x)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$f(x+1)$，$f(x^2)$.

解 $f(0)=\dfrac{1-0}{1+0}=1$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1-\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$，$f(-x)=\dfrac{1-(-x)}{1+(-x)}=\dfrac{1+x}{1-x}$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{x-1}{x+1}$，$f(x+1)=$

$\frac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=\frac{-x}{2+x}$, $f(x^2)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

例 2 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\frac{3}{5x^2+2x}$;

(2) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$;

(3) $f(x)=\lg(4x-3)$;

(4) $f(x)=\arcsin(2x-1)$;

(5) $f(x)=\lg(4x-3)-\arcsin(2x-1)$.

解 (1) 在分式$\frac{3}{5x^2+2x}$中,分母不能为零,所以 $5x^2+2x\neq 0$,解得 $x\neq-\frac{2}{5}$,且 $x\neq 0$,即定义域为

$$\left(-\infty,\ -\frac{2}{5}\right)\cup\left(-\frac{2}{5},\ 0\right)\cup(0,+\infty).$$

(2) 在偶次根式中,被开方式必须大于等于零,所以有 $9-x^2\geqslant 0$,解得 $-3\leqslant x\leqslant 3$,即定义域为$[-3,3]$.

(3) 在对数式中,真数必须大于零,所以有 $4x-3>0$,解得 $x>\frac{3}{4}$,即定义域为$\left(\frac{3}{4},\ +\infty\right)$.

(4) 反正弦或反余弦中的式子的绝对值必须小于等于 1,所以有 $-1\leqslant 2x-1\leqslant 1$,解得 $0\leqslant x\leqslant 1$,即定义域为$[0,1]$.

(5) 该函数为(3),(4)两例中函数的代数和,此时函数的定义域应为(3),(4)两例中定义域的交集,即$\left(\frac{3}{4},+\infty\right)\cap[0,1]=\left(\frac{3}{4},\ 1\right]$.

应当指出,在实际应用问题中,除了要根据解析式子本身来确定自变量的取值范围以外,还要考虑到变量的实际意义,一般来说,经济变量往往取正值,即变量都是大于零的.

常用的函数表示法有解析法(又称公式法)、表格法和图形法.现举例说明如下:

(1) $y=\sqrt{3-x^2}$

这是一个用解析式子表示的函数．当 x 在 $-\sqrt{3}$ 到 $\sqrt{3}$ 之间取任意值时，由公式可以确定唯一的 y 值．

(2) 某商店一年中各月份毛线的销售量(单位:10^2 kg)的关系如表 1－1 所示．

表 1－1　各月份毛线销售量

月　份　x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销售量 $y/10^2$ kg	81	84	45	45	9	5	6	15	94	161	144	123

这是用表格表示的函数．当自变量 x 取 1 到 12 之间任意一个整数时，从表格中可以查到 y 的一个对应值．例如 x 取 10，从表中可以看到它对应的 y 值是 161，即 10 月份毛线销售量为 16 100 kg．

(3) 图 1－1 是气象站用自动温度记录仪记录下来的某地一昼夜气温变化曲线．

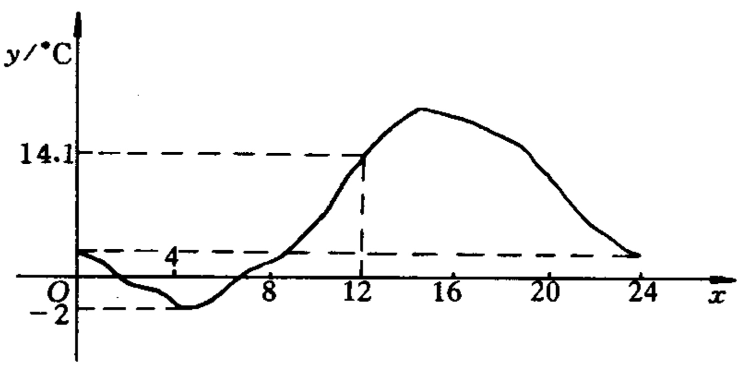

图　1－1

这是用图形表示的函数．气温 y 与时间 x 的函数关系是由曲线给出的．当 x 取 0 到 24 中任意一个数时，在曲线上都能找到确定的 y 值与它对应．例如 $x=12$ 时，$y=14.1$ ℃．

3．分段函数

某市电话局规定市话收费标准为：当月所打电话次数不超过30次时，只收月租费25元，超过30次的，每次加收0.23元. 则电话费 y 和用户当月所打电话次数 x 的关系可用下面的形式给出：

$$y=\begin{cases}25, & x\leqslant 30,\\ 25+0.23(x-30), & x>30.\end{cases}$$

象这样把定义域分成若干部分，函数关系由不同的式子分段表达的函数称为**分段函数**. 分段函数是微积分中常见的一种函数. 例如在中学数学课出现过的绝对值函数可以表示成

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

例 3 设函数

$$y=f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x>0,\\ 2, & x=0,\\ 3x, & x<0.\end{cases}$$

当 x 取 $(0,+\infty)$ 内的值时，y 的值由关系式 $y=x^2+1$ 来计算；当 $x=0$ 时，$y=2$；当 x 取 $(-\infty,0)$ 内的值时，y 的值由关系式 $y=3x$ 来计算. 例如，$f(3)=3^2+1=10$，$f(-5)=3\cdot(-5)=-15$. 它的图象如图 1－2 所示.

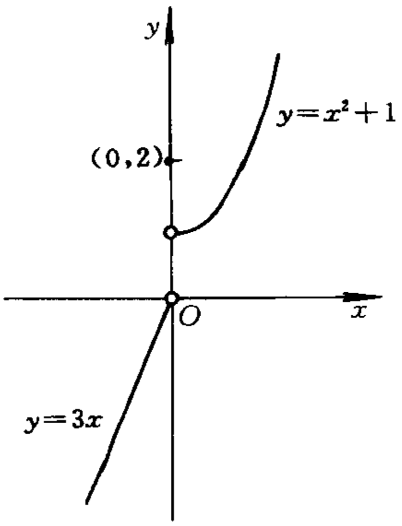

图 1－2

注意： 分段函数是由几个关系式合起来表示一个函数，而不是几个函数. 对于自变量 x 在定义域内的某个值，分段函数 y 只能确定唯一的值. 分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并.

例 4 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & -4\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x<3,\\ 5x-1, & x\geqslant 3.\end{cases}$$

求$f(-\pi)$，$f(1)$，$f(3.5)$及函数的定义域.

解 因为$-\pi\in[-4,1)$，所以$f(-\pi)=\sin(-\pi)=0$；因为$1\in[1,3)$，所以$f(1)=1$；因为$3.5\in[3,+\infty)$，所以$f(3.5)=5\times(3.5)-1=16.5$；函数$f(x)$的定义域为$[-4,+\infty)$.

例 5 用分段函数表示函数$y=3-|2-x|$，并画出图形.

解 根据绝对值定义可知，当$x\leqslant2$时，$|2-x|=2-x$；当$x>2$时，$|2-x|=x-2$. 于是有

$$y=\begin{cases}3-(2-x), & x\leqslant2,\\ 3-(x-2), & x>2,\end{cases}$$

即

$$y=\begin{cases}1+x, & x\leqslant2,\\ 5-x, & x>2.\end{cases}$$

其图象如图 1-3 所示.

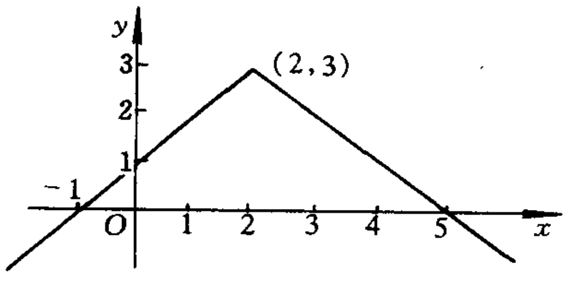

图 1-3

1.1.2 函数的几种特性

1. 函数的有界性

定义 1.2 设函数$y=f(x)$在集合D上有定义，如果存在一个正数M，对于所有的$x\in D$，恒有$|f(x)|\leqslant M$，则称函数$f(x)$在D上是**有界的**. 如果不存在这样的正数M，则称$f(x)$在D上是**无界的**.

如图 1-4，函数$y=f(x)$在区间(a,b)内有界的几何意义是：曲线$y=f(x)$在区间(a,b)内被限制在$y=-M$和$y=M$两条直线之间.

对于函数的有界性，要注意以下两点：

(1) 当一个函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有界时，正数 M 的取法不是唯一的. 例如 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的，有$|\sin x|\leqslant 1$，但我们也可以取 $M=2$，即$|\sin x|<2$ 总是成立的，实际上 M 可以取任何大于 1 的数.

(2) 有界性是依赖于区间的. 例如 $y=\dfrac{1}{x}$在区间$(1,2)$内是有界的，但在区间$(0,1)$内则无界.

2. 函数的奇偶性

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$在集合 D 上有定义，如果对任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为**偶函数**；如果对任意的 $x\in D$，恒有$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为**奇函数**.

由定义可知，对任意的 $x\in D$，必有 $-x\in D$，否则，$f(-x)$没有意义. 因此函数具有奇偶性时，其定义域必定是关于原点对称的.

偶函数的图象是对称于 y 轴的，如图 1-5. 因为$f(-x)=f(x)$，所以如果点 $P(x,f(x))$是曲线上的一个点，则它关于

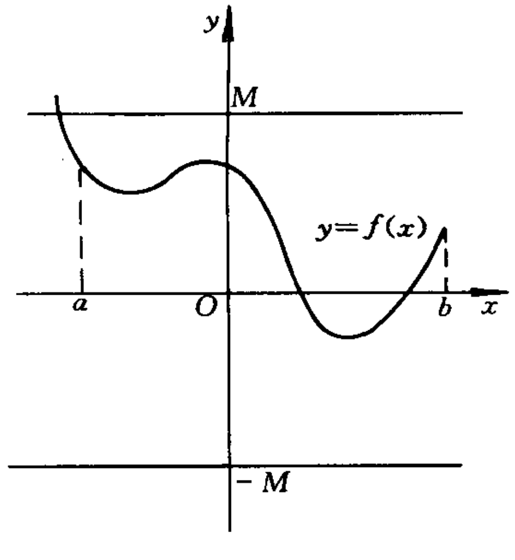

图 1-4

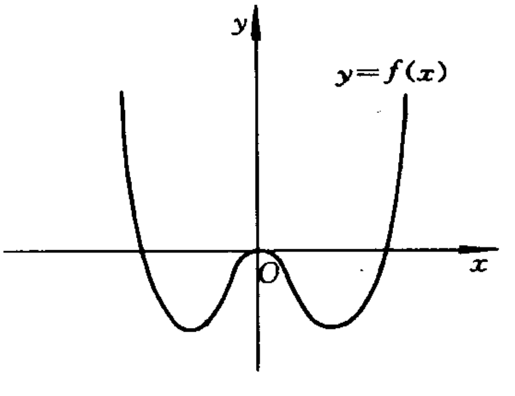

图 1-5

y 轴的对称点 $Q(-x, f(x))$，也是曲线上的点.

奇函数的图象是对称于原点的，如图 1－6. 因为 $f(-x)=-f(x)$，所以如果点 $p(x, f(x))$ 是曲线上的一个点，则它关于原点的对称点 $Q(-x,-f(x))$，也是曲线上的点.

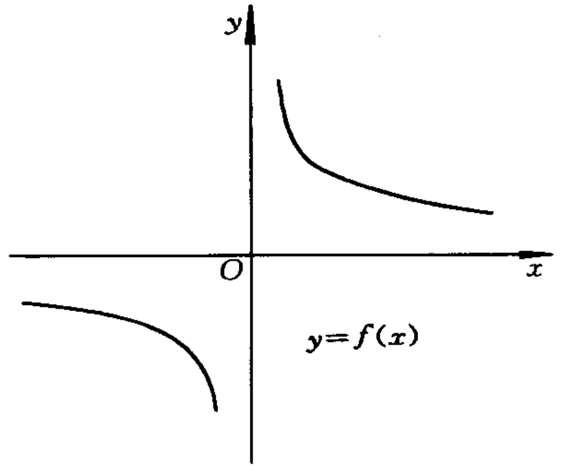

图 1－6

例 6 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=3x^4-5x^2+7$;

(2) $f(x)=2x^2+\sin x$;

(3) $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^{-x}-a^x) \quad (a>0, a\neq 1)$.

解 由定义

(1) 因为 $f(-x)=3(-x)^4-5(-x)^2+7=3x^4-5x^2+7=f(x)$，所以 $f(x)=3x^4-5x^2+7$ 是偶函数.

(2) 因为 $f(-x)=2(-x)^2+\sin(-x)=2x^2-\sin x\neq f(x)$，同样可以得到 $f(-x)\neq -f(x)$，所以 $f(x)=2x^2+\sin x$ 既非奇函数，也非偶函数.

(3) 因为 $f(-x)=\dfrac{1}{2}(a^{-(-x)}-a^{-x})=\dfrac{1}{2}(a^x-a^{-x})=-\dfrac{1}{2}(a^{-x}-a^x)=-f(x)$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^{-x}-a^x)$ 是奇函数.

3. 函数的单调性

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有定义，如果对于(a,b)内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在(a,b)内是**单调增加**的；如果对于(a,b)内的任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有$f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在(a,b)内是**单调减少**的.

单调增加函数与单调减少函数统称为**单调函数**.

单调增加的函数的图象是沿 x 轴正向逐渐上升的,如图 1－7 所示;单调减少的函数的图象是沿 x 轴正向逐渐下降的,如图 1－8 所示.

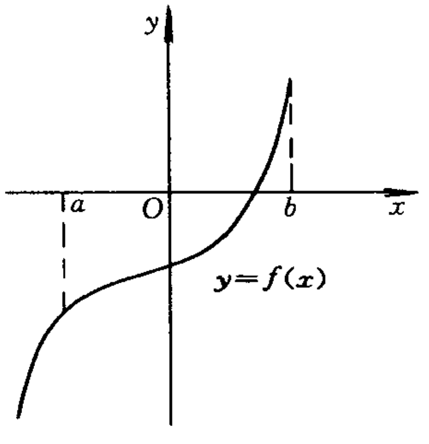

图 1－7

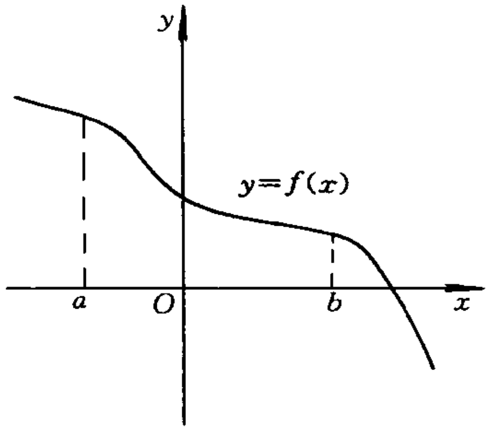

图 1－8

例 7 验证函数 $y=3x-2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的.

证 在区间$(-\infty,+\infty)$内任取两点 $x_1<x_2$，于是

$$f(x_1)-f(x_2)=(3x_1-2)-(3x_2-2)=3(x_1-x_2)<0,$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $y=3x-2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的.

4. 函数的周期性

定义 1.5 对于函数 $y=f(x)$,如果存在正数 a,使 $f(x)=f(x+a)$恒成立，则称此函数为**周期函数**. 满足这个等式的最小

正数 a 称为**函数的周期**. 例如 $y=\sin x$ 是周期函数，周期为 2π.

1.1.3 反函数

设某种商品的单价为 p，销售量为 x，则收入 y 是 x 的函数:

$$y=px,$$

这时 x 是自变量，y 是 x 的函数. 若已知收入 y，反过来求销售量 x，则有

$$x=\frac{y}{p},$$

这时 y 是自变量，x 变成 y 的函数了.

上面的两个式子是同一个关系的两种写法，但从函数的角度来看，由于对应规则不同，它们是两个不同的函数，我们称它们互为反函数.

定义 1.6 设 $y=f(x)$ 是 x 的函数，其值域为 $\mathbf{R}$，如果对于 $\mathbf{R}$ 中的每一个 y 值，都有一个确定的且满足 $y=f(x)$ 的 x 值与之对应，则得到一个定义在 $\mathbf{R}$ 上的以 y 为自变量，x 为因变量的新函数，我们称它为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$. 并称 $y=f(x)$ 为**直接函数**.

当然我们也可以说 $y=f(x)$ 是 $x=f^{-1}(y)$ 的反函数，就是说，它们互为反函数. 显然，由定义可知，单调函数一定有反函数. 习惯上，我们总是用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，所以通常把 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$.

从上面的定义容易得出，求反函数的过程可以分为两步：第一步从 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$；第二步交换字母 x 和 y.

例 8 求 $y=4x-1$ 的反函数.

解 由 $y=4x-1$ 得到 $x=\frac{y+1}{4}$，然后交换 x 和 y，得 $y=$

$\frac{x+1}{4}$. 即 $y=\frac{x+1}{4}$是 $y=4x-1$ 的反函数.

可以证明，函数 $y=f(x)$与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称. 例 6 中的一对反函数的图象如图 1-9 所示.

1.1.4 基本初等函数

基本初等函数包括常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数六大类，它们是微积分中所研究对象的基础. 虽然大部分函数在中学已经学过，但我们在这里对它们重新分类，并将系统地讨论它们的定义域、值域、图象和性质，读者应该很好的掌握这些内容.

1. 常数函数 $y=c$

它的定义域是$(-\infty,+\infty)$，由于无论 x 取何值，都有 $y=c$，所以，它的图象是过点$(0,c)$平行于 x 轴的一条直线，如图 1-10. 它是偶函数.

2. 幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为实数）

幂函数的情况比较复杂，我们分 $\alpha>0$ 和 $\alpha<0$ 来讨论.

当 α 取不同值时，幂函数的定义域不同，为了便于比较，

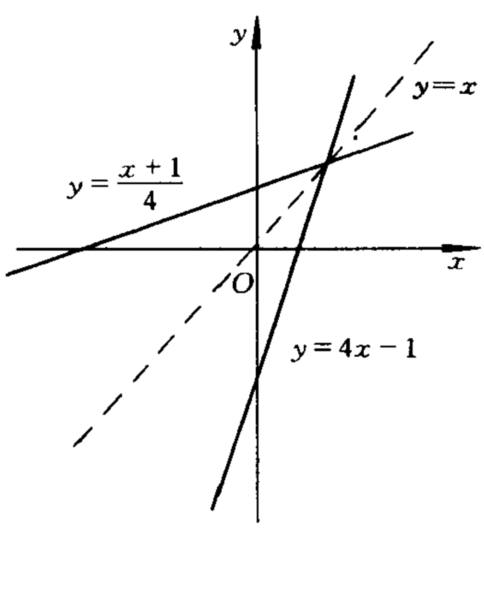

图 1-9

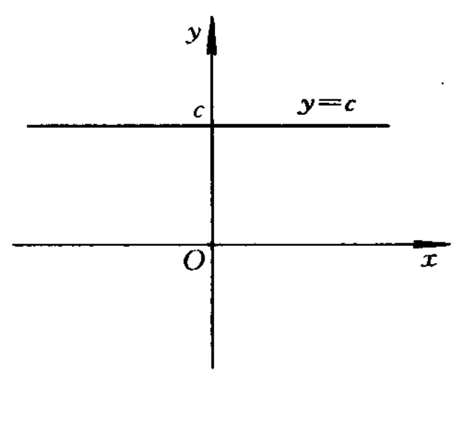

图 1-10