高等代数

上册

丘维声
编　著

高等教育出版社

高等学校试用教材

高等代数

上册

丘维声　编著

高等教育出版社

于下列日期前将书还回

(京)112号

图书在版编目(CIP)数据

高等代数　上册/丘维声编著. 一北京:高等教育出版社,1996
ISBN 7-04-005797-2

Ⅰ.高…　Ⅱ.丘…　Ⅲ.高等代数　Ⅳ.015

中国版本图书馆CIP数据核字(96)第09306号

*

高等教育出版社出版
北京沙滩后街55号
邮政编码:100009　传真:4014048　电话:4054588
新华书店总店北京发行所发行
河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168　1/32　印张 11.125　字数 280 000
1996年6月第1版　　1996年6月第1次印刷
印数 0001—2 199
定价 10.00 元

凡购买高等教育出版社的图书,如有缺页、倒页、脱页等
质量问题者,请与当地图书销售部门联系调换
版权所有,不得翻印

442555

本书分上、下两册，内容包括四部分：线性方程组 n 元数组的向量空间和矩阵理论；一元多项式环和多元多项式环的理论；任意域上的线性空间和线性映射的理论；具有度量的线性空间包括欧几里得空间、酉空间、正交空间和辛空间的理论。

本书注意渗透现代的观点，力图体现代数与几何、分析的联系，注重联系实际，努力培养学生的数学素质。本书写得深入浅出，特别注意阐述清楚所讨论问题的想法。每一节后面都配有一定数量的习题。

本书可作为大学数学系、概率统计系和应用数学系的高等代数课程的教材，它也是一部内容丰富的教学参考书，可供有关师生参考。

序　　言

为了把学生培养成为面向 21 世纪的高水平人才，作者积多年讲授高等代数、抽象代数和群表示论等课程的经验以及从事科研工作的体会，写了一套高等代数讲义，用这套讲义给北京大学数学系和概率统计系 94 级学生讲授高等代数课，取得了很好的教学效果. 接着又给这两个系的 95 级学生讲授此课，进一步修改这套讲义，现分上、下两册出版.

这套教材从我国的实际情况出发，面向 21 世纪，尝试对高等代数的教学内容进行一些改革，主要有以下几方面：

努力使教材现代化. 21 世纪的人才需要掌握现代数学的思想和方法. 为此，本书注意渗透现代数学的一些基本思想和观点. 例如，用等价关系把集合划分的思想；从代数结构着眼处理问题的思想；同构分类的思想；态射（保持运算的映射）的观点等. 用现代的观点组织和讲授传统的教学内容. 例如，通过讨论子空间的结构证明线性方程组有解判别定理；按照矩阵的相抵关系、相似关系、合同关系分别讨论矩阵的相抵分类、相似分类和合同分类，并且寻求每一种关系下的完全不变量；运用线性空间的同构分类思想证明域 F 上任一 n 维线性空间 V 与它的对偶空间 V^* 同构，以及 V 与它的双重对偶空间 V^{**} 同构；在讲一元多项式的概念时，用态射的观点阐述一元多项式环的通用性质；用环同构的观点讨论数域 K 上的多项式与多项式函数之间的关系；等等. 本书还注意渗透现代数学的一些基本概念. 例如，纤维、线性流形、商集等概念；结合高等代数的具体对象水到渠成地先后引进了抽象代数的一些基本概念：在一元多项式的概念之后引进环的概念；在讲完多项式环之后引进有理函数域、任意域和有限域的概念，以及域的特征的概念；在讲了线性变换的运算后引进域上的代数的概念；在最后一章

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

当学生已经熟悉了正交变换、酉变换和辛变换的性质后，引进群和子群的概念.

力图在教材中体现代数与几何、分析的联系. 21 世纪的数学，分析、代数、几何将会更加相互渗透和有机结合. 因此要使学生从大学一年级开始就逐步培养把代数与几何、分析联系起来的能力. 书中注意从几何直观或分析背景引出高等代数讨论的问题；在讲述高等代数的概念时列举几何或分析的例子；把高等代数的结论应用于解决几何或分析的问题. 例如，介绍了行列式的几何意义；从几何空间的结构引出向量空间的基的概念；运用线性方程组的理论解决一些几何问题；从平面旋转的合成引出矩阵乘法的定义；从二次曲面方程的化简引出实对称矩阵的对角化以及实二次型通过正交替换化成标准形的问题，并且运用所得到的代数结论解决二次曲面方程的化简问题；从函数极值问题引出正定(负定)二次型的概念，并且运用正定(负定)矩阵解决多元函数的极值问题；在讲线性相关性时，讲述了 n 个 $n-1$ 次可微函数线性无关的充分条件；从几何空间中的例子引出商空间的概念；等等. 为了将线性代数的理论应用到分析上，为泛函分析打下基础，本书讨论的线性空间可以是无限维的，尽量不加有限维的限制.

注重联系实际，加强应用. 面向 21 世纪，数学系不仅要培养从事数学科研和教学的人材，而且要培养在其他领域工作的人才. 因此要努力培养学生运用数学理论解决实际问题和其他领域中的问题的能力. 本书在讲完线性方程组的理论后，用它解决平板受热问题；讲了矩阵可对角化的条件后，用它解决色盲遗传问题；在讲了矩阵的运算之后，解决区组设计、图论、数论中的一些问题；在讲了一元多项式环的通用性质后，用它证明组合数的一些公式；等等. 考虑到矩阵在实际问题和许多领域中有广泛应用，本书不仅把矩阵贯穿始终，而且把矩阵的运算，矩阵的相抵分类、相似分类、合同分类集中在一起讲授，并且加强了矩阵的分块，矩阵的“打洞”以及巧用特殊矩阵的训练；讲述了 Binet-Cauchy 公式及其应用. 考虑

到有限域上的线性空间在计算机以及通讯编码中有重要应用，书中讨论的线性空间是任意域上的，不局限于数域.考虑到现代物理以及一些数学分支中的需要，加强了酉空间的内容，介绍了作为爱因斯坦相对论基础的 Minkowski 空间，并且讨论了一般的正交空间，以及辛空间.

提高数学素质，加强能力培养. 21 世纪所需要的人才应当有较高的数学素质和较强的分析问题、解决问题的能力.数学素质包括提出数学问题、理解力、逻辑思维、抽象思维、创造性等几个方面.为了从大学一年级开始就着力培养学生的数学素质，本书在每一单元的开头都要提出问题，然后阐述解决问题的想法，经过抽象思维和逻辑思维一步一步地去解决这些问题.书中特别注意讲清楚想法(idea).例如，在研究线性方程组有无解的判定时为什么会想到去研究 n 元数组的向量空间的结构？在讨论有理系数多项式的因式分解时怎么会想到引进本原多项式的概念？在研究不可以对角化的线性变换的结构时如何想到最小多项式的因式分解并且讨论相应线性变换的多项式核之间的关系？复线性空间上内积的定义为什么与实线性空间上内积的定义不同？在任意域上的线性空间中如何引进度量？为什么只有两种度量：对称双线性函数或者斜对称双线性函数，而不用一般的线性函数？等等，书中都给予了清晰的回答.为了培养学生的阅读、理解能力和扩大知识面，书中有较多的例题，并且有密切配合正文的加“*”号的章节内容和一些阅读材料.有些例题不必在课堂上讲授，留给学生自己看.加“*”号的内容和阅读材料不作为教学要求，供有兴趣的学生自学.本书配备了相当丰富的习题(每一节后面配有习题，每一章后面还有补充题)，有的是为了使学生理解正文的概念，掌握正文中的定理和方法，学会重要的解题方法和技巧；有的是正文内容的补充和拓宽；有的是应用.通过做题可以培养学生分析问题和解决问题的能力.习题中加“*”号的题以及补充题不作为教学要求，供学生选做.

本书内容的安排力求符合人们认识事物的客观规律.学生从中学进入大学,有一个学习方法的适应过程.为了帮助学生树立信心适应大学的学习,我们把高等代数研究的具体对象放在前半部分,而把抽象对象放在后半部分.全书分为四部分.第一部分是线性方程组,n 元数组的向量空间和矩阵的理论,包括线性方程组的解法、行列式、n 元数组的向量空间、线性方程组的理论、矩阵的运算、矩阵的相抵分类与相似分类、二次型与矩阵的合同分类.第二部分是一元多项式环与多元多项式环的理论.第三部分是线性空间和线性映射的理论,包括任意域上的线性空间、线性映射和线性变换、线性变换的 Jordan 标准形、线性函数和双线性函数.第四部分是具有度量的线性空间的理论,包括欧几里得空间、酉空间、正交空间、辛空间.

本书可作为大学数学系、概率统计系、应用数学系的高等代数教材,上、下册共讲授两个学期;还可作为大专院校有关教师和学生的参考书.

作者衷心感谢刘旭峰博士,他通读了全书,并提出了一些宝贵的建议.

特别要感谢本书的责任编辑胡乃冏,他为本书的编辑出版付出了辛勤劳动.

书中可能会有考虑不周和疏漏之处,热诚欢迎同行和读者批评指正.

丘维声

1996 年 *2* 月于北京大学燕北园

责任编辑 胡乃罔
封面设计 王 睢
责任绘图 朱 静
版式设计 胡乃罔
责任校对 胡乃罔
责任印制 孔 源

目　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一章　线性方程组的解法

读者在中学数学里已经学过二元一次方程组和三元一次方程组.由若干个一次方程组成的方程组称为**线性方程组**,它的一般形式是

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 代表 n 个未知量,s 是方程的个数,a_{ij} 是第 i 个方程中 x_j 的系数,b_i 是第 i 个方程的常数项,$i=1,2,\cdots,s$; $j=1,2,\cdots,n$. s 可以等于 n,也可以大于 n 或者小于 n.

在数学的各个分支,在自然科学、工程技术以及生产实际中都经常遇到线性方程组,需要求出它的解,或者判断它有没有解,当有解时需要了解它的解的结构.

代数学的一个特点是:不满足于研究个别的具体问题,而是要研究一般的问题.对于线性方程组来说,就是要研究一般的线性方程组(方程个数 s 和未知量个数 n 都是任意的自然数,并且系数 a_{ij} 和常数项 b_i, $i=1,2,\cdots,s$; $j=1,2,\cdots,n$,都是任意的数)怎么解?解的情况如何?本章就来讨论这些问题.

§1　高斯(Gauss)消去法

线性方程组(1)的一个**解**是指由 n 个数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 组成的有

序数组($c_1,c_2,\cdots,c_n$)，当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 分别用 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 代入后，(1)中每一个方程都变成恒等式.

如何解一般的线性方程组？从中学数学里知道解二元(或三元)一次方程组的基本方法是**消元法**，即把方程组中一部分方程变成未知量较少的方程，直至得到一个一元一次方程，进而可求出方程组的解. 这种方法也适用于解一般的线性方程组. 在解未知量较多的线性方程组时，需要使这种解法有规律可遵循，尽可能简便. 下面通过一个具体例子来说明消元法的做法.

例 1 解线性方程组

$$\left\{\begin{aligned} x_1+3x_2+x_3+2x_4&=4\\ 3x_1+4x_2+2x_3-3x_4&=6\\ -x_1-5x_2+4x_3+x_4&=11\\ 2x_1+7x_2+x_3-6x_4&=-5\end{aligned}\right. \tag{2}$$

解 把第一个方程的(−3)倍、1 倍、(−2)倍分别加到第二、三、四个方程上，使得在第二、三、四个方程中消去未知量 x_1：

$$\begin{array}{l} \\ ②+①\cdot(-3)\\ ③+①\\ ④+①\cdot(-2)\end{array}\left\{\begin{aligned} x_1+3x_2+x_3+2x_4&=4\\ -5x_2-x_3-9x_4&=-6\\ -2x_2+5x_3+3x_4&=15\\ x_2-x_3-10x_4&=-13\end{aligned}\right.$$

把第二、四两个方程互换位置(目的是在下一步避免分数运算)：

$$(②,④)\left\{\begin{aligned} x_1+3x_2+x_3+2x_4&=4\\ x_2-x_3-10x_4&=-13\\ -2x_2+5x_3+3x_4&=15\\ -5x_2-x_3-9x_4&=-6\end{aligned}\right.$$

这里符号(②,④)表示二、四两个方程互换位置.

同理

$$\begin{array}{r} \\ \\ ③+②\cdot 2 \\ ④+②\cdot 5 \end{array}\left\{\begin{aligned} x_1+3x_2+x_3+2x_4&=4\\ x_2-x_3-10x_4&=-13\\ 3x_3-17x_4&=-11\\ -6x_3-59x_4&=-71 \end{aligned}\right.$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ ④+③\cdot 2 \end{array}\left\{\begin{aligned} x_1+3x_2+x_3+2x_4&=4\\ x_2-x_3-10x_4&=-13\\ 3x_3-17x_4&=-11\\ -93x_4&=-93 \end{aligned}\right. \tag{3}$$

方程组(3)的最后一个方程是一元一次方程，解得 $x_4=1$. 再逐次代入(3)的第三、第二、第一个方程，可求得 $x_3=2$，$x_2=-1$，$x_1=3$. 于是$(3,-1,2,1)$是原方程组(2)的解.

像(3)这样形状的方程组称为**阶梯形方程组**.

从上述解题过程看出，用消元法解线性方程组的具体做法是：对方程组反复施行以下三种变换：

1° 把一个方程的倍数加到另一个方程上；

2° 互换两个方程的位置；

3° 用一个非零数乘某一个方程.

这三种变换称为线性方程组的**初等变换**. 经过初等变换，把原方程组变成阶梯形方程组，然后去解阶梯形方程组(从最后一个方程开始，逐次往上解)，求得的解就是原方程组的解.

从例 1 的解题过程中看到，在对方程组作初等变换时，只是对方程组的系数和常数项进行运算，而未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 并没有参加运算，因此在用消元法解线性方程组时，可以只写出方程组的全部系数和常数项. 即线性方程组(1)可以用下面的一张表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix} \tag{4}$$

来表示.

定义 1 由 $s\times m$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,s;\quad j=1,2,\cdots,m)$ 排成的 s 行、m 列的一张表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sm} \end{pmatrix} \tag{5}$$

称为一个 $s\times m$ **矩阵**. 这张表里的任何一个数称为这个矩阵的一个元素.

矩阵通常用一个大写拉丁字母表示，譬如，矩阵(5) 可记作 A，为了指明它是 s 行、m 列的矩阵，可以记作 $A_{s\times m}$. 若矩阵 A 的行数 s 与列数 m 相等，则称 A 为 m **级方阵**或者 m **级矩阵**. 元素全为零的矩阵称为**零矩阵**，就记作 0，为了指明它是 s 行、m 列的零矩阵，可记作 $0_{s\times m}$. 矩阵 A 的位于第 i 行与第 j 列交叉位置的元素称为 A 的 (i,j) 元，可记作 $A(i;j)$. i 称为 $A(i;j)$ 的行指标(或行标)，j 称为 $A(i;j)$ 的列指标(或列标). 例如，若用 A 表示矩阵(5)，则 $A(2;m)=a_{2m}$，$A(s;1)=a_{s1}$，等等. 如果矩阵 A 的 (i,j) 元为 $a_{ij}(i=1,\cdots,s;\quad j=1,\cdots,m)$，则可以写 $A=(a_{ij})$.

线性方程组(1)的全部系数和常数项按原来顺序组成的矩阵(4)称为方程组(1)的**增广矩阵**. 而只由全部系数组成的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \tag{6}$$

称为方程组(1)的**系数矩阵**. 线性方程组(1)可以用它的增广矩阵

(4) 来表示.

线性方程组(2)用它的增广矩阵来表示,则例 1 的解题过程可以写为:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & -3 & 6 \\ -1 & -5 & 4 & 1 & 11 \\ 2 & 7 & 1 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[④+①\cdot(-2)]{\substack{②+①\cdot(-3)\\ ③+①}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & -9 & -6 \\ 0 & -2 & 5 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & -1 & -10 & -13 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(②,④)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -10 & -13 \\ 0 & -2 & 5 & 3 & 15 \\ 0 & -5 & -1 & -9 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{③+②\cdot 2\\ ④+②\cdot 5}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -10 & -13 \\ 0 & 0 & 3 & -17 & -11 \\ 0 & 0 & -6 & -59 & -71 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{④+③\cdot 2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -10 & -13 \\ 0 & 0 & 3 & -17 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -93 & -93 \end{pmatrix} \tag{7}$$

最后这个矩阵(7)称为行阶梯形矩阵,它对应的线性方程组是阶梯形方程组(3).解阶梯形方程组(3)得:

$$x_4 = 1,\quad x_3 = 2,\quad x_2 = -1,\quad x_1 = 3$$

从而(3, $-$1,2,1) 是原方程组的解.

试读结束: 需要全本请在线购买: www.ertongbook.com