目　　录

线 性 代 数

第一章 行 列 式

内容提要

行列式是线性代数的一个重要组成部分.行列式定义、性质及展开定理是行列式的基本内容.运用行列式性质及展开定理计算行列式是学习行列式的主要目的.

一、n 阶行列式定义

由 n^2 个元素 a_{ij} 构成的 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

是一个 $n!$ 项的代数和,每一项是行列式中处在不同行与不同列的 n 个元素 $a_{1p_1}, a_{2p_2}, \cdots, a_{np_n}$ 之积.

二阶行列式可由对角线法则得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

三阶行列式也可由对角线法则得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

但是四阶及四阶以上的行列式不能由二、三阶行列式的对角线法则简单推广得到.引用排列、对换、逆序数等代数概念可以把二、三

阶行列式与 n 阶行列式的定义统一起来.

行列式中元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 是

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

其中 M_{ij} 是在行列式中划去第 i 行、第 j 列剩余下来的 $n-1$ 阶行列式. 代数余子式在计算行列式以及求逆矩阵时是一个必不可少的概念,务必熟练掌握.

二、行列式的性质

行列式有六条性质及其相关推论,掌握好这六条性质是熟练计算行列式的关键. 这六条性质是:

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

性质 2 互换行列式的两行(列),行列式变号.

推论 如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式为零.

性质 3 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘此行列式.

推论 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

性质 4 行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式为零.

性质 5 若行列式 D 的某一列(行)的元素都是两数之和(例如第 i 列的元素都是两数之和),

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}+a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}+a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni}+a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和,

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

性质 6 把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一数，然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式不变，即(例如以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由定义知行列式是一个代数和. 所谓计算行列式就是计算行列式的值. 利用行列式性质可以简化行列式的计算.

三、行列式展开定理

行列式按行(列)展开定理反映行列式的另外一种重要属性：n 阶行列式可以表示成 n 个 $n-1$ 阶行列式之和.

展开定理 行列式等于它的任何一行(列)的所有元素分别与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},\ i=1,2,\cdots,n,$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},\ j=1,2,\cdots,n,$$

其中 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

推论 行列式任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零.

展开定理是计算行列式的重要手段,推论在线性代数的某些定理证明中是很有用的.

四、克莱姆法则

克莱姆法则 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

那末,方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

其中 $D_j(j = 1, 2, \cdots, n)$是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式,即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

克莱姆法则的限制条件很强,它要求线性方程组的方程个数等于未知数的个数,并且方程组的系数行列式不为零.这在很多情况下是不满足的.应用克莱姆法则解线性方程组时需要计算 $n+1$

个 n 阶行列式,工作量大.因此,人们很少用克莱姆法则求解方程组.但是,克莱姆法则是研究一般情况下线性方程组理论的一个不可缺少的基本结论.

例题分析

例1.1 根据行列式定义计算 n 阶行列式

$$(1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{vmatrix},$$

$$(2)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

分析 n 阶行列式共有 $n!$ 项,每一项的一般形式是

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{n-1,p_{n-1}}a_{np_n},$$

其中 a_{ip_i} 表示行列式中第 i 行第 p_i 列的元素,该项前面的符号为 $(-1)^t$,其中 t 是列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.显然,每一项 n 个元素的积中有一个元素为零时该项就为零.因此我们只要找出那些不为零的项,就可求得行列式的值.

解 (1) 已知行列式中第一行的元素除了 a_{12}(即 $p_1=2$)以外其余都为零,因此行列式的 $n!$ 项中只可能是形如 $a_{12}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的项不为零.又根据第二行的元素除了 a_{23}(即 $p_2=3$)以外其余都为零,于是得行列式的 $n!$ 项中只可能是形如 $a_{12}a_{23}a_{3p_3}\cdots a_{np_n}$ 的项不为零.继续分析第三行,第四行……第 n 行,得到在 $n!$

项中只有形如 $a_{12}a_{23}a_{34}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}$的项才不为零，即仅有这一项不为零.且它的列标排列 $234\cdots n1$ 的逆序数为 $n-1$，于是

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1} = (-1)^{n-1}n!.$$

(2) 这是一个上三角形行列式，它的特点是行列式中主对角线以下的元素全为零.在上三角形行列式中第 n 行只有第 n 列元素 $a_{nn}\neq 0$，因此在 $n!$ 项中只有形如 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{n-1,p_{n-1}}a_{nn}$的项才可能不为零.根据行列式定义知，在其余的列标 $p_1,p_2,\cdots,p_{n-1}$ 中均不能取为 n.而在行列式第 $n-1$ 行中只有第 $n-1$ 列与第 n 列的元素不为零，所以除去第 n 列只可取第 $n-1$ 列，即 $p_{n-1}=n-1$.于是在 $n!$ 项中只有形如 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$的项才可能不为零.继续分析第 $n-2$ 行，第 $n-3$ 行……第1行，得 $n!$ 项中不为零的项只能是 $a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$.它的列标 $123\cdots n$ 的逆序数为零.所以

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例1.2 计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

分析 四阶及四阶以上的行列式没有对角线法则，只能用行列式性质尽可能多的把行列式的某一行(列)中的元素化成零，然

后将行列式按行(列)展开.

解 行列式第四列元素为 2,1,0,1. 可以用行列式性质把第四列元素化为 0,0,0,1.

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_1-2r_4]{r_2-r_4} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -7.$$

式中 r_1-2r_4 表示第四行乘 -2 加到第一行上去, r_2-r_4 表示第四行乘 -1 加到第二行上去.

例 1.3 计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 & 5 \\ 4 & -4 & 6 & -7 \\ 3 & -1 & -4 & 5 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

分析 行列式中元素 $a_{41}=1$, 可以利用行列式性质将第四行中其余元素化为 0.

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 & 5 \\ 4 & -4 & 6 & -7 \\ 3 & -1 & -4 & 5 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_4+c_3} \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 & 2 \\ 4 & -4 & 6 & -1 \\ 3 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix},$$

式中 c_4+c_3 表示第三列加到第四列上去. 最后一个行列式的第四列更容易化简, 可以通过第三行把第四列的 2、-1 化为 0, 然后按第四列展开, 得

$$D \xlongequal[r_1-2r_3]{r_2+r_3} \begin{vmatrix} -2 & 4 & 5 & 0 \\ 7 & -5 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 7 & -5 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 216.$$

注 计算行列式时要随时分析行列式元素的特点. 本例开始时准备把第四行元素尽可能化为零, 但在演算过程中发现化第四

列更简单,就可以调整,使计算更简捷.

例 1.4 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & y & & & \\ & x & y & & \\ & & x & \ddots & \\ & & & \ddots & y \\ y & & & & x \end{vmatrix}.$$

分析 行列式的第一列(行)仅有两个非零元素,因此可以将 D_n 按第一列(行)展开,使得计算 n 阶行列式变成计算两个 $n-1$ 阶行列式.

解 **法一** 把 D_n 按第一列展开得

$$D_n=x\begin{vmatrix} x & y & & & \\ & x & y & & \\ & & x & \ddots & \\ & & & \ddots & y \\ & & & & x \end{vmatrix}_{(n-1)}+(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix} y & & & & \\ x & y & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & x & y \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

$$=x^n+(-1)^{n+1}y^n.$$

法二 把 D_n 按第一行展开得

$$D_n=x\begin{vmatrix} x & y & & & \\ & x & y & & \\ & & x & \ddots & \\ & & & \ddots & y \\ & & & & x \end{vmatrix}_{(n-1)}+(-1)^{1+2}y\begin{vmatrix} 0 & y & & & \\ & x & y & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & y \\ y & & & & x \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

$$=x^n-y\begin{vmatrix} 0 & y & & & \\ & x & y & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & y \\ y & & & & x \end{vmatrix}_{(n-1)},$$

上式中的 $n-1$ 阶行列式按第一列展开得

$$D_n = x^n - y(-1)^n y \begin{vmatrix} y & & & \\ x & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & x & y \end{vmatrix}_{(n-2)}$$

$$= x^n - y^2(-1)^n y^{n-2}$$

$$= x^n + (-1)^{n+1} y^n.$$

注 不难看出,解法一比解法二简单.若按行列式 D_n 的其它某一行(列)展开都较复杂.在用展开定理选取恰当的行(列)时应先分析.

例 1.5 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

分析 若把行列式的第一行乘 -1 分别加到第二行、第三行……第 $n+1$ 行上去即可得到上三角形行列式.

解 $$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} = b_1 b_2 \cdots b_n.$$

例 1.6 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}.$$

分析 D_n 的每一行之和均为 $1+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$，所以可以把行列式的每一列都加到第一列上去，然后把第一列的公因式提到行列式外．最后易把 n 阶行列式化为上三角形行列式．

解

$$D_n=\begin{vmatrix}1+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2 & \cdots & a_n\\ 1+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & 1+a_2 & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$$

$$=(1+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix}1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & a_2 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}.$$

把最后所得行列式的第一行乘 -1 分别加到第二行、第三行……第 n 行上便得到上三角形行列式

$$D_n=(1+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix}1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}=1+\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

例 1.7 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix},\text{其中 } x_i\neq a_i,\ i=1,2,\cdots,n.$$

分析 若把第一行乘 -1 分别加到第二行、第三行……第 n 行上去，得到一个在主对角线以下零元素较多的行列式，再作一些运算可以把行列式化成上三角形行列式.

解

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1-x_1 & x_2-a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1-x_1 & 0 & x_3-a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1-x_1 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}.$$

因为 $x_i\neq a_i(i=1,2,\cdots,n)$，所以把行列式的第一列提取公因子 (x_1-a_1)，第二列提取公因子 (x_2-a_2)……第 n 列提取公因子 (x_n-a_n) 得

$$D_n=(x_1-a_1)\cdots(x_n-a_n)$$

$$=\begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1-a_1} & \frac{a_2}{x_2-a_2} & \frac{a_3}{x_3-a_3} & \cdots & \frac{a_n}{x_n-a_n} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

若把第二列、第三列……第 n 列都加到第一列上去得到

$$D_n = (x_1 - a_1)\cdots(x_n - a_n)$$

$$\times\begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1-a_1}+\frac{a_2}{x_2-a_2}+\cdots+\frac{a_n}{x_n-a_n} & \frac{a_2}{x_2-a_2} & \cdots & \frac{a_n}{x_n-a_n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(x_i - a_i)\left[\frac{x_1}{x_1-a_1}+\frac{a_2}{x_2-a_2}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{x_n-a_n}\right]$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(x_i - a_i)\left[1+\frac{a_1}{x_1-a_1}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{x_n-a_n}\right]$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(x_i - a_i)\left[1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i-a_i}\right].$$

例 1.8　计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

分析　按第一列展开后可得递推公式.

解

$$D_n = x\begin{vmatrix} x & -1 & & & & \\ & x & -1 & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

$$+(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & & & \\ x & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= xD_{n-1} + (-1)^{2n}a_n$$

$$= xD_{n-1} + a_n.$$

继续用此公式递推下去最后可得

$$\begin{aligned}D_n &= xD_{n-1} + a_n\\ &= x(xD_{n-2} + a_{n-1}) + a_n\\ &= x^2D_{n-2} + xa_{n-1} + a_n\\ &= \cdots\\ &= x^{n-1}a_1 + x^{n-2}a_2 + \cdots + x^2a_{n-2} + xa_{n-1} + a_n.\end{aligned}$$

例 1.9 试证

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right).$$

其中 $a_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n$.

分析 行列式主对角线元素均为两数之和 $1 + a_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，其余元素均可看作为 $1 + 0$，这样，行列式的每列均由两个子列组成，第一子列元素均为 1，第二子列元素为 a_i 或零，利用行列式性质，行列式 D_n 可以看作 2^n 个行列式之和，其中绝大部分行列式为零，只剩下 $n+1$ 个行列式不为零.

解 **法一**

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1+0 & 1+0 & \cdots & 1+0 \\ 1+0 & 1+a_2 & 1+0 & \cdots & 1+0 \\ 1+0 & 1+0 & 1+a_3 & \cdots & 1+0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1+0 & 1+0 & 1+0 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}
$$

$$
+\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_1 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{n-2} & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{vmatrix}
$$

$$
+\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}
$$

$$
= a_2a_3\cdots a_n + a_1a_3\cdots a_n + \cdots + a_1a_2\cdots a_{n-2}a_n + a_1a_2\cdots a_{n-1} + a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n
$$

$$
= a_1a_2\cdots a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+1\right).
$$

注 1 本例也可用数学归纳法证明.留给读者作为练习.

注 2 本例也可用与例 1.7 相同方法,计算行列式而证明所需结果.

法二 本例也可用加边法证明.

$$
D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \quad (n\text{ 阶行列式})
$$