目　录

第1章 概　论

1.1 有限元法的发展概况

1.1.1 有限元法的发展历史

有限元法是根据变分原理求解数学物理问题的一种数值计算方法。它最初是在50年代作为处理固体力学问题的方法出现的。它的基本思想早在40年代初期就有人提出，1941年赫兰尼可夫(Hernnikoff, A.)首先提出用格栅的集合体表示二维与三维的结构体，这是离散化的最早思想。1943年库兰特(Couraut, R.)也应用了"单元"的法则，但当时没有引起人们的重视。到了50年代，由于工程上的需要，特别是高速电子计算机的出现与应用，有限元法才在结构分析矩阵方法的基础上迅速地发展起来，并得到愈来愈广泛的应用。早在1952年拉格福斯(Langefors, B.)对壳体进行结构分析采用了矩阵变换方法。1954～1955年阿吉里斯(Argris, J.H.)相继发表了一系列有关结构分析矩阵方法的论文，于1960年出版了《能量原理与结构分析》一书。它对弹性结构的基本能量原理作了综合和推广，并发展了实际的分析方法，成为结构分析矩阵方法的经典著作之一。

1955年特纳(Turner, M.J)，克拉夫(Clough, R.W.)，马丁(Martin, H.C.)和托普(Topp, L.C.)等在他们的著作中，提出了计算复杂结构刚度影响系数的方法，并应用电子计算机进行计算分析。他们在飞机结构中，把位移法应用到平面应力问题中去，把结构分割成单个的三角形和矩形单元。每一单元特性用单元的节点力与节点位移相联系的单元刚度矩阵表征。1959年特纳在《结构分析的直接刚度法》一文中正式提出了用直接刚度法集合有限元的总方程组。而"有限元法"这一名称到

1960年才由克拉夫首先提出。

在1960至1970年这十年中，许多学者，例如梅劳歇(Melosh, R.J.)、贝赛林(Besseling, J.F.)、王京斯(Jones, R.E.)、卞学璜、赫尔曼(Herrmann, L.R.)、巴脱(Biot, M.A.)、普拉格(Prager, W.)、董平等对各种不同变分原理的有限元模型作出了卓越的贡献。

有限元法的列式不一定都建立在变分原理的基础上。1969年奥登(Oden, J.T.)从所谓的能量平衡法出发，成功地列出了热弹性问题有限元解析的方程组。斯查勃(Szabo, B.A.)和李(Lee, G.C.)在1969年利用迦辽金(Б.Г.Галеркин)法得到了平面弹性问题的有限元解。

从单元的类型而言，已从一维的杆单元、二维的平面单元发展到三维的空间单元、板壳单元、管单元等；从常应变单元发展到高次单元。1966年欧格托蒂斯(Ergatoudis, B.)、艾路斯(Irons, B.M.)和齐克维茨(Zienkiewics, O.C.)为等参数单元的发展奠定了基础，使计算精度有较大提高，并可适用于各种复杂的几何形状和边界条件。

有限元法虽然起源于结构理论，但近年来由于它的理论与公式逐步得到改进和推广，不仅在结构理论本身范围内由静力分析发展到动力问题、稳定问题和波动问题，由线弹性发展到非线弹性和塑性，而且该方法已经在连续体力学的一些场问题中得到应用，例如热传导，流体力学，电磁场等领域中的问题。

近几年来，在计算机程序的编制方面，也有了较大的发展。由于有限元法的通用性，它已成为解决各种问题的强有力和灵活通用的工具。因此不少国家编制了大型通用的计算机程序，其中包含有各种形状的单元，并能用于各类力学问题，比较常用的有：SAP、ADINA、ASKA、NASTRAN、STRUDL、SAFE、SAMIS、ELAS、BOSOR、MARC、PAFEC、STARDYNE等。

SAP(Structural Analysis Program)——结构分析程序。它由美国贝克莱加利福尼亚大学研制，该程序可处理空间桁架、

刚架、平面应变、平面应力、轴对称、等参元、薄板、薄壳、三维固体、厚壳、管单元等问题。它的功能有信息处理、静力分析、动力分析、绘图、带宽优化、计算几何刚度等。

ADINA(A Finite Element Program for Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis)——自动动力增量非线性分析有限元程序。它由美国麻省理工学院机械工程系研制。单元库中有梁、平面、板壳、三维实体、轴对称、厚板(壳)等单元。它可处理非线性问题、与温度有关的问题。

ASKA(Automatic System Kinematic Analysis)——自动动力分析系统。它由德国斯图加特大学宇航结构静动力学研究所研制。具有42种单元。

NASTRAN(NASA Structural Analysis)——NASA结构分析程序。它由美国国家航空与宇航局研制，可供各种结构分析之用。其功能包括热应力分析，瞬态载荷与随机激振的动态响应分析，实特征值与复特征值计算，以及稳定性分析，还有一定的非线性分析能力，可用于各种计算机系统。

这些程序系统的规模、功能和应用范围等见表1-1、表1-2与表1-3。

这些通用程序的编制，对解决许多工程技术问题提供了极大的方便。

计算机向微型化发展，为有限元法在微机上应用创造了有利条件。在微机上应用中存在两个问题，即速度慢与容量小。随着微机的发展，速度问题可以解决，容量问题可在软件的研制方面采用一些措施，例如采用覆盖技术，虚存方法，分块求解器求解等方法来弥补不足。在微机上应用的程序系统有SAP80、SAP84、SAP90等以及各单位自编的各种有限元程序。

我国在60年代初期已将矩阵分析用于解决飞机结构的强度问题，但由于电子计算机工业发展较迟，故受到一定的影响。70年代初，有限元法才开始在国内得到应用与推广。随后在航空工业、造船工业、机械工业、水利工程、建筑工程、石油化工等部

门得到广泛应用与发展，总的说来对静态分析方面做的工作较多，尤其是70年代，根据我国当时计算机容量小的情况，在力求用小的国产机器解大题目方面做了不少工作，取得了卓越的成绩。在应用新的单元方面，有的单位也进行了探索，取得了一些成果。近几年来，在动态和非线性方面，流体力学与电磁场方面也开展了不少工作，取得很好的成绩。

1.1.2 有限元法的优越性与局限性

有限元法能够得到迅速的发展与愈来愈广泛的应用，除高速电子计算机的出现与发展提供了充分有利的条件外，还与有限元法所具有的优越性是分不开的。

在固体力学及其他连续体力学中，只有一些特殊类型的位移场和应力场才能求得微分方程式的解。对于多数复杂的实际结构得不到解。而有限元法对于完成这些复杂结构的分析是一种十分有效的方法。有限元法是利用离散化将无限自由度的连续体力学问题变为有限单元节点参数的计算，虽然它的解是近似的，但适当选择单元的形状与大小，可使近似解达到满意的精度。

表1-1 程序系统的规模

类　别	大型结构分析程序系统	特大型结构分析程序系统
规模（语句数）	1万～5万	10万～50万
研制发展人数（人）	4～30	20～100
研制费用（美元）	15～200 万	200～1000万
提供用户的文件（页）	400～2000	2000～5000
诊断错误的手段	有检查和绘图功能	同　左
对机器内存的要求	256～1024千字节	512千字节以上
程序所用语言	FORTRAN 为主	FORTRAN 及机器语言
程序系统名称	ADINA（和ADINAT），ANSYS, BERSAFF, BOSOR, ELAS, MARC, PAFEC, SAP, STRUDL（和DYNAL），STARDYNE等	ASKA, NASTRAN

表1-2 程序系统的分析范围

分析范围 / 程序名	非线性区分析	塑性分析	断裂力学	热应力与蠕变	厚板厚壳	管道系统	船舶结构	焊接接头	粘弹性材料	结构优化	热传导	薄板薄壳	复合材料	结构稳定	流体力学	气动弹性力学	桥与格子板	电场
ADINA (和ADINAT)	✓	✓		✓	✓		✓				✓	✓			✓			✓
ANSYS	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓		✓	✓		✓				
ASKA	✓	✓		✓	✓		✓		✓		✓	✓		✓				
BERSAFE	✓	✓	✓	✓	✓							✓						
BOSOR							✓					✓		✓				
ELAS					✓							✓						
MARC	✓	✓		✓	✓	✓		✓	✓		✓	✓						
NASTRAN	✓			✓	✓	✓	✓				✓	✓	✓		✓	✓		
NONSAP	✓	✓									✓							
PAFEC		✓		✓			✓		✓		✓							
SAP					✓	✓	✓					✓						
STARDYNE							✓				✓	✓						
							✓			✓	✓	✓				✓		

有限元法另一个优点，在于引入边界条件的办法简单，边界条件不需要进入单个有限元的方程，而是求得整个集合体的代数方程后再引进，所以对内部和边界上的单元都能采用相同的场变量函数，而且当边界条件改变时，场变量函数不需要改变，这对编制通用化的程序带来了莫大的简化。

有限元法不仅适应于复杂的几何形状和边界条件，而且能处理各种复杂的材料性质问题，例如材料的各向异性，非线性，随时间或温度而变化的材料性质问题。另外它还可解决非均质连续介质的问题。其应用范围极为广泛。

有限元法通常采用矩阵表达形式，非常便于编制计算机程序，从而适应于电子计算机的运算工作。

表1-3 程序系统的功能

程序名	计算机（指IBM、CDC、UNIVA）	前后处理																									
		数据前处理	数据后处理	绘图	错误检查	梁	平面	板壳	三维块体	轴对称	厚板壳	静荷	自由体振动	强迫振动	瞬态运动	稳定温度场	不稳定温度场	各向同性材料	正交异性材料	分层材料	夹心材料	与温度有关问题	非线性弹性	刚塑性	应变强化	大变形	子结构
ADINA（和ADINAT）	I，C	✓			✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓			✓	✓	✓	✓			✓	✓		✓	✓	✓
ANSYS	I，C，U	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓
ASKA	I，C，U	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
BERSAFE	I，C	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓						✓					✓	✓	✓	✓	
BOSOR	I，C			✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓			✓	✓	✓	✓						
ELAS	I，C，U		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓				✓		✓	✓	✓	✓						
MARC	I，C，U	✓			✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓				✓	✓	✓		✓					✓		
NASTRAN	I，C，U	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓		✓	✓			✓	✓	✓
NONSAP	I，C，U					✓	✓		✓	✓		✓	✓	✓				✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	
PAFEC	I，C，U	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓			✓		✓	✓	✓							✓
SAP	I，C，U	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓			✓	✓	✓	✓	✓					
STARDYNE	C	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓						✓
STRUDL（和DYNAL）	I，U		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓			✓	✓	✓	✓			✓	✓	✓			✓				

有限元法的应用与电子计算机紧密相关，它的计算质量与速度取决于计算机的贮存容量和运算速度，先进的计算机将有利于有限元的发展。

有限元法作为一种计算方法已经达到了成熟的程度，但在具体应用中还有不小的差距，特别对于一些复杂问题，如固体力学领域中的断裂性态、接触问题与其他领域中的瞬态问题的数值解，目前虽有进展，但还不能十分令人满意，需进一步研究。

目前在许多有限元通用程序中，增加了前、后处理功能，网格能自动生成或分割，有利于更广泛的应用与推广。尽管结构的网格分割与准备输入数据的工作在某种程度上可以自动化，但是还不能全靠计算机实现，因为在离散化过程中，还必须根据不同的要求来决策。在输入数据中，如有差错，并未被发现，将会导致错误的计算结果，而且往往较难发现，带来不少麻烦。对于输出数据的整理与判断也是很费时间与精力的。因此在这方面还必须进一步努力减轻手工的、费时的、繁琐的、易出差错的工作。

1.2 有限元法的由来及基本思路

1.2.1 有限元法的由来

在工程技术领域内，对于许多力学问题或场问题，有时可以建立它们应遵循的基本方程，即常微分方程或偏微分方程和它们相应的边界条件。但是用解析法求解它们的精确解往往比较困难，除非方程性质比较简单，且几何边界相当规则的少数问题。对于大多数工程技术问题，则很少有解析解。另有一些工程技术问题连它们的微分方程也难于建立，更无法求解。为此人们曾提出两种古典的近似求解方法，即有限差分法与变分法，以弥补求解的不足。

有限差分法其实质就是将由物理模型建立的微分方程及其相应的边界条件，由离散化建立相应的差分方程组来代替，求得的是近似的数值解。但是当遇到几何形状复杂的边界条件时，有限差分法解的精度往往受到限制，甚至求解变得不可能。

变分法是研究泛函极值问题的一种方法，泛函中的变量是由函数的选取所确定，因此泛函是函数的函数。这里对函数的要求是连续的。在实际的工程技术问题中，有时直接对微分方程的边值问题求解非常困难，但从变分原理（见第二章)可知，微分方程的边值问题的解等价于相应泛函极值问题的解，因此将微分方程的边值问题转化为泛函的变分问题来求解反而容易。泛函一般以积分形式表达，而能量一般也以积分形式的泛函表达，因此变分法在此也可称为能量法。19世纪初，李兹（Ritz）提出了直接从求解泛函的极值问题出发，把泛函的极值问题转化为函数的极值问题，最终以解线性代数方程组求得近似解。这种方法称为变分问题的直接法。

有限元法是变分问题直接法中的一种有效方法，它利用离散化的概念直接对研究的问题（对象）进行离散化处理，省略了有限差分法中需建立微分方程的中间环节，并使有限元法在利用变分原理时，只要假定求解函数的分段连续就可以了，降低了变分法中函数整体连续的要求，并把数值解与解析解结合起来了。以整体而言，有限元法是数值解；分段而言，它又是解析解。

1.2.2 有限元法的基本思路

有限元法是把弹性体假想地分割成为有限个单元所组成的组合体，即在计算的图形上划分网格，分成有限个单元，简称离散化。这些单元仅在其顶角处互相连接，这些连接点称为节点。离散化的组合体与真实的弹性体的区别在于组合体中单元与单元之间的连接除节点外，再无任何关连。但是这种连接必须满足变形协调条件，既不能出现裂缝，也不能允许发生重叠。显然，单元之间只能通过节点传递内力。通过节点传递的内力称为节点力。作用在节点上的载荷称为节点载荷。

当弹性体受到外力作用发生变形时，组成它的各个单元也将发生变形，因而各个节点将产生不同程度的位移，这种位移称为节点位移。在有限元法中，以节点位移分量作为基本未知量求解的方法称为位移法；以应力分量作为基本未知量求解的方法称为

力法；两者兼有的称为混合法。由于位移法有广泛的通用性，目前用得较多，因此本书前几章主要讨论位移法。下面通过一个拉杆的例子来说明有限元法应力分析的基本思路。

一根长度为 l 的均质等截面拉杆（图 1-1 a），设其截面面积为 A，弹性模量为 E，一端固定，另一端受有一个轴向拉力 R。

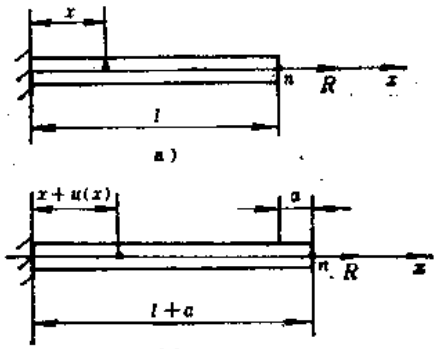


图 1-1

先将长度为 l 的拉杆分为有限个互不重叠的小段 $[x_i x_{i+1}]$ ($i=0, 1, 2, \cdots, n$)(图 1-2)，这些小段即为最简单的杆单元。在每个单元 $[x_i x_{i+1}]$ 上取其两端点 i 与 $i+1$ 作为节点。由于在 n 点上受有一个拉力 R，拉杆将伸长 a，这时拉杆原来坐标为 x 的点变为 $x+u(x)$(图 1-1 b)。$u(x)$ 为 x 点位移，称它为位移函数，一个等截面拉杆的位移函数 $u(x)$ 是一线性函数，

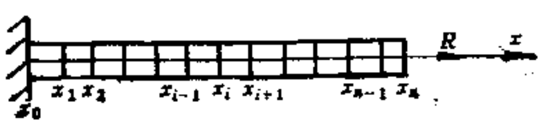


图 1-2

可很容易地写成 $u(x)=ax/l$。显然这个位移函数满足边界条件 $u(0)=0$ 与 $u(l)=a$。有了位移函数，借用材料力学知识，就可求得应变函数 $\varepsilon=\mathrm{d}u(x)/\mathrm{d}x$ 与应力函数 $\sigma=E\varepsilon=E\mathrm{d}u(x)/\mathrm{d}x$，从而求得拉杆任意点的应力值，达到了应力分析的目

的。但是要研究的当然不是那样简单的问题，位移函数不可能事先列出，因此位移法的关键问题就是寻求位移函数。

最小位能原理指出：一个弹性体的稳定平衡状态是使其总位能达到极小状态。弹性体受力在变形过程中克服内力所作的功，作为能量积蓄在弹性体内部，一般称它为变形能。对于等截面拉杆，其变形能为

$$U=\frac{A}{2}\int_0^l \sigma\bar{\varepsilon}\mathrm{d}x=\frac{EA}{2}\int_0^l\left(\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x \qquad (1\text{-}1)$$

式中，ε 为应变函数；σ 为应力函数；u 为位移函数。

如果某个单元 e 的两节点位移 u_i 与 u_{i+1} 为已知（图1-3 a），则根据线性插值可得

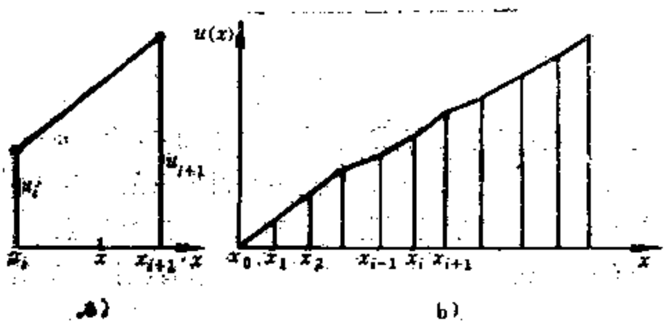


图 1-3

$$u_e(x)=\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}u_i+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}u_{i+1}$$

$$(x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}) \qquad (1\text{-}2)$$

式中，$u_e(x)$ 称为单元 e 的位移插值函数。如果已知所有拉杆单元上的节点位移值 u_i（$i=1, 2, \cdots, n$），则就可构成如图 1-3 b 所示的一条折线，这就是拉杆的位移插值函数。

现将式（1-2）代入式（1-1），得到以节点位移表示的变形能表达式：

$$U=\frac{EA}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x$$

$$=\frac{EA}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(u_{i+1}-u_i)^2}{x_{i+1}-x_i} \tag{1-3}$$

弹性体的总位能还应包括节点载荷（外力）的位能

$$\psi=-W=-Ru \tag{1-4}$$

以节点位移表示节点载荷位能的表达式为

$$\psi=-\sum_{i=0}^{n}R_iu_i \tag{1-5}$$

于是弹性体的总位能表达式为

$$\Pi=U+\psi=\frac{EA}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(u_{i+1}-u_i)^2}{x_{i+1}-x_i}-\sum_{i=0}^{n}R_iu_i \tag{1-6}$$

根据最小位能原理，拉杆要达到稳定平衡，则节点位移 $u_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 不能是任意的，它应使总位能达到极小。于是分别对每个节点位移取偏导数并等于零，则得下列方程组：

$$\frac{\partial\Pi}{\partial u_i}=EA\left[\frac{u_i-u_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}-\frac{u_{i+1}-u_i}{x_{i+1}-x_i}\right]-R_i=0 \tag{1-7}$$

即

$$\begin{aligned}
&\frac{-EA}{x_1-x_0}(u_1-u_0)=R_0\\
&\frac{EA}{x_1-x_0}(u_1-u_0)-\frac{EA}{x_2-x_1}(u_2-u_1)=R_1\\
&\frac{EA}{x_2-x_1}(u_2-u_1)-\frac{EA}{x_3-x_2}(u_3-u_2)=R_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{EA}{x_n-x_{n-1}}(u_n-u_{n-1})=R_n
\end{aligned} \tag{1-8}$$

当单元的尺寸和材料确定后，$(x_{i+1}-x_i)$、A、E 都是已知量，节点外载荷 R 也是已知量，因此式（1-8）是以 u_i 为未知量的线性

代数方程组，求解可得节点位移的近似值 u_i，然后就可用插值位移函数及有关应力公式求出各单元上的应力值。

综上所述，有限元法的基本思路就是将弹性体的求解区域分割为有限个单元，通过构造插值位移函数，利用最小位能原理，将总位能求极值建立线性方程组，从而解得单元节点的位移值，进一步求得应力值。

1.3 有限元法的计算步骤

在上述一维的拉杆例子中，介绍了有限元法的基本思路，它同样适用于二维的平面问题与三维的空间问题。现将有限元法的计算步骤简要归纳下面三点。

1.3.1 网格分割

将弹性体的求解区域分割成有限个单元时，单元的形状可根据需要选择。除杆单元外，平面问题常用的单元有简单三角形单元，六节点三角形单元，轴对称三角形环单元，矩形单元，四节点任意四边形单元，八节点任意四边形单元以及曲边形单元，如图1-4所示。空间问题常用的单元有四面体单元，长方体单元，任意六面体单元以及曲面六面体单元等，如图 1-5 所示。

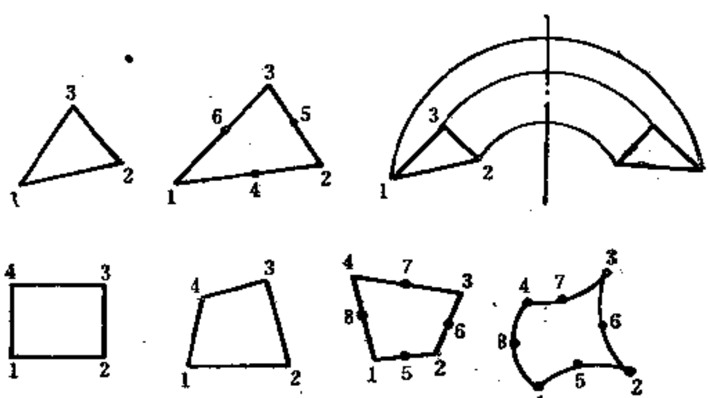


图 1-4

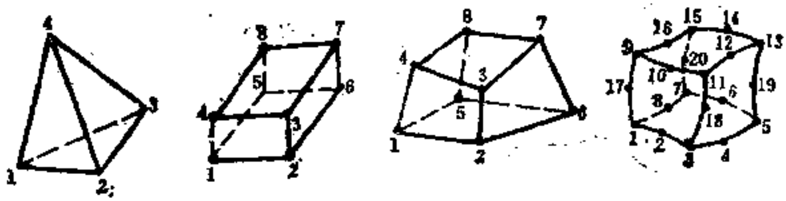
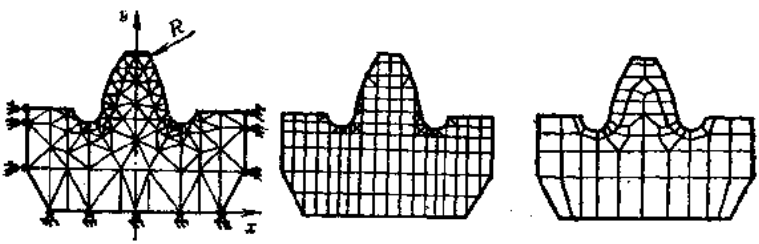


图 1-5

单元的划分基本上是任意的，有很大的灵活性，单元的大小主要根据精度要求和计算机容量及其费用来确定。通常在应力集中的部位以及应力变化比较剧烈处，单元宜划得密一些，单元大小要逐渐过渡，每个单元的边长不能相差太悬殊。图 1-6 为齿轮轮齿的网格分割图。图 a 为三角形单元；图 b 为边缘处用三角形单元，中部用矩形单元，图 c 为边缘处用曲线四边形单元，中部用任意四边形单元。由于齿根部分应力集中，单元分割得较密。图 1-7 为连杆的三角形单元网格分割图。在安装螺钉处及应力集



a)　　b)　　c)

图 1-6

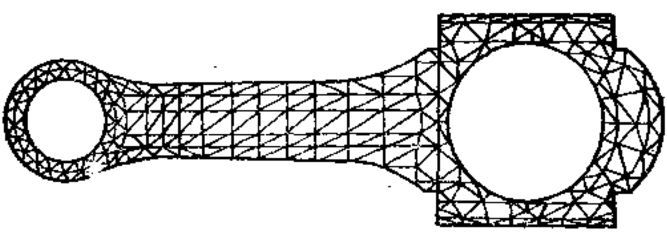


图 1-7

中部位划分得较密。图 1-8 与图 1-9 分别为输送机滚筒与螺钉、螺母在子午面上的网格分割图，每个三角形单元实际上为三角形环单元。它们均属于轴对称问题，故可作平面问题处理。

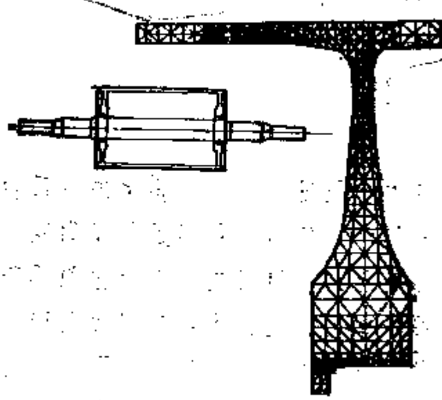


图 1-8

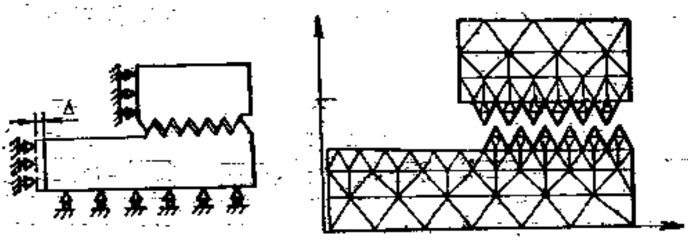


图 1-9

由于已假定各个单元之间只是在节点处用铰连接，载荷也要相应地移置到节点上，在没有位移或位移微小到可忽略不计的节点处，应加上支承连杆等约束条件，这就构成了有限元法的计算简图，如图 1-6 a 所示。

1.3.2 单元分析

所谓单元分析，就是建立各个单元的节点位移和节点力之间的关系式。以平面问题为例，对于图 1-10 所示的简单三角形单元，它有三个节点 i、j、m，每个节点有两个位移分量 u、v 和两个节点力分量 F_x 与 F_y。节点位移分量可用列阵 $\{q\}^e$ 表示