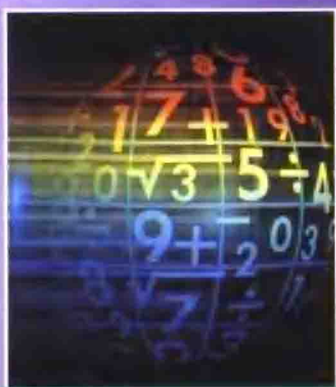
工科数学基础教程

下册

曾绍标　刘九兰　杨则燊



天津大学出版社

工科数学基础教程

下册

曾绍标　刘九兰　杨则燊

天津大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

工科数学基础教程．下册/曾绍标，刘九兰，杨则燊编．—天津：天津大学出版社，2000.4
ISBN 7-5618-1287-6

Ⅰ.工... Ⅱ.①曾...②刘...③杨... Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 19902 号

出　版	天津大学出版社
出版人	杨风和
地　址	天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电　话	发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
印　刷	天津市宝坻县第二印刷厂
发　行	新华书店天津发行所
开　本	850mm×1168mm　1/32
印　张	19.75
字　数	514 千
版　次	2000 年 4 月第 1 版
印　次	2000 年 4 月第 1 次
印　数	1－3 000
定　价	22.00 元

前　言

本书是在调查了解高等学校工科各专业对数学知识的需求以及对当前数学教学内容及方法的意见，并分析工科数学改革的趋势，同时认真研究国内外教材改革经验与体会的基础上编写的.本书对工科数学的教学内容与体系的改革进行了初步的探索，并力求探讨进而解决工科数学教学改革中的三大矛盾，即经典内容与近代知识、数学学科本身体系与其它专业对数学需求以及内容众多而学时有限的矛盾.在这方面我们提出了一些思路和方法，其目标是使工科基础数学教材能够适应培养面向21世纪建设人才的需要.

本书作为天津大学教学改革的“九五”重点教材立项，我们在编写过程中特别注意把握以下几点：

1.把高等数学与线性代数两部分内容有机结合起来，并用现代数学观点和思想统一处理工科数学中的一些问题(例如函数与变换，单元函数与多元函数的极限、连续与微分概念，实变量的实值函数与复值函数的导数与积分等).

2.本书包括工科数学中的高等数学、线性代数、矢量分析与场论的全部内容，复变函数的某些基本内容，数值计算需用的方法原理以及最优化方法中线性规划的基本解法.鉴于各专业所需知识多而学时又有限，故将微积分、解析几何、线性代数、微分方程、场论、复变函数等有关内容通盘考虑，打破数学各分支界限，用现代数学观点组织各部分内容，避免重复，减少学时.

3.力求把数学理论与专业知识有机结合起来.本书注意加强实践环节，在引入新概念与定义前，尽可能通过实例加以说明.在不少章节，用生产和专业实例说明数学知识的具体应用，提高学生

的学习兴趣,并加强经济管理方面的应用.

4.本书在内容的深度和广度方面既适应于工科各专业对数学的需求,也适用于理科和管理学科对数学的需求,考虑到不同专业的不同需要,有些章节打“*”号,供各专业作为选讲选学内容.

本书共19章,分上、中、下三册.上册包括第0,1~4章,中册包括5~11章,下册包括第12~18章.第0,3,4,13,14,18章由杨则燊执笔,第5,6,7,8,9,10,11,17章由刘九兰执笔,第1,2,12,15,16章由曾绍标执笔.

讲授本书全部内容大约需用250学时,也可根据专业需要选讲其中部分内容.

本书由齐植兰教授、蔡高厅教授负责主审,他们对原稿进行了详细审阅,并提出了许多修改意见.蔡高厅教授作为“九五”重点教材立项负责人,还参与了本书体系与结构的设计.本书作为国家工科数学教学基地(清华大学)的资助项目,得到了基地负责人和清华大学数学系领导的指导与帮助.天津大学教务处、出版社、数学系和有关学院的领导,对于本书的编写和出版给予了热情的鼓励和支持.在此一并表示衷心的感谢.

工科数学教学内容和体系的改革是一个迫切而又艰难的课题,我们的探索和尝试仅仅是初步的.由于我们的水平和经验所限,本书难免有许多不妥之处,恳请同行专家和热心读者批评指正.

编者

1999.6.

目　录

第 12 章　$\boldsymbol{R}^n$ 中的点集与多元函数的连续性

从本章起，着重研究多元函数的分析运算——极限、微分、积分等. 同单元函数一样，极限运算是这些运算的基础，而极限概念又是根据“距离”建立的. 因为 n 元函数就是映射 $f:\Omega(\subset\boldsymbol{R}^n)\to\mathbf{R}$，其定义域是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的集合，所以本章首先在 $\boldsymbol{R}^n$ 上引入“距离”，介绍 $\boldsymbol{R}^n$ 中具有某种性质(如有界性，开、闭性，连通性)的集合，讨论 $\boldsymbol{R}^n$ 中序列的收敛性及 $\boldsymbol{R}^n$ 的完备性，然后讨论 n 元函数的极限和连续性，为以后各章的学习做准备.

第 1 节　赋范空间与度量空间概念

12.1.1　由内积导出的范数

在上一章中，对于内积空间 $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中任一元素 $x\in V$，令 $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$，并称 $\|x\|$ 是 x 的由内积导出的范数. 在 $\boldsymbol{R}^3$ 中，由内积导出的范数就是向量的长度或模. 事实上，在一般内积空间中元素的这种范数确实具有向量模的三个最基本的特征，即 $\forall x,y\in V$ 及 $\forall\lambda\in\boldsymbol{K}(\boldsymbol{K}=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C})$ 有

(N_1)正定性：$\|x\|\geqslant 0$ 且 $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$；

(N_2)齐次性：$\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$；

(N_3)三角不等式：$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$.

要证明上述三个性质并不困难，只需根据定义和内积公理以及许瓦兹不等式即可，作为例子，这里证明三角不等式. 因为

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=\langle x+y,x+y\rangle\\&=\langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle\\&=\|x\|^2+2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle+\|y\|^2,\end{aligned}$$

又因为 $\mathrm{Re}\langle x,y\rangle\leqslant|\langle x,y\rangle|\leqslant\sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}=\|x\|\ \|y\|$，所以

$$\|x+y\|^2\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\ \|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2,$$

故 $$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|.$$

上述性质(N_1),(N_2),(N_3)统称为范数公理.范数概念不一定由内积导出，一般地，凡是定义在线性空间上满足范数公理的任何实泛函都称为范数.在给出范数的一般定义之前，先给出由内积导出的范数所具有的特性.

定理 12.1.1　由内积导出的范数满足平行四边形公式，即 $\forall x,y\in(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$有

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

证　若将$\|\cdot\|$理解为平面向量的长度，则此公式正是平面几何中的定理：平行四边形两对角线长的平方和，等于四边长度平方之和(见图 12-1).公式的证明只需直接验算.

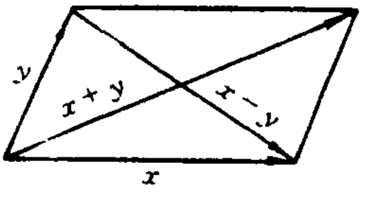


图 12-1

$$\begin{aligned}&\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\\&=\langle x+y,x+y\rangle+\langle x-y,x-y\rangle\\&=\|x\|^2+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\|y\|^2+\|x\|^2-\langle x,y\rangle\\&\quad-\langle y,x\rangle+\|y\|^2\\&=2(\|x\|^2+\|y\|^2).\end{aligned}$$

12.1.2　赋范空间概念

定义 12.1.1　设 V 是数域($\mathbf{K}=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$)上的线性空间.若实值泛函 $\|\cdot\|:V\to\mathbf{R}$(即 $\forall x\in V,x\mapsto\|x\|\in\mathbf{R}$)满足范数公理

(N_1),(N_2)和(N_3)，则称$\|\cdot\|$是线性空间 V 上的一种范数，$(V,\|\cdot\|)$称为赋范线性空间，简称为赋范空间. 在不致引起混淆的情况下，将$(V,\|\cdot\|)$简记为 V，$\|x\|$称为元素(或向量)x 的范数.

例 12.1.1　任何内积空间，按照由内积导出的范数都是一个赋范空间.

特别地，n 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 和 $\boldsymbol{C}^n$ 都是赋范空间，其中范数为 $\|\cdot\|_2=\sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$，称之为欧几里德范数.

例 12.1.2　连续函数空间 $\mathrm{C}[a,b]$.

上一章在 $\mathrm{C}[a,b]$上定义了内积，使之成为内积空间，由内积导出的范数为

$$\|f\|_2=\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2},$$

于是$(\mathrm{C}[a,b],\|\cdot\|_2)$是赋范空间.

不过，在 $\mathrm{C}[a,b]$上，更通常是赋予下面的范数：$\forall f\in\mathrm{C}[a,b]$，令 $\|f\|=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$. 容易验证$\|\cdot\|$是 $\mathrm{C}[a,b]$上的范数，因为$\|\cdot\|$满足

(N_1)　$\|f\|=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\geqslant 0$，且当 $f=0$ 即 $\forall x\in[a,b]$，$f(x)=0$ 时，$\|f\|=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|=0$;

又若 $\|f\|=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|=0$，则 $\forall x\in[a,b]$，$|f(x)|=0$ 即 $f(x)=0$，所以 $f=0$.

(N_2)　$\forall\lambda\in\mathbf{R}$ 及 $\forall f\in\mathrm{C}[a,b]$，$\|\lambda f\|=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|(\lambda f)(x)|=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|\lambda||f(x)|=|\lambda|\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|=|\lambda|\,\|f\|$.

(N_3)　$\forall f,g\in\mathrm{C}[a,b]$，$\|f+g\|=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|(f+g)(x)|\leqslant\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{|f(x)|+|g(x)|\}\leqslant\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|+\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|g(x)|=\|f\|+\|g\|$.

例 12.1.3　在 $\boldsymbol{R}^n$ 或 $\boldsymbol{C}^n$ 上，$\forall X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^n$（或 $\boldsymbol{C}^n$），定义 $\|X\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ 和 $\|X\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$，则 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_\infty$ 都是 $\boldsymbol{R}^n$（或 $\boldsymbol{C}^n$）上的范数，即 $(\boldsymbol{R}^n,\|\cdot\|_1)$，$(\boldsymbol{R}^n,\|\cdot\|_\infty)$ 和 $(\boldsymbol{C}^n,\|\cdot\|_1)$，$(\boldsymbol{C}^n,\|\cdot\|_\infty)$ 都是赋范空间（见习题 12-1 No. 1）.

$\|X\|_1$ 和 $\|X\|_\infty$ 分别称为 n 维向量 $\boldsymbol{X}$ 的 1-范数和 ∞-范数，欧几里德范数 $\|X\|_2$ 称为向量 $\boldsymbol{X}$ 的 2-范数. 容易验证不等式

$$\|X\|_\infty\leqslant\|X\|_2\leqslant\|X\|_1\leqslant n\|X\|_\infty,$$

对任意 $X\in\boldsymbol{R}^n$（或 $\boldsymbol{C}^n$）成立，当 $n=1$ 时，这三种范数是一样的.

由例 12.1.2 和例 12.1.3 可知，在同一线性空间上，可以定义不同的范数，使之成为不同的赋范空间.

例 12.1.4　有界数列空间 l^∞.

已知 l^∞ 对数列的加法、数与数列的乘法是封闭的，不难验证这种运算满足线性空间定义中的 8 条公理（比如零数列 $0=(0,0,\cdots)$ 是 l^∞ 的零元素），于是 l^∞ 是一个线性空间，它是无限维的. 今定义 $\|x\|=\sup_{i\in\mathbf{N}}|\xi_i|$（$\forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_i,\cdots)\in l^\infty$），则 $\|\cdot\|$ 是 l^∞ 上的范数，因为 $\|\cdot\|$ 显然满足范数公理 (N_1) 和 (N_2)，下面证明 $\|\cdot\|$ 也满足 (N_3).

$\forall x=(\xi_i),y=(\eta_i)\in l^\infty$，有

$$|\xi_i+\eta_i|\leqslant|\xi_i|+|\eta_i|\leqslant\sup_{i\in\mathbf{N}}|\xi_i|+\sup_{i\in\mathbf{N}}|\eta_i|,\ (\forall i\in\mathbf{N}),$$

故　$\|x+y\|=\sup_{i\in\mathbf{N}}|\xi_i+\eta_i|\leqslant\sup_{i\in\mathbf{N}}|\xi_i|+\sup_{i\in\mathbf{N}}|\eta_i|\leqslant\|x\|+\|y\|.$

l^∞ 称为有界数列空间. 不难验证，全体收敛数列的集合 c 和全体收敛于零的数列的集合 c_0 按此范数都是赋范空间.

定义 12.1.2　设有 $(V,\|\cdot\|)$，W 是 V 的线性子空间. 在 W

上定义范数如下：$\forall x \in W$，$\| x \|_W = \| x \|$，即 $\| x \|_W$ 就是 x 作为 V 的元素时的范数，则 W 也是赋范空间，称 W 是赋范空间 V 的子空间，简称为 V 的赋范子空间.

赋范空间 V 的任何线性子空间按定义 12.1.1 的方式，自然成为 V 的赋范子空间，因此要证明 V 的非空子集 W 是 V 的赋范子空间，只需验证 W 对 V 上的线性运算是封闭的.

例 12.1.5　当 $x \in [a,b]$ 时，记 $R[x]_n = P_n[a,b]$，类似地，以 $P[a,b]$ 表示定义在 $[a,b]$ 上的全体多项式（包括零多项式）构成的集合，则 $P_n[a,b]$，$P[a,b]$ 都是 $C[a,b]$ 的线性子空间（前者是 $n+1$ 维的，后者是无限维的），因此也都是 $C[a,b]$ 的赋范子空间.

由例 12.1.4 知，c_0 是 c 的赋范子空间，而 c 又是 l^∞ 的赋范子空间.

例 12.1.6　设 $(V, \|\cdot\|)$ 和 $(W, \|\cdot\|)$ 都是数域 $\boldsymbol{K}$ 上的赋范空间，$\tau: V \to W$ 是线性算子（即线性映射），则 τ 的零空间 $\mathcal{N}(\tau) = \{x \in V \mid \tau x = 0\}$ 是 V 的赋范子空间（见习题 12-1 No.2）.

赋范空间是比内积空间更广泛的一类空间，因为由例 12.1.1 可知，任何内积空间都是一个赋范空间，但并不是每一个赋范空间都可成为一个内积空间，即存在着不能由内积导出的范数.

例 12.1.7　$\boldsymbol{R}^n$ 上的 $\|\cdot\|_\infty$ 不能由内积导出，因为 $\|\cdot\|_\infty$ 不满足平行四边形公式. 例如存在 $X_0 = (1,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$Y_0 = (1,-1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，使 $\| X_0 \|_\infty = \| Y_0 \|_\infty = 1$，$\| X_0 + Y_0 \|_\infty = \| X_0 - Y_0 \|_\infty = 2$，从而

$$\| X_0 + Y_0 \|_\infty^2 + \| X_0 - Y_0 \|_\infty^2 = 8$$
$$\neq 2(\| X_0 \|_\infty^2 + \| Y_0 \|_\infty^2) = 4.$$

12.1.3 由范数导出的度量

定义 12.1.3　设有 $(V, \|\cdot\|)$，$\forall x, y \in V$，令

$$d(x,y)=\|x-y\|,$$

称二元泛函 $d:V\times V\to\mathbf{R}$ 是 V 上的由范数导出的度量或距离函数,$d(x,y)$ 称为元素 x 与 y 间的(由范数导出的)距离.

例 12.1.8 在 $\boldsymbol{R}^n$(或 $\boldsymbol{C}^n$)上,$\forall X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^n$(或 $\boldsymbol{C}^n$),令

$$d(X,Y)=\|X-Y\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2},$$

d 称为欧几里德度量. $d(X,Y)$ 是几何空间 $\boldsymbol{R}^3$ 或 $\boldsymbol{R}^2$ 中两点 X 与 Y 间距离的自然推广.

由向量的 1-范数和∞-范数可导出相应的度量

$$d_1(X,Y)=\|X-Y\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|,$$

$$d_\infty(X,Y)=\|X-Y\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i|.$$

比如 $X=(1,2)^{\mathrm{T}}$, $Y=(-5,3)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^2$, $X-Y=(6,-1)^{\mathrm{T}}$,

$$d(X,Y)=\|X-Y\|_2=\sqrt{6^2+(-1)^2}=\sqrt{37};$$

$$d_1(X,Y)=\|X-Y\|_1=|6|+|-1|=7;$$

$$d_\infty(X,Y)=\|X-Y\|_\infty=\max\{|6|,|-1|\}=6.$$

由定义 12.1.3 及范数公理立即可知,由范数导出的度量满足下列的度量公理,即 $\forall x,y,z\in V$,有

(M_1)正定性:$d(x,y)\geqslant 0$ 且 $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$;

(M_2)对称性:$d(x,y)=d(y,x)$;

(M_3)三角不等式:$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$.

度量公理(M_1),(M_2),(M_3)体现的是几何空间中距离函数的三个最基本的特征,因此在现代数学中,把凡是满足度量公理的二元实泛函 $d:X\times X\to\mathbf{R}$ 都称为非空集合 X 上的度量,(X,d) 称为度量空间或距离空间,$\forall x,y\in X$,$d(x,y)$ 称为元素 x 与 y 间的距离.

例 12.1.9 设 Ω 是任一非空集合，$\forall x,y\in\Omega$，定义

$$d_0(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & x\neq y,\end{cases}$$

则 d_0 是 Ω 上的度量(见习题 12-1 No.4)，(Ω,d_0)称为离散度量空间.

此例说明，在任何一个非空集合(不必是线性空间)上，都可以定义度量使之成为度量空间. 由定义 12.1.3 知，任何赋范空间按照由范数导出的度量都是一个度量空间，而且是一个线性度量空间，例如$(\boldsymbol{R}^n,d)$和$(\boldsymbol{R}^n,d_\infty)$都是度量空间. 但是，并不是每一个线性度量空间上的度量都是由某个范数导出的，因为由范数导出的度量具有下列特殊性质：

(1)(平移不变性) $d(x+z,y+z)=d(x,y)$，$(\forall x,y,z\in V)$.

(2)(齐次性) $d(\lambda x,0)=|\lambda|d(x,0)$，$(\forall x\in V,\forall\lambda\in\boldsymbol{K})$.

证明留作练习.

12.1.4 等价范数

定义 12.1.4 设 V 是数域 $\boldsymbol{K}$ 上的线性空间，$\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 是 V 上的两种范数. 若存在 $C_1,C_2>0$，使得对任意 $x\in V$ 有

$$C_1\|x\|_\alpha\leqslant\|x\|_\beta\leqslant C_2\|x\|_\alpha$$

成立，则称 $\|\cdot\|_\alpha$ 与 $\|\cdot\|_\beta$ 是 V 上的等价范数.

例 12.1.10 $\boldsymbol{R}^n$(或 $\boldsymbol{C}^n$)上的范数 $\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$ 和 $\|\cdot\|_\infty$ 都是等价的.

证 由例 12.1.3 中的不等式

$$\|X\|_\infty\leqslant\|X\|_2\leqslant\|X\|_1\leqslant n\|X\|_\infty$$

即得.

关于范数“等价”的含义将在本章第 3 节中解释.

习题 12-1

1. 若 $\forall \boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in \boldsymbol{R}^n$（或 $\boldsymbol{C}^n$），定义

$$\| X \|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|,\ \| X \|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|,$$

则 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_\infty$ 都是 $\boldsymbol{R}^n$（或 $\boldsymbol{C}^n$）上的范数.

*2. 在 $\boldsymbol{C}^{n\times n}$ 中，$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$. 定义

$$\langle \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\rangle=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\bar{b}_{ij}.$$

(1)验证 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $\boldsymbol{C}^{n\times n}$ 上的内积；

(2)求由此内积导出的范数 $\|\cdot\|_F$；

(3)证明 $\|\cdot\|_F$ 满足次乘性，即 $\forall \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$，有

$$\|\boldsymbol{AB}\|_F\leqslant\|\boldsymbol{A}\|_F\|\boldsymbol{B}\|_F;$$

(4)证明 $\|\cdot\|_F$ 与 $\boldsymbol{C}^n$ 上的 2-范数是相容的，即 $\forall \boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$ 及 $\forall \boldsymbol{X}\in\boldsymbol{C}^n$，有 $\|\boldsymbol{AX}\|_2\leqslant\|\boldsymbol{A}\|_F\|\boldsymbol{X}\|_2$.

3. 设有 $(V,\|\cdot\|)$，d 是由 $\|\cdot\|$ 导出的度量，证明：$\forall x,y,z\in\boldsymbol{V}$ 及 $\forall\lambda\in\boldsymbol{K}$，必有

(1) $d(x+z,y+z)=d(x,y)$；

(2) $d(\lambda x,0)=|\lambda|d(x,0)$.

4. 证明例 12.1.9.

5. 证明在 $(V,\|\cdot\|)$ 中，$\forall x,y\in\boldsymbol{V}$，不等式

$$|\|\boldsymbol{x}\|-\|\boldsymbol{y}\||\leqslant\|x-y\|$$

成立.

6. 设 $X=(x,y)\in\boldsymbol{R}^2$. 画出下列集合的图形.

$B_1=\{X\mid \|X\|_1<1\}$；$B_2=\{X\mid \|X\|_2<1\}$；$B_\infty=\{X\mid\|X\|_\infty<1\}$.

7. 设 $X_0=(x_0,y_0,z_0)\in\boldsymbol{R}^3$，$X_k=(x_k,y_k,z_k)\in\boldsymbol{R}^3$，$k\in\mathbf{N}$. 试证：

$$\lim_{k\to\infty}\|X_k-X_0\|_\infty=0\Leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x_0,\\ \lim\limits_{k\to\infty}y_k=y_0,\\ \lim\limits_{k\to\infty}z_k=z_0.\end{cases}$$

第 2 节　$\boldsymbol{R}^n$ 中的点集

本节将 $\mathbf{R}$ 中的有界集、邻域、开区间、闭区间等概念推广到 $\boldsymbol{R}^n$ 空间中，相应地给出 $\boldsymbol{R}^n$ 中的有界集、开球、开区域、闭区域等概念. 许多概念可以原封不动地搬到一般赋范空间甚至度量空间上；所得出的重要结论，大部分可不需修改或稍加修改就在一般赋范空间乃至度量空间中成立.

12.2.1　开球、闭球与球面

定义 12.2.1　设 $X_0 \in \boldsymbol{R}^n$，$r>0$，则 $\boldsymbol{R}^n$ 的子集

$$B(X_0;r) \equiv \{X \in \boldsymbol{R}^n \mid \| X - X_0 \| < r\}$$

称为以点 X_0 为中心、以 r 为半径的（n 维）开球或开邻域；

$$B[X_0;r] \equiv \{X \in \boldsymbol{R}^n \mid \| X - X_0 \| \leqslant r\}$$

称为以点 X_0 为中心、以 r 为半径的（n 维）闭球或球体；

$$S(X_0;r) \equiv \{X \in \mathbf{R}^n \mid \| X - X_0 \| = r\}$$

称为以点 X_0 为中心、以 r 为半径的（n 维）球面.

以原点 O 为中心、以 1 为半径的开球（闭球或球面）称为单位开球（闭球或球面）.

由定义即可得：

(1) $X_0 \in B(X_0;r)$，$X_0 \in B[X_0;r]$，$X_0 \notin S(X_0;r)$；

(2) $B[X_0;r] = B(X_0;r) \cup S(X_0;r)$，

$B(X_0;r) \cap S(X_0;r) = \varnothing$.

“球”的名称是沿袭三维欧氏空间的说法，在二维欧氏空间中应是“圆”，在一维欧氏空间中应是关于点 x_0 的对称区间，对于 $\boldsymbol{R}^n$ 上的其他范数（如 $\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_\infty$）则“球”并不是“圆”的. 全空间 $\boldsymbol{R}^n$ 可以视为半径为 $+\infty$ 的球.