

中小学数学

开放题丛书

全国教育科学  
“九五”规划重点课题  
研究成果

# 开放题 ——数学教学的新模式

戴再平 主编



上海教育出版社

中小学数学开放题丛书

戴再平 主编

# 开放题 —— 数学教学的新模式

编者：戴再平（以下以章的先后为序）  
张奠宙 孙联荣 龚 雷 刘 萍  
莫雅慈 杜玉祥 黄荣金 张思明  
孔企平

上海教育出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

开放题: 数学教学的新模式 / 戴再平编著. —上海:  
上海教育出版社, 2002. 1

(中小学数学开放题丛书)

ISBN 7-5320-7776-4

I. 开... II. 戴... III. 数学课—教学研究—中小  
学 IV. G633.602

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第000166号

全国教育科学“九五”规划重点课题研究成果

中小学数学开放题丛书

主编 戴再平

开放题——数学教学的新模式

戴再平等 著

上海世纪出版集团 出版发行  
上海教育出版社

(上海永福路123号 邮政编码:200031)

各地新华书店经销 上海商务联西印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 7.25 插页 4 字数 174.000

2002年1月第1版 2002年1月第1次印刷

印数 1-6,100本

ISBN 7-5320-7776-4/G·7880 定价:(软精)14.50元

## 序

江泽民同志说：“一个没有创新能力的民族难以屹立于世界民族之林。”时代呼唤着数学教育工作者要转变教育观念，改革人才培养模式，激发学生独立思考和创新的意识。目前的中小学数学教材中，习题基本上是为了使学生了解和牢记数学结论而设计的，在这种情况下，学生在学习过程中产生了以死记硬背代替主动参与，以机械方法代替智力活动的倾向。为了改变这一情况，使数学教育适应时代的需要，我们选择了数学开放题作为一个切入口，希望通过开放题的引入，促进我国数学教育的开放化与个性化，特别是有利于学生创新精神的培养和实践能力的形成。

数学开放题在过去的教学中曾经有过不少的例子，但是对它在数学教学中的地位肯定，还是近二十年来的事。1993年，我们开始进行数学开放题的教学实验，有关的研究很快成为一个亮点；1997年，全国教育科学规划办批准“开放题——数学教学的新模式”立项为“九五”规划重点课题；1998年10月，近百名国内外数学教育学者和中小学教师云集上海，举行了“‘数学开放题及其教学’学术研讨会”，数学开放题更成为我国数学教育的一个研究热点，同时我国数学开放题的研究成果也引起了国际上同行的注意。

为反映我国数学开放题的研究进展情况，同时给中小学师生提供一批资料，在上海教育出版社的积极支持下，我们编写了《中小学数学开放题丛书》。在丛书的编写过程中，得到了各地包括香港地区的学者和教师的热忱支持与帮助，值得一提的是，原国际教育委员会执行委员、华东师范大学张奠宙教授对丛书的编写

给予了热情的鼓励,并亲自参加撰稿,我们对这些先生和女士表示诚挚的感谢!

本丛书是全国教育科学“九五”规划重点课题的研究成果.值此新世纪到来之际,我们谨以本丛书向全国中小学师生献礼.

数学开放题是一个新课题,一个新事物,从这个意义上说,本丛书终究是不可能完善的.“纸上得来终觉浅,绝知此事须躬行”.对本丛书存在的问题和不足,我们衷心地希望得到大家的批评与指正.

“开放题——数学教学的新模式”课题组

1999年7月

# 目 录

第一章 时代的呼唤	1
1.1 一点历史:从欧几里得到牛顿	2
1.2 推理数学与直观数学	3
1.3 儒家的“考据文化”与逻辑推理	5
1.4 数学教育的开放性	10
第二章 国际、国内研究概况	14
2.1 国际巡礼	14
2.2 日本:从“未完结问题”到“课题学习”	17
2.3 我国的研究情况	22
第三章 数学开放题的概念及其分类	28
3.1 数学开放题的概念的界定	28
3.2 数学开放题的特点	32
3.3 数学开放题的分类	38
第四章 开放题——数学教学的新模式	50
4.1 构建新的教学模式是素质教育的核心问题	50
4.2 开放题——数学教学的新模式	52
附:“钟面数字问题”的教学设计	55
第五章 开放题与数学课堂文化	61
5.1 开放题课堂教学中的内在文化(精神文化)	62
5.2 开放题课堂教学中的外在文化(制度、行为文化)	75
第六章 开放式数学课的剖析	90
6.1 理论框架	91

6.2	一堂课的剖析	93
6.3	学生体验了什么	103
第七章	数学开放题与差生的转化	106
7.1	数学差生概说	107
7.2	面向差生的数学开放题的特色	119
7.3	数学差生的转化与开放题	123
第八章	现代教育技术与数学开放题	132
8.1	如何使用现代教育技术解决数学开放题	133
8.2	对运用现代教育技术解数学开放题的思考	148
第九章	应用背景下的数学开放题	150
9.1	数学应用中的开放性问题	150
9.2	应用背景下的开放题设计	155
9.3	应用和建模的教学活动的开放性设计	160
	附: 现实生活中开放性问题设计的素材	163
第十章	数学开放题的编制	169
10.1	弱化陈题的条件,使其结论多样化	169
10.2	隐去陈题的结论,使其指向多样化	174
10.3	在既定的条件或关系下,探讨多种结论	180
10.4	给出结论,寻求使结论成立的充分条件	183
10.5	比较某些对象的异同点	187
10.6	在既定的条件或实际情景中,设计解决某些问题的方案	189
第十一章	用开放性问题进行数学教学评估改革	198
11.1	对“质”的学习结果的评估	198
11.2	封闭性问题和传统数学成绩评估的不足	200
11.3	开放性问题 and 高层次思维	203
11.4	评估的层次和分层评估的框架	205
11.5	数学测验方法的设计	207

11.6	学生成绩的评估结果·····	210
11.7	对数学学习结果的探讨·····	216
11.8	研究结果的启示·····	218
	后记·····	220



## 第一章 时代的呼唤

20 世纪的最后 20 年,中国大踏步地走向开放.“改革和开放”奏出了中华民族复兴的基调和最强音.国家的开放,社会的开放,思想的开放,自然地带来了“教育的开放”.派出去,请进来,中国的教育思想在继承自己优秀传统文化的基础上,注意吸收国外的有益教育经验为我所用.“面向世界,面向未来,面向现代化”,正是教育上实行开放政策的指针.

在这样的形势下,数学教育界提出了一种新的教学模式:数学开放题教学.90 年代以来,数学开放题出现在论文中,课堂上,直至高考的考场里.1993 年问世的《中学数学问题集》<sup>[1]</sup>含有“开放题”的专章.1996 年《数学习题理论》<sup>[2]</sup>再版时,“开放题”已是特定的研究对象.当“钟面数字问题”在浙江省初中数学教材中出现时,似乎还有些“偶然”,没有料到的是,不仅各省、市、自治区的中考数学试题屡屡出现“开放题”,1998 年的全国高等学校招生统一考试数学试题里“开放题”居然也堂皇入室.于是,一种在统编教材极少有地位的题型,据山东省泰安师范专科学校的杜玉祥教授 1998 年的调查,81.2%的师专数学教育专业学生还不知道的“数学开放题”,终于引起了人们的广泛注视.

从“改革开放”的国策,到“数学开放题教学模式”,我们可以看到某种历史的印记.可是,如果我们回顾中国的思想文化史、世界数学发展史,就会看到,“开放”的数学教学模式是一种重大的教学观念的转变.儒家文化的收敛性思维特征,数学史上“形式演绎”的强大作用,都使得“数学的开放式思维”在中国很难立足.开放题教

学模式的到来历经甘苦. 它的现状需要扶植. 未来的前景大概是光明的, 但免不了要经历艰苦的斗争. 这并非危言耸听. 让我们先来看看历史传统.

## 1.1 一点历史: 从欧几里得得到牛顿

古希腊的文明, 数学是主要标志之一. 欧几里得(Euclid)的一部论述几何学的巨著《原本》, 闪耀着不朽的理性精神. 世界上的文字著作中, 除了“圣经”, 就以《原本》的发行量最大. 中国的近代科学, 一般都以利玛窦和徐光启翻译《原本》前六卷(翻译本定名《几何原本》)的 1607 年作为起点. 对《几何原本》的认识和崇拜, 也许是人类走向科学的必由之路.

但是,《几何原本》的思维模式是演绎的、逻辑的、相对封闭的. 它从一些公理开始, 用完全理性的方法进行逻辑推理, 发展成一部严密的演绎体系.《几何原本》是古希腊学者创造性思维的一种“总结性”的著作. 由于是“总结”, 古埃及和古巴比伦的数学实践, 毕达哥拉斯学派的直观数学创造, 欧多克斯(Eudoxus)突破“无理数”障碍的创新研究精神, 都被淹没在逻辑的海洋里. 人们在欣赏和赞叹欧几里得的逻辑体系的同时, 渐渐地把数学等同于逻辑, 以“理性的封闭演绎”作为数学的主要特征, 因而逐步地忽略了数学思维的开放性品质. 演绎体系的深刻, 尤其使中国科学家感受到理性思维威力的震撼. 有些学者甚至把中国科学落后的原因归结于缺乏“严密的逻辑思维”.

以牛顿(Newton, S. I.)为代表的数学巨人冲破了“数学=逻辑演绎”的公式. 微积分是《几何原本》的自然发展吗? 看来不是. 我国著名科学史家席泽宗院士对此有过精辟的论述:

作为近代数学标志的微积分, 并不是从欧几里得几何学发展起来的. 牛顿、莱布尼兹(Leibniz, G. W.)和他们的先辈们为了适

应当时运动学、弹道学、光学和天文学的需要,大胆地不顾欧几里得关于严密性的要求,发明了微积分.在微积分建立以后,反对微积分者正是那些受着欧几里得几何学束缚的人.关于这一点,在1981年翻译出版的斯科特著的《数学史》中有详细叙述.牛顿的《自然哲学数学原理》虽然是按照《几何原本》的模式写的,但那只是形式.牛顿自己说过,读了《几何原本》对他没有多少帮助.<sup>[3]</sup>

我想,席泽宗先生在此绝无贬低《几何原本》的意思,而是力求对人类的两种思维模式进行科学分析.

欧几里得几何学: 严密的逻辑演绎思维模式

牛顿的微积分学: 开放的实践创造思维模式

总之,逻辑是重要的,但只有逻辑是缺乏创造力的.对数学教学来说,培养逻辑思维能力是重要的,但只有逻辑思维能力是走不远的.如果说“逻辑思维”是收敛的、封闭的,那么“创新性思维”必须是发散的、“开放”的.开放式的数学教学,正是在这一差异上显示出它的重要性.

## 1.2 推理数学与直观数学

中国的古代数学传统,到李善兰(1811—1882)画上句号.19世纪和20世纪之交,或者说在辛亥革命前后,一批留学生将西方数学引入中国,于是开始了中国的“现代数学”和“现代数学教育”事业.在这里,我们要指出的是,世界上在这一时期占统治地位的数学观恰恰是“形式主义”、“逻辑主义”这样的思潮.“数学=逻辑”的观念,从一开始就形成了.

纵观全部数学史,一直有两条线:“推理数学”观和“直观数学”观.二者交替主导,互相影响,共同发展.每当数学思想出现大的突破,数学成果成批涌现的时候,数学创新占主导地位.但这时的数学往往不大严密,许多数学定理看上去是“对”的,用起来也很有成

效,可往往会有些矛盾,解释不通.于是,有一些数学家开始做整理工作,寻求一些最基本的事实作为出发点,进行逻辑分析和演绎推理,构成比较严密的形式化体系.

古希腊许多大数学家都是极具创造性的,如泰勒斯(Thales)、毕达哥拉斯(Pythagoras)、欧多克斯等.毕达哥拉斯的数学见解都是建立在有理数基础上的,一切的“比值”必须是有理数.当他的门人发现存在无理数的时候,他的数学就露出破绽,难以自圆其说了.后来是欧多克斯用穷竭法克服了这一困难.他们的创造性工作,到了欧几里得手里才获得完全的逻辑整理,这就是《几何原本》.文艺复兴以后,数学又面临重大突破,牛顿和莱布尼兹发明了微积分.他们的伟大创造是人类理性的胜利,但是不严格.18世纪的达朗贝尔(D'Alembert, J. le R.)开始整理,仍不完善.最后在19世纪末才使得分析学严密化.牛顿时代的那种创造性研究风格,一直在发展.欧拉(Euler, L.)、拉普拉斯(Laplace, P. S.)、傅立叶(Fourier, J. B. J.)、马克斯威尔(Maxwell, J. C.)都是大踏步前进的“开放式”的研究家.然后是希尔伯特(Hilbert, D.)出版《几何基础》,为严密化的数学提供了典范.

进入20世纪之后,形式化的思潮仍占统治地位.但是,一些伟大的数学家仍然在“开放式”地思维,不受“逻辑严密性”的约束.大数学家庞加莱(Poincaré, J. H.)创立的“拓扑学”、“定性理论”都不大严格.勒维(P. Lévy)建立了现代概率论,但常常把简单的定积分算错.莱夫谢兹(Lefschetz, S.)是拓扑名家,但他的学生说他的论文几乎篇篇都有毛病,但又都可以改正.总之,数学家的创新工作,可以是十分严密的推导,也可以是开放式的直觉思维.

冯·诺依曼(Von Neumann, J.)是一位当代的大数学家.他的数学工作十分严密,曾是希尔伯特研究数学基础的得力助手.但是,他的创造力更表现在“算子代数”、“对策论”、“数理经济学”等学科的创立,尤其是研制电子计算机,提出冯·诺依曼方案,造福

人类.这样伟大的工作不是逻辑推理所能推出来的.当然,一旦想到“电子计算机”方案,以下的工作依然需要逻辑演绎方能奏效.

综上所述,数学上的开放性思维,是数学前进的动力之一.数学毕竟不等于逻辑.“直觉—试验—错误—推测—猜想—证明”,这大概是发展数学的顺序.当然,我们希望最后的结果有“严格的证明”.当严格的证明一时达不到的时候,人们依然承认他们的直觉的重要.推测的数学也是数学.<sup>[4]</sup>

### 1.3 儒家的“考据文化”与逻辑推理

清代中期以来,以戴震为首的考据学派在学术界占统治地位.考据学派的治学方法,重实证,讲究逻辑推理,因而贴近数学.清末以来的学术界,崇尚“严谨治学”的文化氛围,恰与西方数学要求严密逻辑推理的层面相吻合.

儒家文化没有数学的地位,但本身是一个演绎系统的思想和行动,儒家文化在演绎这一点上,与西方数学要求却并不抵牾.以前关于中国传统数学的论述,都认为中国传统文化“缺乏形式逻辑,却一直倾向于发展辩证逻辑”.<sup>[5]</sup>日本三上义夫认为,在古代中国数学思想中,最大的缺点是缺少严格求证的思想,他把这一点同形式逻辑不能在中国发展联系起来.

这一判断有一定的道理.但是,从徐光启接触欧氏《几何原本》之时起,中国数学家对西方的逻辑推理从未提出过反对意见,而且能够很顺利地接受.尤其是徐光启、李善兰等都能够欣赏西方数学中精细的逻辑演绎推理,并高度赞赏.戴震等考据学者提倡复古主义,认为西方的数学中国早已有之.他们虽不称赞西方数学,却并未指摘西方数学中的逻辑推理不符合中国国情,加以拒绝.时至今日,华人地区的数学课程中,逻辑演绎的要求远远高出世界上其他地区,而且学生接受起来并不困难(相对而言),这不能不从传统文

化的演绎背景中找原因。

为什么说儒家文化是一个演绎系统呢？让我们来作一类比：

- ◆ 儒家经典相当于数学的公理。
- ◆ 朱熹等为经典作注是权威的论证。
- ◆ 读书人的任务是“代圣贤立言”，相当于作推论。

儒家文化的思想体系，从表面上看似似乎不讲逻辑推理、演绎论证。但就整体来看，思维方式是收敛的、封闭的、演绎的。与此相反，凡是涉及创造、探索和发现的发散思维层面，只要和经典论述有所抵触，就绝对不能允许。这种演绎式的封闭思想体系，不鼓励创新，自然会扼杀一切创造，包括数学上的创造。相比之下，儒家学说虽不重视数学，但是对数学上的逻辑演绎方法并不拒绝和反对。

1840年鸦片战争之后，西学大举进入，乾嘉学派到19世纪下半叶虽然已经解体，但是考据文化一经形成，便会发生重要的潜在作用。“中国旧学，考据，掌故，词章为三大宗”，考据列在第一位。“严谨治学”成为研究一切学问的起码标准，也是对学者的最高赞赏，其核心当然是指考据和训诂。辛亥革命以来，特别是五四运动以来，尽管西方科学与中国传统文化屡有冲突，却一直和考据学派的思想相安无事。康有为、梁启超、王国维、章太炎、陈寅恪、钱穆等国学大师都是一时的学界泰斗，他们的治学态度绝对是一个时期的榜样。他们的学识渊博自不待言，而更令人折服的正是他们“精于考据，长于训诂”的治学态度。考据学派对中国科学发展的作用可以概括为梁启超的以下论断：

“自清代考据学派200年之训练，成为一种遗传。我国学子之头脑渐趋于冷静慎密。此种性质实为科学成立之基本要素。我国对于形的科学（数理），渊源本远。用其遗传上极优粹之科学头脑，将来必可成为全世界第一等之科学国民。”（梁启超：《清代学术概论》）

这种“遗传”基因，直到今天依然存在。

辛亥革命之后，考据学派作为一种哲学和治学方法并未消失。而五四运动提倡“科学和民主”，考据学派还是“可以依靠的”盟友。这里，我们从新文化运动的代表人物——胡适和考据的关系来进行考察。

胡适出身儒学世家，自幼熟读经书。1910年，他到北京参加第二批庚子赔款留美考试，经他二哥好友杨志洵的指点，才发觉做学问要从《十三经注疏》开始，即从考据入手。留美期间，胡适在熟悉西方科学与哲学的同时，完成了《诗三百篇言字解》、《尔汝篇》、《吾我篇》、《诸子不出于王官论》等典型的考据学作品。学习西方科学与考据学研究可以并行不悖，令人惊奇。

在20世纪初年，考据学仍是一种学术时尚。1918年2月19日、21日、22日及其前后，《北京大学日刊》发表讲师刘鼎和《书尔汝篇后》的文章，接着又刊出署名为理科数学门毛准的文章：《书“书尔汝篇后”后》，先后和胡适的考据学论文《尔汝篇》讨论，后来胡适也有回应。《北京大学日刊》是一份公告式的新闻类日报，可见当时的考据学是何等的普及。数学门的学生写考据学文章，那时候大概也不奇怪。

胡适回国之后，继续“整理国故”，从事《红楼梦考证》等等考据学工作。他的哲学思想当然是秉承“杜威的实用主义”，但是他的名言“大胆地假设，小心地求证”，却明显地有考据学派的影子。

他在《几个反理学的思想家》一文中，高度评价戴震考据学派的学术成就：

“这个时代是一个考证学昌明的时代，是一个科学的时代。戴氏是一个科学家，他长于算学，精于考据，他的治学方法最精密，故能将这个时代的科学精神用到哲学上去，教人处处用心知之明去剖析事物，寻求事物的条则。他的哲学是科学精神的哲学。”<sup>[6]</sup>

这段话清楚地指明了考据学派和西方科学之间的联系。直至今日，仍有人将戴震和笛卡儿相提并论，认为“笛卡儿清算了中世

纪神学,戴震清算了宋明理学”。<sup>[7]</sup>这当然是一个非常高的评价。

如前所述,清代以来的“考据学派”已经形成了一种文化现象。它的精神业已渗入知识分子的血液之中,成为文化“遗传”的一个基因。在这样的文化背景下,重考据,讲推理已不是个人行为,而是中国学者做学问的一种基本态度,这当然包括对数学的态度。特别是,考据学派的实证推演论证方法和数学的逻辑思维特征很自然地相合,给中国的数学发展打下了深刻的烙印。

考据学和逻辑学的关系,实际上是很密切的。通常说“有一分证据说一分话,有九分证据不说十分话”,这是逻辑学的基本原则。比如你要考据“传綦就是八大山人”时,先证明“八大山人”就是“个山”,而“个山”即“传綦”,这里就用了“甲是乙,乙是丙,则甲必是丙”的逻辑上的“传递性”的原理。<sup>[8]</sup>

提倡考据学很自然地会通向逻辑学的教育。中国历来把逻辑学称为“名学”,或“辩学”,或“论理学”,它在儒学教育中的地位并不重要。不过,晚清以来的教育方案中,名学的地位日渐提高。1906年的北洋师范学堂,“辩学”是必修课,第二年3学时,第三年2学时。1919年的北京女子高等师范学校,“论理学”是各科的预科的必修课。1906年,王国维在设计“经学科”和“文学科”的课程时,也都把“名学”放在重要位置。倒是五四运动之后,“名学”、“逻辑学”在课程中渐渐少见。1949年之后,除哲学系自然要讲授逻辑学之外,在别的系科中已无位置。“逻辑学”只在中文系的课程中偶尔还可以见到。原因何在?恐怕是由于数学和逻辑有特殊密切关系,培养“逻辑思维能力”的任务,就统统交给数学去完成了。

数学和逻辑的关系本来是很清楚的。数学比逻辑要多得多。大数学家希尔伯特说:“数学具有独立于任何逻辑的可靠内容,因而它永远不可能建立在唯一的逻辑基础之上。”<sup>[9]</sup>还有一些大数学家则说得更明白,认为:逻辑不过是数学家用以保持数学健康发展所必须的卫生规则;逻辑是贫乏的,而数学是最多产的“母亲”。但是,



在当前中国数学教育界的一些认识中,逻辑的地位却出奇地高.下面的论断是典型的:

“数学教学中,发展逻辑思维能力是培养能力的核心”(《九年制义务教育全日制初级中学数学教学大纲》,1988年11月).

由于强调逻辑思维的重要性,必然要追求数学推理的“严谨性”,崇尚数学内容的“形式化”.“应试数学”的兴起,把数学能力简化成“由已知条件达到所求结论的逻辑链条的构筑”.数学理解,数学应用,数学思想被全盘弱化了.在“形式化”思潮影响下,严谨性被强调到不适当的程度.活泼的、创造性的数学思维,往往因为“不严谨”而被扼杀.

中国学生学习的是以逻辑见长的西方数学,应该对逻辑思维感到困难才合理,但现在却以逻辑思维能力强著称.西方国家的学生本应继承古希腊数学的严密逻辑思维传统,在逻辑严谨性的教育上超过东方国家,现在却相反.西方各国在正确地强调培养创造性数学思维的时候,却忽视了必要的逻辑思维训练.这种东西方情形倒置的原因很多,但我认为清代“汉学”的兴起,考据学派的形成,最终成为民族文化的一部分,是导致了这样结局的重要原因.

南京大学郑毓信教授曾谈起:“中国传统文化向来能同化一切外来文化,那么对西方数学是同化呢,还是顺应呢?”这是很难回答的问题.如果限于“考据文化”的层面,也许可以试给一个答案如下:

“清代的学术主流是复古主义,乾嘉考据学派对西方数学是排斥的.但是他们提倡的考据文化却为西方数学的进入准备了条件.中国传统文化中存在着有利于知识界接受西方数学的演绎成份:考据文化.它对数学教育有积极的一面:重视逻辑训练,也有消极的一面:忽视数学思维的创造性.数学思维本来有两面:活泼的创造性思维和形式化的逻辑思维.考据文化容纳了逻辑思维,却把创造性思维层面加以过滤‘筛’去了.这可以看成是中国传统文化对西方数学的一种同化.”