现代应用数学丛书

代数学

〔日〕弥永昌吉　杉浦光夫　著

上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

代　数　学

〔日〕彌永昌吉　杉浦光夫　著

熊　全　淹　譯

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本。全书共分三章，包括綫性代数，群論基础、Boole 代数、有限体理論初步和有限群表現論。最后，为便于讀者对有限群表現論的了解，另节譯了 H. Zassenhaus: Lehrbuch der Gruppen theorie 一书中"有限旋轉群"部分作为附录。本书可供高等院校数学系、物理系师生作参考。

現代应用数学丛书

代　数　学

原书名　代　数　学

原著者　〔日〕彌永昌吉　杉浦光夫

原出版者　岩波书店　1957

譯　者　熊　全　淹

*

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

上海市书刊出版业营业許可証出093号

新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售

商务印书館上海厂印刷

*

开本 850×1168 1/32　印張 9 16/32　字数 225,000

1962年11月第1版　1962年11月第1次印刷

印数 1—5,500

統一书号：13119・484

定　价：(十四) 1.60 元

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共 15 卷 60 册，分成 A、B 两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成 42 种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是 1957 年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注釋和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

現代应用数学丛书

书名	原作者	譯者
代数学	弥永昌吉等	熊全淹
几何学*	矢野健太郎	孙澤瀛
复变函数	功力金二郎	刘书琴
集合·拓扑·测度*	河田敬义	賴英华
泛函分析*	吉田耕作	程其襄
广义函数*	岩村联	楊永芳
常微分方程	福原满洲雄	張庆芳
偏微分方程*	南云道夫	錢端壮
特殊函数*	小谷正雄等	錢端壮
差分方程	福田武雄	穆鸿基
富里哀变换与拉普拉斯变换*	河田龙夫	錢端壮
变分法及其应用*	加藤敏夫	周怀生
李群論*	岩堀长庆	孙澤瀛
随机过程*	伊藤清	刘璋温
回轉群与对称群的应用	山内恭彦等	張质賢
結晶統計与代数	伏見康治	孙澤瀛
偏微分方程的应用	犬井鉄郎等	楊永芳
微分方程的近似解法	加藤敏夫等	王占瀛
数值計算法	森口繁一等	閻昌龄
量子力学中的数学方法*	胡永振一郎	周民强
工程力学系統*	近藤一夫等	刘亦珩

书名	原作者	譯者
非綫性振动論	古屋茂	吕紹明
力学系与映射理論*	岩田义一	孙澤瀛
平面彈性論*	森口繁一	刘亦珩
有限变位彈性論 变形几何学*	山本善之 近藤一夫	刘亦珩
塑性論*	鷲津久一郎	刘亦珩
粘性流体理論*	谷一郎	刘亦珩
可压縮流体理論*	河村龙馬	刘亦珩
网絡理論	喜安善市等	陆志剛
自动控制論	喜安善市等	翟立林
回路拓扑学	近藤一夫	張鳴鏞
信息論	喜安善市等	李文清
推断統計理論	北川敏男	李賢平
統計分析*	森口繁一	刘璋温
实驗設計	增山元三郎	刘璋温
群体遺傳学的数学理論*	木村資生	刘祖洞
博奕論	官澤光一	張毓春
綫性規划	森口繁一	刘源張
經济理論中的数学方法	安井琢磨等	談祥柏
随机过程的应用*	河田龙夫	刘璋温
計算技术	高桥秀俊	姚晋
穿孔卡計算机	森口繁一	刘源張

注：有＊者已在1962年7月以前出版。

譯者序

本书共三章，所叙述的都是代数中主要的并且是应用广泛的部分，重点在第3章，而以第1章及第2章中的群为其基础。当然第1章綫性代数也是应用极为广泛的。

本书篇幅虽然不多，但內容丰富，由于取材适宜，安排恰当，所以重点突出，有条不紊。全书立足点高，抽象性强，論証严，对基本概念的闡述和重要定理的証明力求詳尽，有些較复杂的对应关系則另用图式說明，使讀者易于理解。有些重要定理及公式在文中順便引出而不另加証明，使在不模糊重点之下，又便于讀者得窥全貌，这些都是本书之长。此外，例题丰富更为他书所不及，很多重要性质是通过例題来給出，主要演算亦借例題来說明，其重要不在系及命題之下，讀者不可輕易放过。遺憾的是例題中的推导和演算有时过于簡略，初讀者不容易理解。尽管如此，本书的确是一本好书，尤其对应用数学者不可多得，是値得介紹。

第1章綫性代数，先述向量空間的基本概念及主要性质，次述 Jordan 标准形，最后叙述二次形式及 Hermite 形式，举凡綫性代数方面的主要理論及基本演算方法大部均已具备。全部理論建立在映射这个概念之上，其中一再引用到 § 8 的用矩陣表現映射的結果，希望讀者注意。第2章介紹群，Boole 代数，有限体，簡单明了，似都容易領会，不必再加解說。茲仅就本书主要部分第3章有限群的表現論，詳細說明如下。

在 § 25, 26, 27, 28 等节中讲述群表現，表現空間，不变子空間，可約及既約表現等基本概念以及在群表現論中起重要作用的基本定理：Schur 引理，并証明了在具有內积的向量空間中有限

群的任意表現是完全可約的。

在 § 29, 30 中給出群代数的定义，由它得到有限群的具体表現，即正則表現与伴随表現。

在 § 31 中，首先引用 Schur 引理推出既約表現的矩陣元素間的直交关系，由此导出 Burnside 定理，然后在 § 32 中引入群的特征标概念，利用特征标的性质判别两个表現是否等价。在 § 33 中討論了群代数的构造問題，利用特征标的直交关系指出有限群的既約表現都在正則表現中出現。証明了群代数与矩陣环的直和同构，引入群代数的中心与类函数的概念，因而推得了群的既約表現(不等价的)的个数等于群的共軛类的个数，最后給出了計算 3, 4 阶对称群特征标的实际例子。

§ 34 中讲述群的直积表現，特别討論了有限可换群的直积分解及可换群与其特征标群的同构。§ 35 叙述由子群的表現构造群的表現的方法，誘导表現即是由一个群的子群的已知表現誘导出这个群的表現，并討論了关于誘导表現的 Frobenius 的相互律。

§ 36 进一步討論群特征标的性质，并引用代数整数論的知識与特征标的直交关系証明了既約表現的級数是群的阶数的約数，并給出类函数成为单純特征标的必要充分条件。

§ 37 继續討論群代数的构造，引入两側理想，最小左(右)理想，幂等元与既約幂等元等概念，指出既約幂等元，最小左(右)理想与既約表現的关系，給出两个既約幂等元等价的必要充分条件。最后証明群代数的理想的直和分解。

在 § 38, 39, 40, 41 等节中，詳細討論了对称群的表現理論。首先引入 Young 台及它的 Young 对称子，指出了对称子是既約幂等元，以及两个对称子等价的必要充分条件是它們同在一个 Young 的台中，以后又引入标准台的概念，由此証明对称群的阶数是既約表現(不等价的)級数的平方和，并举出了构造对称群表

現的实际方法。

§42, 43 两节介紹 Weyl 关于 n 阶对称群 G 与 m 維向量空間 V 上一般綫性变换群 $GL(V)$ 在直积空間 V^n 中的 n 級直积表現关系，指出直接表現是完全可約的，并且它所含的既約表現(不等价的)与行数小于或等于 m 的 Young 的台一一对应，其中每个既約表現的重复度等于上述所对应的 Young 的台的标准台的个数。

这章內容已如上述。整个理論的建立是以群代数为基础，并将群代数看成为群上的函数环（即定义域是群的一切函数所构成的环），从而导出了群的正則表現，以及把表現矩陣中的元素看成为群上函数而导出了 Burnside 定理，視特征标为类函数而建立起特征标的理論等等。在对称群的表現理論与 Weyl 理論的討論中也无时不引用群代数。因此，除 §25, 26, 27 中所述的一些基本概念之外，§29, 33, 37 等节中有关群代数的定义和定理的部分都是相当重要的，因为这些概念和理論不仅是有限群表現論的基础，并且在无限群的表現論中也有重要意义。

特别是对于对称群的表現論，这章取材丰富，叙述詳尽，在現行的群表現論书籍中还不多見。

最后，由于一般綫性变换群含有直交变换群，酉变换群等其他特殊綫性变换群，因此它的直积表現論，在群的理論研究中非常重要。另一方面，这个理論在量子力学的多粒子問題中也有重要应用，后面介紹了 Weyl 在这方面的成果。Weyl 的原著(Classical group)叙述得不够清楚，艰涩难讀，經过本书整理，特别是在群代数的观点下来詳細論証，就比原著清楚易讀了。这对需要这方面理論的讀者将是有益的。

在本书翻譯过程中，就譯者认为較难理解的地方作了一些注解，希望能对初讀者有所帮助。但由于水平所限，挂一漏万以及錯

誤之处在所难免，請讀者批評指正。譯稿承管紀文同志，曹和貴同志校閱，提出了很多宝貴意見，此外曹和貴同志又添补了很多注解（特別在第3章），謹此一一致謝。

熊 全 淹 1961年9月

目　录

第1章 綫性代数

§1 向量及綫性运算

代数学与拓扑学在今天同是数学中龐大的基础部門之一。本书是“現代应用数学”中作为基础的代数学，以量子力学中所需用的“群表現論”为目标。对于作为数学而展开的代数学的各个部門自然不能广泛地都加以叙述。但是所謂群是什么，它的表現是什么，象这样一类問題，在引进时当然要写得使人容易理解。以下的叙述是在假定讀者已通曉物理数学初步（解析几何、微积分、簡单微分方程的解法及其在力学上的应用等）的前提下进行的，此外不再有其他假定（希望讀者一面讀一面好好考虑其中相当丰富的例子）。

首先自向量开始，学过力学的讀者可能知道“有方向与大小的量”謂之向量。三維空間的向量 $\boldsymbol{x}$，采用空間坐标，可以用三个分量 x_1, x_2, x_3 来表示（图 1）。假定坐标系已确定，它就可写成

$$\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3), \tag{1.1}$$

或作为“列向量”写成

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

（与此对应，(1.1)的右边叫做“行向量”）。

假定給定一个向量 $\boldsymbol{x}$ 与一个数(数量) λ，那末“$\boldsymbol{x}$ 的 λ 倍” $\lambda\boldsymbol{x}$ 这个向量就确定了。假定給定两个向量 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$，那末它們的“和” $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ 这个向量也就确定了。它們的作法想讀者已知道(图 1.2)。如果用分量来表达，当 $\boldsymbol{x}$ 用(1.1)，而 $\boldsymbol{y}$ 用

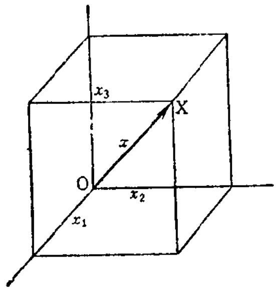

图 1.1

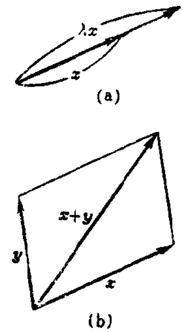

图 1.2

$$\boldsymbol{y}=(y_1,\ y_2,\ y_3), \tag{1.3}$$

那末

$$\lambda\boldsymbol{x}=(\lambda x_1,\ \lambda x_2,\ \lambda x_3), \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3). \tag{1.5}$$

因而有下面的計算規則成立:

交換律

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}, \tag{1.6}$$

結合律

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}). \tag{1.7}$$

在代数学中,这种"計算(也叫做运算,算法)規則"是值得重視的。对数学工作者来說,这不只是說說而已。例如由(1.6),(1.7)的交換律与結合律就能够得到如下事实的証明。

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{y}+(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z})$$
$$=\boldsymbol{y}+(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{x})=\cdots,$$

这就是說, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ 三个向量有 $3!=6$ 种排列方法,而任意一种排列加上任何括弧所得的和都是相同的。有四个以上的向量时,同样的事实也成立。上述的 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ 的和可省掉括弧而写成 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$. 一般有 k 个向量 x_1, $\cdots$, $\boldsymbol{x}_k$ 时,它們的和用 $\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{x}_i$ 表示。总

之向量之間的加法能够象数之間的加法一样如常施行。这种事实成立的基础(即由它能够得到理論証明)或"公理"就是交換律，結合律。

現在考虑加法的逆运算减法。假如考虑作为"基础"的**零向量**

$$\mathbf{0}=(0,\ 0,\ 0)$$

及(1.1)的**逆向量**

$$-\boldsymbol{x}=(-x_1,\ -x_2,\ -x_3),$$

那末对于任意 $\boldsymbol{x}$,

$$\mathbf{0}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x},$$

$$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=(-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}=\mathbf{0}.$$

因此,如果把 $\boldsymbol{y}+(-\boldsymbol{x})$ 写成 $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}$, 就有

$$(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y},\ (\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y},$$

显然 $-\boldsymbol{x}$ 是 $+\boldsymbol{x}$ 的逆。总上所述,得到

A. 向量之間加减法能够如常施行。

其中"如常"的意义也許有些模糊,稍后将会明白。

作为 A 的基础之一的是交换律(1.6)。它在几何上已有証明,由上面可知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}&=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3)\\&=(y_1+x_1,\ y_2+x_2,\ y_3+x_3)\\&=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

这第二边与第三边相等是由于数的加法服从交换律。同样，由数的加法的結合律引出向量的結合律(1.7)。在数之間,除加法的交換律、結合律之外,乘法的交換律 $ab=ba$,結合律 $(ab)c=a(bc)$,加法与乘法之間的分配律 $a(b+c)=ab+bc$ 都成立。又对于任意数 a, $1a=a$. 由这些及(1.4),(1.5)可直接得到下面的 B.

B. 关于向量的数量倍,下面的規則成立。

$$\lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\lambda\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}, \tag{1.8}$$

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{x}, \tag{1.9}$$

$$(\lambda\mu)\boldsymbol{x}=\lambda(\mu\boldsymbol{x}), \tag{1.10}$$

$$1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}. \tag{1.11}$$

这里 λ, μ 是数量也就是数，至于指的是那种数，那并沒有限制。但对于力学上所考虑的向量，它当然是实数。实数有各种性质，但是特别用在向量代数上的是它們之間加減乘除的四則运算能够如常施行。由于它的重要性，特提出下面的 C.

C. 数量之間加減乘除运算能够如常施行(这里"如常"的意义在稍后会清楚)。

向量之間的加減法及向量与数量的乘法叫做向量的"綫性运算"。因为減法是加 (-1) 倍，所以把綫性运算說成"加法及数量倍"，內容也不会改变。若对向量 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 重复施行綫性运算，就得到象 $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{x}_i$ 这样的向量。这 $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{x}_i$ 叫做 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 的"1 次組合"，或称为"綫性組合"。

以上說明了力学中所考虑的向量之間能够施行綫性运算，并且揭示了 A, B, C 的成立。但同样的事实在数学的其他各个部門中也存在。例如就 n 阶綫性齐次常微分方程

$$\frac{d^n y}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+p_n(x)y=0 \tag{1.12}$$

的解来考虑，这里系数 $p_i(x)$, $i=1, 2, \cdots, n$, 假定是 x 的解析函数，那末这方程就有 n 个"独立"的基本解 $y_1^0(x), \cdots, y_n^0(x)$，一般解 $y(x)$ 能够表为它們的綫性組合 $\sum_{i=1}^{n}c_i y_i^0(x)$，这就是熟知的"迭加原理"。綫性組合中的系数(数量) c_i 是复数。对于复数，加減乘除能够如常施行，即把复数看成数量，C 也成立。又假如 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是(1.12)的任意两个解，那末 $y_1(x)+y_2(x)$, $cy_1(x)$ (c 是复数)也是(1.12)的解。对于它們的綫性运算，当然 A, B 成立。

§2 关于現代代数学的方法

B. L. van der Waerden 有名的教科书《近世代数学》(Moderne Algebra) I, II 于 1930～1931 年初版发行，此后又重版，在最近的新版中，“近世” (Moderne) 两字已自标题中除去，遥名为 “代数学” (Algebra)。本书命名 “代数学” 是想同 van der Waerden 的代数学一样，自由地应用現代代数学的方法。因为今天“現代代数学”就是“代数学”。关于其一般方法，兹于此先进数言，也許对讀者会有好处。

作为它的方法的特征之一是“常采用集合論的記法”，例如实数全体的集合用 $\boldsymbol{R}$ 表示，复数全体的集合用 $\boldsymbol{C}$ 表示(这种記法继續在本书中采用)。假如采用这种記法，则“λ 是实数”这个事实就用“$\lambda\in\boldsymbol{R}$”(或“$\boldsymbol{R}\ni\lambda$”)表示。又“实数是复数”(的一种)这一事实用“$\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{C}$” (或“$\boldsymbol{C}\supset\boldsymbol{R}$”)表示。一般，“$x\in M$”(或“$M\ni x$”)就是“$x$ 是 M 中之**元**(或**元素**)”，换言之，即 “x 属于集合 M”. “$M_1\supset M_2$” (或“$M_2\subset M_1$”)就是“集合 M_2 是 M_1 的**子集合**”，亦即“M_2 中之元都是 M_1 中之元”。集合 M_1, M_2, $\cdots$, M_k 的**和集或幷集** (即属于 M_1, M_2, $\cdots$ M_k 中任意一个的元全体所成的集合) 用 $M_1\cup M_2\cup\cdots\cup M_k$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} M_i$ 表示。M_1, M_2, $\cdots$, M_k 的**通集**或**交集**(即同时属于所有 M_1, M_2, $\cdots$, M_k 的元全体的集合) 用 $M_1\cap M_2\cap\cdots\cap M_k$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{k} M_i$ 表示。属于 M_1 而不属于 M_2 的元全体的集合用 M_1-M_2 表示。**空集** (即不包含元的集合)用 $\emptyset$ 表示(例如 $M\cup M=M\cap M=M$, $M-M=\emptyset$)。

第二个特征是“算法与算法規則的重視”，关于这方面，在前面已提及，今后这样的例子也到处可以看到，不再重述。

第三个特征是“抽象化，公理化的方法”。为防止消极的理解，

在这里特强調它的积极意义。数学原来是抽象的学問。1, 2, 3, …这些自然数是从1个人，2只鳥，3个苹果，…等抽象得到的，正因为它是被抽象出来的概念，所以应用广泛。

在前面已看到对于力学中所使用的向量，对于齐次綫性常微分方程的解，A, B, C都成立。于是，仅只从A, B, C依邏輯方法演繹而得的理論，在任何場合——A, B, C成立的所有場合——都能够应用。这时对所考虑的形象，只想着是力学中的向量就可以了。这样，通过直观考察作为仅只由A, B, C推証的結果（在初等几何学中，以图形为背景所考虑的証明与通过公理、定理推証的吻合），在微分方程論以及其他各分支中都有运用的可能性。因此不得不把A, B, C的內容用含义清晰的公理来叙述。这就是"抽象化，公理化方法"的說明。

最后要注意在抽象代数学中文字不一定表示数（不要拘泥于"代数"这个字面），文字可以表示向量、集合及其他各种东西。

§3　作为代数系的向量空間

由上面的說明，首先使§1, A的內容清楚了。

在A是說向量之間"加减法能够如常施行"。一般所謂"在某集S中加减法能够如常施行"，其意义由下面五个公理来定义。

A1. S是非空集，对于$x, y\in S$, x, y的"和"$x+y\in S$是唯一确定的（使x, y对应于$x+y$的算法，叫做"加法"）。

A2. $x+y=y+x$（交換律）。

A3. $(x+y)+z=x+(y+z)$（結合律）。

A4. 对于S中任意元x, S中有1个适合$x+0=0+x=x$这样的元0存在，它叫做**零元**。

A5. 对于$x\in S$，有适合$(-x)+x=x+(-x)=0$这样的"元$(-x)\in S$存在。