面向21世纪高等学校数学系列辅导教材

概率论与数理统计试题精解

COLLEGE MATHEMATICS

张学元 主编

湖南大学出版社

面向21世纪高等学校数学系列辅导教材

概率论与数理统计
试题精解

主编 张[illegible]元
副主编 陈方[illegible]

湖南大学出版社
2000年·长沙

内 容 简 介

本书以能力培养为主线，紧扣高等工科院校现在所使用的教材，精选了新近问世的《概率论与数理统计》能力试题，为方便读者使用，采用专题与教材相匹配的编写方式，对综合性较强的试题，先给出解题思路分析，然后正式解答，为使学生自我测试学习水平、为教师在教学中提供题源，每章的最后一节都安排了含有填空、选择、计算和证明的模拟试题，在附录里配置了总复习自测题及各章模拟试题的答案与揭示．

本书可供高等工科院校（本科、高职、电大、职大及高等教育自学考生）在学习概率论和数理统计时同步使用，也可作为报考工学、理学及经济等类硕士研究生的复习资料．作为高等学校的数学教师，本书也是一本有收藏价值的教学参考书．

概率论与数理统计试题精解

Gailülun yu Shuli Tongji Shiti Jingjie

主编 张学元

□责任编辑 李 刚 王海鹰

□封面设计 叶中景

□出版发行 湖南大学出版社

社址 长沙市岳麓山 邮码 410082

电话 0731－8821691 0731－8821315

□经 销 湖南省新华书店

□印 装 湖南航天长宇印刷有限责任公司

□开本 850×1168 32开 □印张 15 □字数 356千

□版次 2000年10月第1版 □2000年10月第1次印刷

□印数 1—5 000册

□书号 ISBN 7－81053－329－0/O·16

□定价 18.00元

前　言

本书主要是为高等工科院校的学生编写的，这类院校的人才培养目标是为国家培养高素质、强能力的应用型人才，因此教和学的着眼点应放在能力的培养上．多年来的教学实践表明，学生在学习《概率论与数理统计》课程时，处理随机现象的能力很差．表现在解题时无从下手，解完后也不知正确与否．究其原因，一方面是由于《概率论与数理统计》这门数学课程与以往的数学知识截然不同——研究随机现象的规律性，随机事件在一次试验中可能发生，也可能不发生，即带有偶然性，但在大量重复试验中，随机事件的发生又呈现一定的规律性，即具有一定的必然性．概率论正是揭示这种偶然性背后隐藏着的必然性的数学学科，给初学者带来一定的困难是很自然的，但其主要原因是学习者在运用必备的知识，分析问题和解决问题的能力方面没有得到足够的训练和培养

本书的主要特点是以能力培养为主线，贯穿“能力——技能——知识”的思维链条，编者参阅和研究了大量的各类试题，精选出具启发性、典型性和针对性的试题，通过对这些试题的分析和解答，为引导读者运用必备知识去独立处理随机现象提供了思维途径和钥匙，有利于培养读者的综合、分析与实际运作能力．

本书是依据原国家教委制定的高等学校《工科数学课程教学基本要求》及近年来《全国工学、经济学硕士生入学考试数学考试大纲》编写的，考虑了不同层次的需要，选题具有一定的梯度，因此本书适用于各层次的大学（理工、师范、财经、医学等）的本、专科、高职（职大及高等教育的自学考生）学习《概率论与数理统计》时同步使用，同时也可作为报考工学、理学及经济、农林等类硕士研究生的复习资料．

参与本书编写工作的有(以姓氏笔画为序):王自阳、毛年、刘改平、刘给禹、刘治林、李孟然、李浩、陈方年、张峰、张学元、周建民、周丽群、谭元发等,他们都为本书提供了宝贵的意见,在此表示感谢!

由于编者水平有限,错误在所难免,敬请读者批评指正.

张学元

2000年8月于湖南工程学院

目　　录

第一章　随机事件及其概率的计算

§1.1　如何用简单事件表示有关复合事件

将复合事件用简单事件通过运算来表示，是计算复合事件概率的关键．基本思路是：首先弄清楚所给随机试验有哪些基本事件，所求复合事件由哪些简单事件复合而成；其次是分析该复合事件与这些简单事件间的关系，利用事件间的关系所对应的运算及事件的运算律，即可将复合事件用简单事件表示出来．常用的方法如下：

法一　将复合事件用与其等价的简单事件表示

这类复合事件常用“恰有”、“只有”、“至多”、“至少”、“都发生”、“都不发生”、“不都发生”等词语描述，要弄清这些概念的含义．

1.1.1　设 A、B、C 为三个随机事件，试用 A、B、C 的运算关系表示下列事件：

(1)　$D=$“A、B、C 至少有一个发生”；

(2)　$E=$“A 发生，而 B 与 C 都不发生”；

(3)　$F=$“A、B、C 中恰有一个发生”；

(4)　$G=$“A、B、C 中恰有两个发生”；

(5)　$H=$“A、B、C 中不多于一个发生”.

解　(1)　**解法一**　$D=$“A、B、C 中至少有一个发生”$=A+B+C$.

解法二　$D=$“A、B、C 中至少有一个发生”

$=$“三个事件都发生”$+$“两个事件发生，另外一个事件不发生”$+$“一个事件发生，另外两个事件不发生”

$=ABC+(AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC)+(A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C)$.

解法三 $\bar{D}$="A、B、C 都不发生"$=\bar{A}\bar{B}\bar{C}$，故

$$D=\bar{\bar{D}}=\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}=\overline{\overline{A+B+C}}=A+B+C.\text{(同解法一)}.$$

解法四 D="A、B、C 中至少有一个发生"="A、B、C 中至多有两个不发生"="三个都发生"+"两个发生，另一个不发生"+"一个发生，另外两上不发生"(同解法二).

注 本题说明：求一个事件的表示式时，由于思考的角度不同，得到的表示式可能不同，但只要思路正确，得到的表示式必相等.

(2) E="A 发生，而 B 与 C 都不发生"，单个看，是指 A 发生，B 不发生，C 也不发生，因此，事件 E 与 $A\bar{B}\bar{C}$等价，即

$$E=A\bar{B}\bar{C}.$$

或者，把"B、C 都不发生"一起看，它的对立事件是"B、C 至少有一个发生，即 $A+B$，于是"B、C 都不发生"就是$\overline{B+C}$，所以 E 也可表示成 $E=A(\overline{B+C})$.

(3) A、B、C 中恰有一个发生，并没有指明是哪一个发生，因此可能是 A 发生，而 B、C 都不发生；可能是 B 发生，而 A、C 都不发生；也可能是 C 发生，而 A、B 都不发生，所以

$$F=A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C.$$

(4) A、B、C 中恰有两个发生，并没有指明是哪两个发生，可能是 A、B 都发生，而 C 不发生，可能是 A、C 都发生，而 B 不发生；也可能是 B、C 都发生，而 A 不发生，所以 G 可表示成

$$G=AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC.$$

(5) H ="A、B、C 中不多于一个发生"

="三个都不发生"+"恰有一个发生"

$=\bar{A}\bar{B}\bar{C}+(A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C)$.

1.1.2 某工厂每天分三班生产，设 A_i="第 i 班超额完成生产任务"($i=1,2,3$)，试用 A_1，A_2，A_3 表示下列事件：

(1) B="至少有两个班超额完成任务"；

(2) C="至多有一个班未超额完成任务".

解 (1) B ="至少有两个班超额完成任务"

="三个班都超额完成任务"+"恰有两个班超额完成任务"

$=A_1A_2A_3+(A_1A_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3)$.

(2) C ="至多有一个班未超额完成任务"

="三班都未超额完成任务"+"恰(只)有一个班未超额完成任务"

$=\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3+(\bar{A}_1A_2A_3+A_1\bar{A}_2A_3+A_1A_2\bar{A}_3)$.

1.1.3 三只考签由三个学生轮流放回抽取一次,每次取一只,试用基本事件的运算表示"至少有一只考签没有被抽到"这一事件.

解 记 A_i="第 i 只考签被抽到"($i=1,2,3$),则 $\bar{A}_i$="第 i 只考签没有被抽到"($i=1,2,3$).

B="至少有一只考签没有被抽到"$=\bar{A}_1+\bar{A}_2+\bar{A}_3$ 或者 $\bar{B}$="三只考签都抽到"$=A_1A_2A_3$,故

$$B=\overline{A_1A_2A_3}.$$

法二 用事件的运算法则求之

这类复合事件常与和、差、积、对立事件有关,为求其表示式,要注意利用事件的和、差、积、互不相容、对立事件的一些基本运算法则,特别要注意和对积的分配律、差化积及对偶律的应用(它们常用于与对立事件有关的命题).

1.1.4 对立事件与互不相容事件有何联系与区别?

答 它们的联系与区别是:

(1) 两事件对立,必定互不相容(互斥),但互不相容未必对立.

(2) 互不相容的概念适用于多个事件,但对立的概念只适用于两个事件.

(3) 两个事件互不相容是指这两个事件不能同时发生,即至

多只能发生一个，但可以都不发生；而两事件对立则表示它们有且仅有一个发生．

1.1.5［选择题］ 关系（ ）成立时，则事件 A、B 为对立事件．

(A) $AB=\varnothing$；　　(B) $A+B=\Omega$；

(C) $AB=\varnothing, A+B=\Omega$；　(D) $\bar{A}$与$\bar{B}$对立．

解 由对立事件的定义知，(C)入选，(A)、(B)显然落选．对于(D)，因$\bar{A}$、$\bar{B}$对立，故$\bar{A}+\bar{B}=\Omega$ 且$\bar{A}\bar{B}=\varnothing$，将此两式求逆，据对偶律得

$$\overline{\bar{A}+\bar{B}}=\bar{\Omega}, \bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}=\varnothing, \text{即 } AB=\varnothing$$

且 $$\overline{\bar{A}\bar{B}}=\bar{\varnothing}, (\overline{\overline{A+B}})=\Omega, \text{即 } A+B=\Omega.$$

故 A、B 对立，所以(D)也入选．

1.1.6［选择题］ 设 A 表示“甲种商品畅销，乙种商品滞销”的事件，则其对立事件 $\bar{A}$表示（ ）．

(A) “甲种商品滞销，乙种商品畅销”；

(B) “甲乙两种商品均畅销”；

(C) “甲种商品滞销”；

(D) “甲种商品滞销，或乙种商品畅销”．

解 设甲、乙两种商品畅销的事件分别为 B、C，则 $A=B\bar{C}$，由对偶律得$\bar{A}=\overline{B\bar{C}}=\bar{B}+\bar{\bar{C}}=\bar{B}+C$. 故$\bar{A}$表示事件“甲种商品滞销，或乙种商品畅销”. 因此选(D).

1.1.7 设 $\Omega=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，$A=\{x|\frac{1}{2}<x\leqslant 1\}$，$B=\{x|\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\}$，试写出下列各事件：

(1) $\bar{A}B$； (2) $\bar{A}+B$； (3) $\overline{\bar{A}B}$； (4) $\overline{AB}$； (5) $\overline{A+B}$.

解 (1)因$\bar{A}=\Omega-A=\{x|0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\}\cup\{x|1<x\leqslant 2\}$，故

$\bar{A}B=\{x|0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\}\cap\{x|\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\}\cup\{x|1<x<2\}\cap\{x|$

$\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\}$

$= \{x \mid \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\} \cup \{x \mid 1 < x \leqslant \frac{3}{2}\}$.

(2) 因$\overline{\bar{A}+B} = \bar{\bar{A}}\bar{B} = A\bar{B}$，而 $A \subset B$，$B\bar{B} = \varnothing$，故 $A\bar{B} = \varnothing$，从而$\overline{\bar{A}+B} = \varnothing$，于是$\bar{A}+B = \bar{\varnothing} = \Omega = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\}$.

(3)$\overline{\bar{A}\bar{B}} = \bar{\bar{A}} + \bar{\bar{B}} = A + B = B(A \subset B) = \{x \mid \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\}$.

(4)因 $A \subset B$，故 $AB = A$，从而$\overline{AB} = \bar{A} = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\} \cup \{x \mid 1 < x \leqslant 2\}$

(5)**解法一** 因 $A \subset B$，故 $A + B = B$，所以$\overline{A+B} = \bar{B}$；

解法二 因$\overline{A+B} = \bar{A}\bar{B}$且因 $A \subset B$，$\bar{B} \subset \bar{A}$，故$\overline{A+B} = \bar{A}\bar{B} = \bar{B} = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}\} \cup \{x \mid \frac{3}{2} < x \leqslant 2\}$.

1.1.8 从一批含有正品和次品产品中，任意抽取 5 件产品，记

A_1＝“至少有一件次品”；　　A_2＝“至少有两件次品”；

A_3＝“至多有两件正品”；　　A_4＝“5 件全是正品”.

问$\bar{A}_1$、$\bar{A}_2$、$\bar{A}_3$、$\bar{A}_4$各表示什么事件？

分析 根据 A 的对立事件 $\bar{A}$的定义：$\bar{A} = \Omega - A$，只需求出基本事件的全体(称为样本空间)Ω 和 A 所包含的基本事件(称为样本点)即可．

解 从一批含有正品和次品的产品中，任取 5 件，则抽得的次品数可能是 0,1,2,3,4,5，故

$$\Omega = \{0,1,2,3,4,5\}.$$

(1) A_1＝“至少有一件次品”所包含的基本事件为$\{1,2,3,4,5\}$. 故

$\bar{A}_1 = \Omega - A_1 = \{0,1,2,3,4,5\} - \{1,2,3,4,5\}$

$= \{0\}$＝“次品数为 0”＝“没有次品”

$\overset{(或)}{=}$“全是正品”.

(2) A_2="至少有两件次品"$=\{2,3,4,5\}$,故

$\bar{A}_2=\Omega-A_2=\{0,1\}$="至多有一件次品"$\overset{(或)}{=}$"至少有 4 件正品".

(3) A_3="至多有两件正品"="至少有 3 件次品"$=\{3,4,5\}$,故

$\bar{A}_3=\Omega-A_3=\{0,1,2\}$="至多有两件次品"

$\overset{(或)}{=}$"至少有 3 件正品".

(4) A_4="5 件全是次品"$=\{5\}$,故

$\bar{A}_4=\Omega-A_4=\{0,1,2,3,4\}$="至多有 4 件次品"$\overset{(或)}{=}$"至少有一件正品".

一般地,不难得到 A_i="5 件产品至少有 i 件次品"的对立事件$\bar{A}_i$"至多有 $i-1$ 件次品"$\overset{(或)}{=}$"至少有 $5-(i-1)$件正品"$(i=1,2,3,4,5)$;B_i="5 件产品中有至多有 i 件正(次)品"的对立事件为$\overline{B_i}$="至少有 $i+1$ 件正(次)次品"$\overset{(或)}{=}$"至多有 $5-(i+1)$件次(正)品";C_i="5 件产品中至少有 i 件正(次)品"的对立事件$\overline{C_i}$="至多有 $i-1$ 件正(次)品"$\overset{(或)}{=}$"至少有 $5-(i-1)$件次(正)品"$(i=0,1,2,3,4,5)$.

1.1.9 某人投篮两次,设事件 A_1="第一次投中",A_2="第二次投中",试表示下列各事件:

B="两次都投中"; C="两次都未投中";

D="恰有一次投中"; E="至少有一次投中";

并指出 B、C、D、E 哪些是互不相容事件?哪些是对立事件?

解 由题意,显然有

$B=A_1A_2$; $C=\bar{A}_1\bar{A}_2$; $D=A_1\bar{A}_2+\bar{A}_1A_2$; $E=A_1+A_2$.

(1) 事件 B、C、D 两两互不相容,因为在两次投蓝中,B、C、D 不可能同时发生任意两个结果.事实上,$BC=A_1A_2\bar{A}_1\bar{A}_2=(A_1\bar{A}_1)(A_2\bar{A}_2)=\varnothing$,$CD=\bar{A}_1\bar{A}_2(A_1\bar{A}_2+\bar{A}_1A_2)=(\bar{A}_1A_1)\bar{A}_2+\bar{A}_1(\bar{A}_2A_2)=\varnothing$,$BD=A_1A_2(A_1\bar{A}_2+\bar{A}_1A_2)=A_1(A_2\bar{A}_2)+(A_1\bar{A}_1)A_2=$

$\varnothing$，即 $BC=CD=BD=\varnothing$，故 B、C、D 两两互不相容．

(2) C 和 E 是对立事件，事实上

$CE=\bar{A}_1\bar{A}_2(A_1+A_2)=\bar{A}_1\bar{A}_2A_1+\bar{A}_1\bar{A}_2A_2=(\bar{A}_1A_1)\bar{A}_2+\bar{A}_1(\bar{A}_2 A_2)=\varnothing\cdot\bar{A}_2+\bar{A}_1\cdot\varnothing=\varnothing+\varnothing=\varnothing$.

又 $C+E=\bar{A}_1\bar{A}_2+A_1+A_2\xlongequal[\text{故}\bar{A}_1A_2+A_2=A_2]{\text{因}\bar{A}_1A_2\subseteq A_2}\bar{A}_1\bar{A}_2+\bar{A}_1A_2+A_1+A_2$

$$=\bar{A}_1(\bar{A}_2+A_2)+A_1+A_2=\bar{A}_1\Omega+A_1+A_2$$

$$=\bar{A}_1+A_1+A_2=\Omega+A_2\xlongequal{\text{因 }A_2\subset\Omega}\Omega,$$

故 C、E 相互对立．

1.1.10 设事件 A、B、C 满足 $ABC=\varnothing$，把下列各事件表成一些互不相容事件的和

(1) A；　　(2) $B-AC$；

(3) $B+AC$；　　(4) $AB+BC$.

分析 处理这类问题的技巧是在适当的地方补上必然事件 Ω 相乘，使事件表示式出现对立事件．而对立事件是互不相容的．

(1) $A=A\Omega=A(B+\bar{B})=AB+AB$，而 AB 与 AB 互不相容

(2) $B-AC=B\,\overline{AC}=B(\bar{A}+\bar{C})=B\,\bar{A}+B\,\bar{C}$

$=B\,\bar{A}+B\,\bar{C}(A+\bar{A})+B\,\bar{A}+AB\,\bar{C}+\bar{A}B\,\bar{C}+\bar{A}B\,\bar{C}$

$\xlongequal{\text{因}\bar{A}B\,\bar{C}\subset\bar{A}B}\bar{A}B+AB\,\bar{C}$，而 $\bar{A}B$ 与 $AB\,\bar{C}$ 互不相容．

(3) $B+AC=B+AC(B+\bar{B})=B+ACB+AC\,\bar{B}$

$\xlongequal{\text{因 }ACB\subset B}B+A\,\bar{B}C$. 而 B 与 $A\,\bar{B}C$ 互不相容．

(4) $AB+BC=AB+BC(A+\bar{A})=AB+BCA+BC\,\bar{A}$

$\xlongequal{\text{因 }ABC\subset AB}AB+BC\,\bar{A}$，而 AB 与 $BC\,\bar{A}$ 互不相容．

注：从表面上看，这些表示式似乎复杂化了．但是把它们表示成互不相容事件的和，求其概率公式就简单了．因此，有时为了求

相容事件之和的概率常把它化成互不相容事件的和.

1.1.11 若事件 A、B、C 满足 $A+C=B+C$，问 $A=B$ 是否成立？

答 不一定成立. 例如 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，$B=\{1,2,3\}$，$C=\{4,5,6\}$，则有 $A+C=B+C=\{1,2,3,4,5,6\}$，但显然 $A\neq B$.

1.1.12[选择题] 设 A、B 为任意两事件，则下列关系成立的有(　　).

(A) $(A+B)-B=A$;　　(B) $(A+B)-B\subset A$;

(C) $(A-B)+B=A$;　　(D) $(A-B)+B=A+B$.

解 因 $(A+B)-B=(A+B)\bar{B}=A\bar{B}\subset A$，故($b$)成立. 又因 $(A-B)+B=A\bar{B}+B$

$$\xlongequal{\text{和对积的分配律}}(A+B)(\bar{B}+B)$$

$$=(A+B)\Omega=A+B,$$

故(D)成立. 由上述推证可知(A)、(C)均不成立. 于是(B)、(D)入选.

§1.2 古典概率的直接计算

如果随机试验具有如下两个特征：

1°基本事件的全体(样本空间)元素(样本点)只有有限个(有限性)；

2°每个基本事件的概率相等(等概性). 则称该试验所对应的模型为古典概型.

在古典概型中，设基本事件(样本点)的总数为 n，事件 A 包含的基本事件(样本点)数为 m，则事件 A 的概率计算公式为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{事件 }A\text{ 包含的基本事件数}}{\text{基本事件的总数}},$$

因此，古典概率的计算关键是弄清试验的基本事件的具体含义，把我们所关心的基本事件的总数 n 和事件 A 所包含的基本事件数

m 的值计算出来，两者除之即可．计算 n,m 的方法灵活多样，没有固定的模式．但 m,n 的数值一般是排列、组合数，因此要用到中学数学中的加法原理、乘法原理及排列、组合的多姿的思维分析方法．

1.2.1 一次投掷两颗骰子，求出现的点数之和为奇数的概率．

解法一 设 A 表示"出现点数之和为奇数". 把一次试验的所有可能结果取为 (i,j)（(i,j) 表示第一颗出现 i 点，第二颗骰子出现 j 点）$i,j=1,2,\cdots,6$. 一个数对 (i,j) 对应一个基本事件，基本事件的总数就是所有可能数对 $(i,j)(i,j=1,2,\cdots,6)$ 的总数，即 6 个元素中任取 2 个元素可允许重复的排列数，故 $n=6^2=36$. 显然这 36 个基本事件构成等概样本空间．

完成事件 $A=$"出现点数之和为奇数"有两类办法，一类办法是"第一颗骰子出现奇数点，第二颗出现偶数点"，由乘法原理完成这类办法共有 3×3 种；第二类办法是"第一颗骰子出现偶数点，第二颗骰子出现奇数点"，由乘法原理知完成此类办法共有 3×3 种，再由加法原理知，完成事件 A 的总的方法数即事件 A 包含的基本事件数为 $m=3\times3+3\times3=18$.

从而所求事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}.$$

解法二 若把一次试验的所有可能结果取为：{（奇，奇），（奇，偶），（偶，奇），（偶，偶）}，则它们也组成等概样本空间，基本事件的总数 $n=4$，A 包含的基本事件数 $m=2$，故

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

解法三 若把一次试验的所有可能结果取为：{（点数和为奇数），（点数和为偶数）}，它们也构成等概样本空间，基本事件总数 $n=2$，A 包含的基本事件数 $m=1$，故